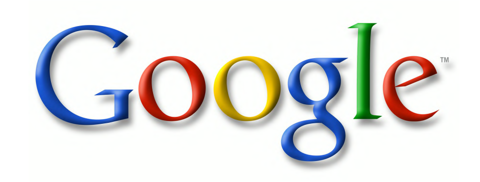





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ

DES SCIENCES

PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

TOME I

PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

A BORDEAUX

CHEZ DUTHU, LIBRAIRE

17, rue Sainte-Catherine, 17

1884

EXPOSITION

DE LA

MÉTHODE DE HANSEN

RELATIVE AU

CALCUL DES PERTURBATIONS DES PETITES PLANÈTES

PAR L. DUPUY

Ce travail a pour objet de développer la méthode de M. Hansen pour le calcul des perturbations des petites planètes, en lui faisant subir quelques modifications de détail et de forme qui m'ont paru devoir en simplifier l'exposition et l'usage.

Le but du savant directeur de l'Observatoire de Gotha est d'éviter les séries, peu convergentes dans le cas des petites planètes, auxquelles conduit la méthode employée pour les planètes principales. A cet effet, il prend pour arguments de ses développements l'anomalie excentrique de la planète troublée et l'anomalie moyenne de la planète troublante. Il exprime ainsi, sous une forme abordable par le calcul numérique, les variations des coordonnées qu'il fait dépendre au préalable de deux fonctions W et R, dont les dérivées dépendent de celles de la fonction perturbatrice.

J'ai divisé mon travail en trois parties.

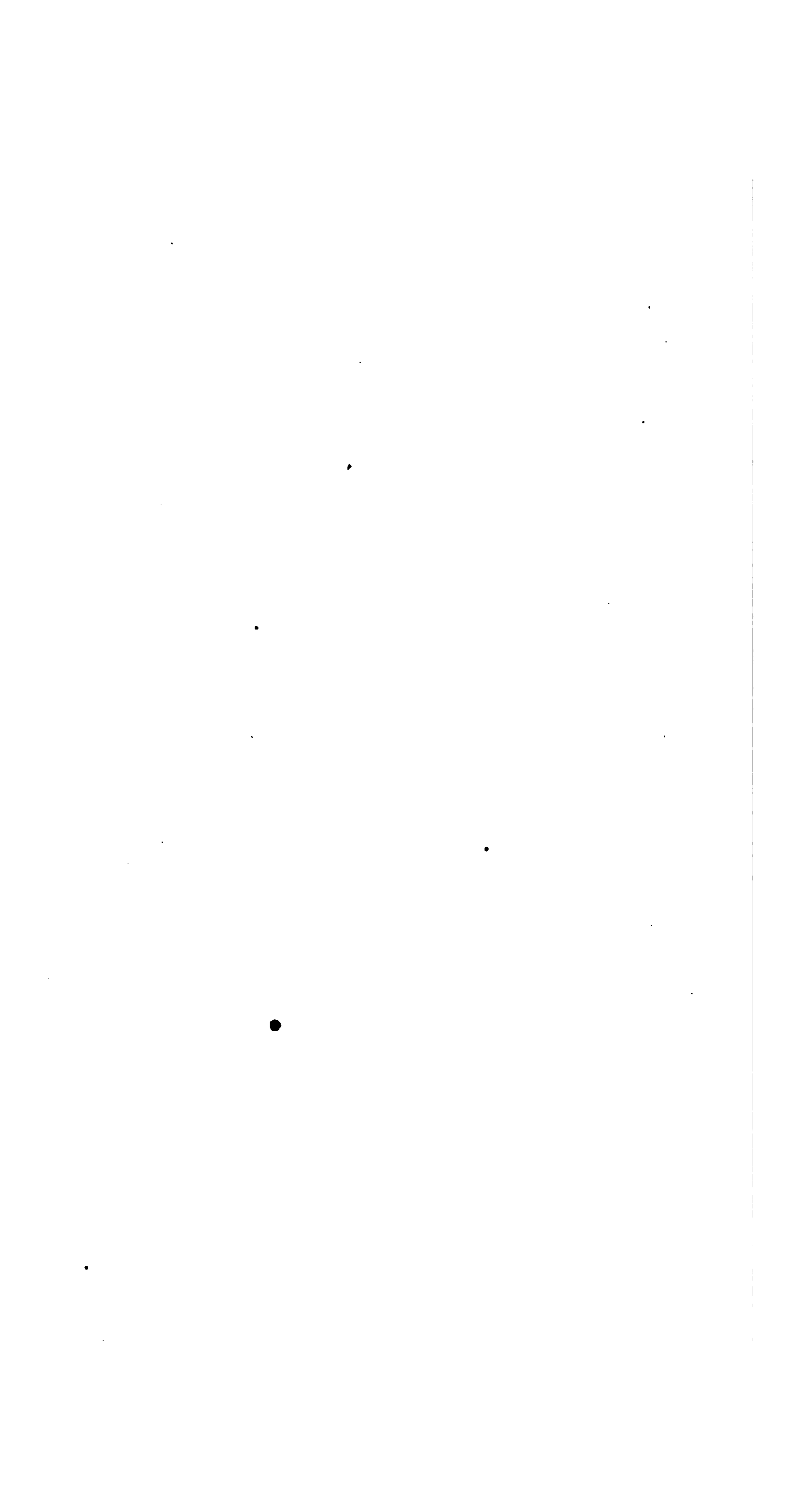
Dans la première, j'expose l'introduction des coordonnées choisies par M. Hansen, l'expression analytique des fonctions W et R, dont dépendent respectivement les perturbations de la longitude moyenne et du rayon vecteur, ainsi que celles de la latitude, les transformations de la fonction perturbatrice et de ses dérivées, et enfin l'expression des perturbations du premier ordre des coordonnées choisies.

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX



MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ

DES SCIENCES

PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

~~2e Série~~

TOME IC

PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

A BORDEAUX

CHEZ DUTHU, LIBRAIRE

17, rue Sainte-Catherine, 17

18[illegible]4

Éliminant maintenant X et Y des équations (11), on obtient

$$(13) \quad \begin{cases} r^2 \dfrac{d^2v}{dt^2} + 2r \dfrac{dr}{dt}\dfrac{dv}{dt} = \mu \dfrac{\partial \Omega}{\partial v}, \\ \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\dfrac{dv^2}{dt^2} + \dfrac{\mu}{r^2} = \mu \dfrac{\partial \Omega}{\partial r}. \end{cases}$$

Telles sont en coordonnées polaires les équations du mouvement dans le plan des XY.

En intégrant sans tenir compte des seconds membres, et en considérant les constantes introduites comme des fonctions du temps qu'on déterminera par la méthode de la variation des constantes arbitraires, les intégrales obtenues seront celles des équations (13). r et v étant des coordonnées idéales, leurs dérivées premières par rapport au temps conservent la même forme dans le mouvement troublé et dans le mouvement non troublé; de sorte qu'on a les équations

$$(13)^* \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{f}{r^2}\sqrt{\mu a}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\, e \sin w,$$

dans lesquelles $2a$ est le grand axe de l'orbite, e son excentricité, w l'anomalie vraie, $f = \sqrt{1-e^2}$. Différentiant ces expressions, il vient, dans le mouvement non troublé,

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{dv}{dt}, \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - \frac{\mu}{r^2}.$$

Comparant ces résultats avec les équations (13), on voit que les dérivées secondes déduites des équations $(13)^*$ satisfont aux équations du mouvement troublé, à la condition de les augmenter respectivement de

$$\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial \Omega}{\partial v}, \qquad \mu \frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

La quantité désignée par h peut prendre la forme

$$(13)^{**} \qquad h = \frac{\mu}{r^2 \dfrac{dv}{dt}},$$

et comme

$$r^2 \frac{dv}{dt} = f\sqrt{\mu a},$$

on a finalement

$$h = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{\mu}{a}}.$$

6.

Les neuf cosinus peuvent s'exprimer en fonction des trois angles i, θ, σ, représentant respectivement l'angle du plan des XY avec celui des xy, l'angle que fait la ligne des nœuds avec la partie positive de l'axe des x, et l'angle que fait la même ligne avec la partie positive de l'axe des X : on a ainsi, comme on sait,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\sigma\cos\theta + \sin\sigma\sin\theta\cos i,\\
\beta &= \sin\sigma\cos\theta - \cos\sigma\sin\theta\cos i,\\
\gamma &= \sin\theta\sin i,\\
\alpha' &= \cos\sigma\sin\theta - \sin\sigma\cos\theta\cos i,\\
\beta' &= \sin\sigma\sin\theta + \cos\sigma\cos\theta\cos i,\\
\gamma' &= -\cos\theta\sin i,\\
\alpha'' &= -\sin\sigma\sin i,\\
\beta'' &= \cos\sigma\sin i,\\
\gamma'' &= \cos i.
\end{aligned}$$

Ces neuf équations entre les neuf cosinus et les trois angles montrent que ces derniers sont indépendants les uns des autres, mais l'équation (8) établit une relation entre leurs variations. Pour obtenir cette relation, on calcule d'abord $d\alpha, d\alpha', d\alpha''$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
d\alpha &= -\alpha' d\theta - \beta d\sigma - \gamma\sin\sigma di,\\
d\alpha' &= \alpha d\theta - \beta' d\sigma - \gamma'\sin\sigma di,\\
d\alpha'' &= -\beta'' d\sigma - \gamma''\sin\sigma di;
\end{aligned}$$

substituant ces valeurs dans l'équation (8), on a

$$d\sigma = \cos i d\theta. \tag{14}$$

L'intégration des équations (12) et (14) amène trois constantes arbitraires, qui sont les valeurs, pour $t=0$, de θ, α'' et β''; l'intégration des équations (13) en introduit quatre, de sorte qu'on obtient ainsi une constante arbitraire de trop. La septième constante doit son existence à ce qu'elle déterminera la position de l'axe des X dans le plan des XY, position complètement arbitraire. On peut dès lors supposer que, pour $t=0$, les angles $\mathrm{X}\mathrm{A}\Omega$ et $x\mathrm{A}\Omega$ sont égaux; en sorte que si l'on désigne par σ_0, i_0, θ_0 les valeurs de σ, i, θ pour $t=0$, on a

$$\sigma_0 = \theta_0;$$

et par là le nombre des constantes est ramené à six.

Les différentielles des angles θ, σ, i s'expriment facilement en fonction de celles des cosinus α' et β'. En effet, les valeurs obtenues précédemment pour α' et β' donnent

$$d\alpha' = -\beta' d\sigma + \gamma' \frac{\alpha'}{\sin i} di,$$
$$d\beta' = -\alpha' d\sigma + \gamma' \frac{\beta'}{\sin i} di.$$

Combinant ces équations entre elles et avec l'équation (14), on a

$$d\sigma = \frac{\alpha' d\beta' - \beta' d\alpha'}{1 - \gamma'^2},$$
$$d\theta = \frac{\alpha' d\beta' - \beta' d\alpha'}{\gamma'(1 - \gamma'^2)},$$
$$d(\theta - \sigma) = \frac{\alpha' d\beta' - \beta' d\alpha'}{\gamma'(1 + \gamma')},$$
$$di = \frac{\alpha' d\alpha' + \beta' d\beta'}{\gamma' \sqrt{1 - \gamma'^2}}.$$

En intégrant, on a

$$i = i_0 + \int \frac{\alpha' d\alpha' + \beta' d\beta'}{\gamma' \sqrt{1 - \gamma'^2}},$$
$$\theta = \theta_0 + \int \frac{\alpha' d\beta' - \beta' d\alpha'}{\gamma' \sqrt{1 - \gamma'^2}},$$
$$\theta - \sigma = \int \frac{\alpha' d\beta' - \beta' d\alpha'}{\gamma'(1 + \gamma')}.$$

Si l'on désigne par

- v la longitude dans l'orbite comptée à partir de AX,
- L la projection sur le plan xy de cette longitude, projection comptée à partir de Ax,
- λ la latitude par rapport au plan xy,
- i l'angle des deux plans XY et xy,
- θ et σ les mêmes angles que précédemment,

AX et Ax étant les parties positives des axes des X et des x, le triangle $mm_1\Omega$ rectangle en m_1 et ayant pour sommets la planète, le nœud et l'intersection du cercle de longitude passant par la planète avec celui qui détermine dans la sphère céleste le plan des xy, donne

$$(15)\qquad \begin{cases} \cos\lambda \sin(L-\theta) = \cos i \sin(v-\sigma), \\ \cos\lambda \cos(L-\theta) = \cos(v-\sigma), \\ \sin\lambda = \sin i \sin(v-\sigma). \end{cases}$$

La substitution des valeurs de i, θ, σ, données par les intégrales ci-dessus, dans les équations (15), ferait connaître L et λ; mais ces équations (15) renferment les valeurs complètes de i, θ, σ, de sorte que les parties constantes de ces valeurs ne sont pas séparées des parties variables, c'est-à-dire des perturbations. Dans ce qui suit, je vais établir des équations où cette séparation est effectuée.

7.

Si l'on imagine une sphère de rayon 1, ayant pour centre celui du Soleil, le plan de l'orbite la coupe suivant un grand cercle M☊B, tel que M, ☊, B soient respectivement les points rencontrés par le rayon vecteur, la ligne du nœud ascendant et l'axe des X; alors B☊ $=\sigma$, BM $=v$, M☊D $=i$, OD étant le grand cercle suivant lequel la sphère est coupée par le plan fondamental des xy. Par un point I du cercle MB, je fais passer un grand cercle IN, et sur son plan j'abaisse du point M la perpendiculaire MQ, que je prolonge jusqu'à sa rencontre avec la sphère au point M_0; par ce point et par I je mène un autre grand cercle, sur lequel je prends

$$M_0C = MB = v,$$

et qui fait un angle k avec le plan fondamental qu'il coupe suivant la ligne AHx_0 faisant avec Ax un angle $-\varphi$ compté de Ax vers AH; je désigne encore par h l'arc HC. Il est facile de montrer que le triangle sphérique MIM est isoscèle. Je mène AQ, AM, AM_0, AI, IQ; MM_0 perpendiculaire au plan IAN l'est à la droite AQ passant par son pied dans ce plan, et, comme AMM_0 est isoscèle, $MQ = M_0Q$. Si maintenant je mène IQ, elle est perpendiculaire sur le milieu de MM_0, et par suite le triangle rectiligne IMM_0 est isoscèle, et

$$\text{arc IM} = \text{arc IM}_0 .$$

De là résulte

$$\text{arc IC} = \text{arc IB} .$$

La ligne AQ prolongée passant par le milieu de l'arc MM_0, le cercle IN y passe aussi; il est donc bissecteur de l'angle MIM_0.

Les coordonnées du point M, par rapport à la ligne AHx et à la perpendiculaire qu'on lui mène par le point A dans le plan M_0AH, sont

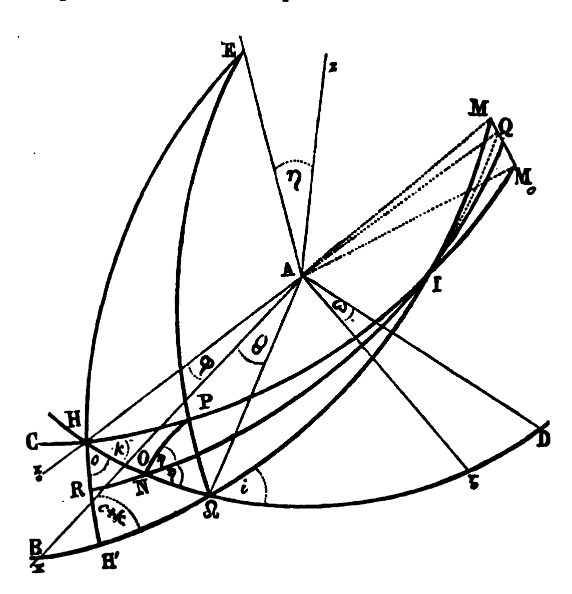
$$x = \cos\lambda \cos(L-\varphi),$$
$$y = \cos\lambda \sin(L-\varphi),$$
$$z = \sin\lambda,$$

tandis que les coordonnées du même point dans le système yAx sont données par les équations (15).

Les coordonnées du point M_0, par rapport aux axes Ay_0, Ax_0, Az_0, sont

$$(15)^* \quad \begin{cases} x_0 = \cos(v-h), \\ y_0 = \cos k \sin(v-h), \\ z_0 = \sin k \sin(v-h), \end{cases}$$

et si maintenant j'appelle x_1, y_1, z_1 les coordonnées de M par rapport à de nouveaux plans coordonnés parallèles aux anciens et passant



par le point M_0, η l'angle de la direction constante M_0M avec l'axe des z, ω l'angle que fait avec Ay_0 la projection de M_0M sur le plan fondamental, ces deux angles η, ω étant ainsi indépendants de v, j'ai

$$x_1 = (z-z_0) \operatorname{tang}\eta \sin\omega,$$
$$y_1 = -(z-z_0) \operatorname{tang}\eta \cos\omega,$$
$$z_1 = z - z_0,$$

et comme $x_1 = x - x_0$, $y_1 = y - y_0$, il vient finalement

$$(16)\quad \begin{cases} \cos\lambda\cos(L-\varphi) = \cos(v-h) + sA\sin\omega, \\ \cos\lambda\sin(L-\varphi) = \cos k\sin(v-h) - sA\cos\omega, \\ \sin\lambda = \sin k\sin(v-h) + s, \end{cases}$$

en posant pour abréger $\operatorname{tang} n = A$, $z - z_0 = s$.

Ces équations, où φ, h, k sont complètement arbitraires, donnent les coordonnées du point M_0; elles ne diffèrent des équations (15), déterminant le point M, que par les termes complémentaires ayant s en facteur, et qui deviennent très petits en même temps que MM_0.

En posant $\Gamma = \varphi - h$, les équations (16) deviennent

$$(17)\quad \begin{cases} \cos\lambda\cos(L-h-\Gamma) = \cos(v-h) + sA\sin\omega, \\ \cos\lambda\sin(L-h-\Gamma) = \cos k\sin(v-h) - sA\cos\omega, \\ \sin\lambda = \sin k\sin(v-h) + s. \end{cases}$$

La quantité Γ qu'on vient d'introduire ici et les quantités ω, n sont liées aux positions des deux cercles M_0C, MB par des relations qui s'établissent simplement. En effet, NI, cercle bissecteur de l'angle MIM_0, étant perpendiculaire sur l'arc de grand cercle MM_0, a pour pôle le point E, et de plus il fait un angle n avec le plan fondamental, en sorte que l'angle zAE des deux rayons AE, AZ, respectivement perpendiculaires à ces deux plans, est égal à n. De plus, NA, intersection du plan fondamental et du plan du cercle bissecteur, perpendiculaire à ces deux lignes, l'est aussi au plan EAz et à la ligne AD, suivant laquelle il coupe le plan fondamental; N est donc le pôle du grand cercle EzD, par suite

$$ND = 90^\circ,$$

AD se trouve au delà de Ay_0, et on a

$$HN = Dy_0 = \omega,$$

puisque AD, intersection du plan fondamental avec un plan qui lui est perpendiculaire et qui passe par une parallèle AE à la ligne MM_0, doit être parallèle à la projection de cette dernière sur xAy.

Si l'on fait passer par H et E un grand cercle qui coupe MB en H' et par Ω et E un grand cercle rencontrant M_0C en C, on obtient des triangles isoscèles IPΩ, IHH'; on en déduit, en appelant c l'angle H'HΩ,

$$H'B = HC, \quad HP = H'\Omega = \sigma - h, \quad HH'\Omega = c + k.$$

Joignant NP, les deux triangles INP, INΩ sont égaux dans toutes leurs parties, et on a

$$NP = N\Omega\,, \quad PNI = \Omega NI = \eta\,, \quad HPN = i\,.$$

De plus,

$$\begin{aligned} N\Omega &= O\Omega - ON = \theta - \varphi - \omega = \theta - h - \Gamma - \omega\,,\\ H\Omega &= N\Omega + \omega \;= \theta - h - \Gamma\,,\\ PN &= N\Omega \;\;\;\;\;\;\;\;= \theta - h - \Gamma - \omega\,. \end{aligned}$$

Pour déterminer η, on a par le triangle PNH

$$\cos PNH = -\cos 2\eta = -\cos k \cos i + \sin k \sin i \cos(\sigma - h)\,,$$

d'où l'on tire

$$2\cos^2\eta = 1 + \cos k \cos i - \sin k \sin i \cos(\sigma - h)\,.$$

Les formules de Delambre donnent

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(i+k)}{\cos\eta} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\theta - h - \Gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\sigma - h)}\,,$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(i-k)}{\cos\eta} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\theta - h - \Gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\sigma - h)}\,.$$

En multipliant ces deux équations membre à membre, il vient

$$\frac{\cos i + \cos k}{2\cos^2\eta} = \frac{\sin(\theta - h - \Gamma)}{\sin(\sigma - h)}\,,$$

ou enfin

$$\sin(\theta - h - \Gamma) = \frac{(\cos i + \cos k)\sin(\sigma - h)}{2\cos^2\eta}\,.$$

La première des formules de Delambre donne, après avoir remplacé au numérateur $\cos^2\eta$ par la valeur trouvée plus haut,

$$\cos(\theta - h - \Gamma) = \frac{(1 + \cos i \cos k)\cos(\sigma - h) - \sin i \sin k}{2\cos^2\eta}\,;$$

ces deux équations déterminent sans ambiguïté l'angle $\theta - h - \Gamma$.

Le même triangle donne encore

$$\frac{\sin\omega}{\sin i} = \frac{\sin(\sigma - h)}{\sin 2\eta}\,,$$

$$\cot\omega \sin(\sigma - h) = \cot i \sin k + \cos(\sigma - h)\cos k\,.$$

La première de ces équations peut s'écrire

$$\sin\omega \operatorname{tang}\eta = \frac{\sin i \sin(\sigma - h)}{2\cos^2\eta}\,,$$

et la seconde, en y substituant cette valeur de sin ω, devient

$$\cos\omega \tang\eta = \frac{\cos i \sin k + \cos k \cos(\sigma - h) \sin i}{2\cos^2\eta};$$

ainsi se trouve déterminé l'angle ω sans ambiguïté.

On peut trouver pour cos η une expression plus simple que celle qui a été indiquée plus haut. En effet, les triangles HH'Ω, IHN et HRN qui est rectangle, donnent respectivement

$$\frac{\sin(\theta - h - \Gamma)}{\sin(c + k)} = \frac{\sin(\sigma - h)}{\sin c},$$

$$\cos\frac{I}{2} = \cos k \cos\eta + \sin k \sin\eta \cos\omega,$$

$$\cos\omega = \cot\eta \cot c.$$

Éliminant l'angle c entre la première et la dernière de ces relations, on a, en vertu de la seconde et de la valeur trouvée plus haut pour sin $(\theta - h - \Gamma)$,

$$\cos\eta = \frac{\cos i + \cos k}{2\cos\frac{I}{2}}.$$

Le triangle PHN, dont les côtés sont PH$=\sigma - h$, PN$=\theta - h - \Gamma - \omega$, NH$=\omega$, et les angles respectivement opposés à ces côtés, $180^\circ - 2\eta, k, i$, donne par les formules de Delambre

$$\begin{aligned}
\sin\eta \sin\tfrac{1}{2}(\theta - h - \Gamma - 2\omega) &= \sin\tfrac{1}{2}(k - i)\sin\tfrac{1}{2}(\sigma - h),\\
\sin\eta \cos\tfrac{1}{2}(\theta - h - \Gamma - 2\omega) &= \sin\tfrac{1}{2}(k + i)\cos\tfrac{1}{2}(\sigma - h),\\
\cos\eta \sin\tfrac{1}{2}(\theta - h - \Gamma) &= \cos\tfrac{1}{2}(k - i)\sin\tfrac{1}{2}(\sigma - h),\\
\cos\eta \cos\tfrac{1}{2}(\theta - h - \Gamma) &= \cos\tfrac{1}{2}(k + i)\cos\tfrac{1}{2}(\sigma - h).
\end{aligned}$$

8.

Les arcs h et k étant arbitraires, on peut poser $h = \theta_0, k = i_0$, θ_0 et i_0 étant les valeurs initiales de θ et de i : on obtient alors, d'après les équations (15) et (15)*,

$$z = \sin i \sin(v - \sigma),$$
$$z_0 = \sin i_0 \sin(v - \theta_0),$$

d'où

$$s = \sin i \sin(v - \sigma) - \sin i_0 \sin(v - \theta_0).$$

Posant de plus

$$(17)^* \quad \begin{cases} p = \sin i \sin(\sigma - \theta_0), \\ q = \sin i \cos(\sigma - \theta_0) - \sin i_0, \end{cases}$$

il vient

$$s = q \sin(v - \theta_0) - p \cos(v - \theta_0),$$
$$2\cos^2 \eta = \cos i_0 (\cos i_0 + \cos i) - q \sin i_0.$$

Les équations qui donnent sin ω et cos ω dans l'art. 7 deviennent alors

$$\sin \omega \operatorname{tang} \eta = \frac{p}{2\cos^2 \eta},$$

$$\cos \omega \operatorname{tang} \eta = \operatorname{tang} i_0 + \frac{q}{2\cos^2 \eta \cos i_0}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (17), on a

$$(18) \begin{cases} \cos \lambda \sin(L - \theta_0 - \Gamma) = \cos i_0 \sin(v - \theta_0) - s\left(\operatorname{tang} i_0 + \dfrac{q}{2\cos^2 \eta \cos i_0}\right), \\ \cos \lambda \cos(L - \theta_0 - \Gamma) = \cos(v - \theta_0) + \dfrac{sp}{2\cos^2 \eta}, \\ \sin \lambda = \sin i_0 \sin(v - \theta_0) + s, \end{cases}$$

équations d'une application très commode, parce que les quantités du second ordre qu'elles renferment, $\frac{sq}{2\cos^2 \eta \cos i_0}$, $\frac{sp}{2\cos^2 \eta}$, Γ, sont dans bien des cas tout à fait insensibles.

9.

La quantité Γ s'obtient aisément par une quadrature. En effet, le triangle HPN donne

$$d\text{HN} = -\cos 2\eta \, d\text{NP} + \cos i_0 \, d\sigma + \sin(\sigma - \theta_0) \sin i_0 \, di,$$
$$d\text{NP} = -\cos 2\eta \, d\text{HN} + \cos i \, d\sigma;$$

on a de plus

$$\text{NP} = \theta - \theta_0 - \text{HN} - \Gamma,$$
$$d\text{NP} = d\theta - d\text{HN} - d\Gamma.$$

Ces équations donnent facilement

$$d\Gamma = -\frac{\sin i_0 \sin(\sigma - \theta_0)}{2\cos^2 \eta} di + \frac{\sin i - \sin i_0 \sin(\sigma - \theta_0)}{2\cos^2 \eta \cos i} \sin i \, d\sigma.$$

En différentiant les valeurs précédentes de p et de q, on a

$$dp = \cos i \sin(\sigma-\theta_0)di + \sin i \cos(\sigma-\theta_0)d\sigma,$$
$$dq = \cos i \cos(\sigma-\theta_0)di - \sin i \sin(\sigma-\theta_0)d\sigma,$$

par suite

$$\cos i di = \sin(\sigma-\theta_0)dp + \cos(\sigma-\theta_0)dq,$$
$$\sin i d\sigma = \cos(\sigma-\theta_0)dp - \sin(\sigma-\theta_0)dq,$$

et enfin

$$d\Gamma = \frac{qdp-pdq}{2\cos^2\eta\cos i}.$$

Pour exprimer dp, dq au moyen de la fonction perturbatrice elle-même, il faut remarquer que

$$p = -\alpha'\cos\theta_0 - \beta'\sin\theta_0, \quad q = -\alpha'\sin\theta_0 + \beta'\cos\theta_0 - \sin i_0,$$

d'où

$$dp = -\cos\theta_0 d\alpha' - \sin\theta_0 d\beta', \quad dq = -\sin\theta_0 d\alpha' + \cos\theta_0 d\beta',$$

et par les équations (12)

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} dp &= hr\sin(v-\theta_0)\cos i \cdot \frac{\partial\Omega}{\partial Z} dt, \\ dq &= hr\cos(v-\theta_0)\cos i \cdot \frac{\partial\Omega}{\partial Z} dt; \end{aligned} \right.$$

les intégrations devront être faites de manière que pour $t = 0$ on ait $p = 0$, $q = 0$. On obtient alors

$$d\Gamma = \frac{hrs}{2\cos^2\eta}\frac{\partial\Omega}{\partial Z} dt,$$

h étant ici, comme dans le système (19), déterminé par l'équation

$$h = \frac{\mu dt}{XdY - YdX}.$$

En intégrant, il vient

$$\Gamma = \int_0^t \frac{hrs}{2\cos^2\eta}\frac{\partial\Omega}{\partial Z} dt.$$

Le cube de la force perturbatrice n'ayant qu'une petite influence, on peut supposer ici h constant et faire $\cos^2\eta = \cos^2 i_0$, ce qui donne avec une exactitude suffisante

$$\Gamma = \frac{h}{2\cos^2 i_0}\int_0^t rs\frac{\partial\Omega}{\partial Z} dt.$$

10.

Les quantités p et q peuvent s'exprimer en fonction de s et de sa différentielle. En effet, s étant une coordonnée idéale, en différentiant l'équation

$$s = q \sin(v-\theta_0) - p \cos(v-\theta),$$

on a

$$\frac{ds}{dt} = q \cos(v-\theta_0)\frac{dv}{dt} + p \sin(v-\theta_0)\frac{dv}{dt},$$

et de ces deux équations on tire

$$p = -s\cos(v-\theta_0) + \frac{ds}{dv}\sin(v-\theta_0),$$

$$q = s\sin(v-\theta_0) + \frac{ds}{dv}\cos(v-\theta_0),$$

qui peuvent être utiles lorsque les produits sp, sq donnent quelques termes sensibles dans les équations (18). Dans ce cas, on remplacera dans ces équations $\cos^2\eta$ par $\cos^2 i_0$. On peut du reste développer $\frac{1}{\cos^2\eta}$ en série infinie, et il vient pour les deux premiers termes

$$\frac{1}{\cos^2\eta} = \frac{1}{\cos^2 i_0} + \frac{\sin i_0}{\cos^4 i_0} q + \cdots$$

Dans les expressions qui précèdent, comme dans celles qui suivent, les inclinaisons i_0, i peuvent être quelconques. On doit remarquer toutefois que pour $i_0 = 90°$, Γ devient infini, mais ce cas peut toujours être évité.

---

§ II.

Formation des équations différentielles des perturbations du temps, du logarithme du rayon vecteur et de la coordonnée perpendiculaire au plan fondamental.

11.

Hansen prend pour plan fondamental un plan fixe passant par le centre du Soleil, pris pour origine des coordonnées, et dans lequel il trace un axe fixe celui des x; le plan des XY est le plan de l'orbite à l'instant $t = 0$, i_0 est l'angle de ces deux plans et θ_0 celui que font

avec le nœud ascendant les axes des x et des X. Sans les forces perturbatrices, la planète continuerait à se mouvoir dans le plan XY, et décrirait une conique invariable; lorsqu'elles interviennent, on peut supposer l'astre sur cette conique et dans ce plan pendant l'instant dt succédant à l'époque $t=0$.

Soient

a_0 le demi-grand axe de l'orbite décrite à l'instant $t=0$,
p_0 son paramètre,
e_0 son excentricité,
ϖ_0 la longitude du périhélie comptée à partir de OX,
τ_0 le temps du passage au périhélie,
$1-e_0^2=f_0^2$,
r, w, v, μ conservant la signification qui leur a été précédemment assignée;

on a

$$r=\frac{p_0}{1+e_0\cos w}, \quad v=w+\varpi_0, \quad \frac{dw}{dt}=\frac{\sqrt{\mu p_0}}{r^2};$$

l'intégration de la dernière donne les circonstances du mouvement non troublé par les équations

$$\sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}}(t-\tau_0)=\varepsilon-e_0\sin\varepsilon, \qquad r=a_0(1-e_0\cos\varepsilon),$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}w=\sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad v=w+\varpi_0,$$

$$\cos\lambda\sin(L-\theta_0)=\cos i_0\sin(v-\theta_0),$$
$$\cos\lambda\cos(L-\theta_0)=\cos(v-\theta_0),$$
$$\sin\lambda=\sin i_0\sin(v-\theta_0),$$

dans lesquelles ε désigne l'anomalie excentrique.

Il suffit d'un changement simple pour que ces équations représentent en fonction des éléments $\tau_0, i_0, \theta_0, \varpi_0, p_0, e_0$, le lieu et la vitesse de la planète à une époque quelconque t. Remplaçant t par z, multipliant le rayon vecteur par $1+\nu$ et remplaçant les trois dernières équations par les équations (18), on pourra déterminer z et ν de manière que ces équations satisfassent au mouvement troublé. La question est ainsi ramenée à exprimer z, ν, s au moyen de la fonction perturbatrice.

12.

Par la substitution de z à t, les quantités r, ε, w prennent de nouvelles valeurs $\bar{r}, \bar{\varepsilon}, \bar{w}$, de sorte que dans le mouvement troublé on a

$$\sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}}\,(t-\tau_0)=\bar{\varepsilon}-e_0\sin\bar{\varepsilon}\,,\qquad \bar{r}=a_0(1-e_0\cos\bar{\varepsilon})\,,$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\bar{w}=\sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\bar{\varepsilon}\,,\qquad v=\bar{w}+\varpi_0\,,$$

$$\bar{r}=\frac{p_0}{1+e_0\cos\bar{w}}\,,\qquad r=\bar{r}(1+\nu)\,.$$

La quantité ν qui vient d'être introduite représente, aux quantités près de l'ordre du carré de la force perturbatrice, le logarithme de $\frac{r}{\bar{r}}$; en effet

$$\log(1+\nu)=\nu-\tfrac{1}{2}\nu^2+\cdots$$

13.

Soient maintenant, pour une époque t,

- a le demi-grand axe,
- n le moyen mouvement,
- e l'excentricité,
- w l'anomalie vraie,
- ε l'anomalie excentrique,
- r le rayon vecteur,
- χ l'angle compris dans le plan des XY, entre le périhélie et la partie positive de l'axe des X,
- v l'angle compris dans le même plan, entre le même axe et le rayon vecteur ;

soit enfin c l'anomalie moyenne pour $t=0$.

La méthode de la variation des constantes arbitraires permet de déterminer les éléments, de manière qu'en substituant les valeurs calculées dans les équations de la conique sur laquelle la planète se meut, on obtienne, à chaque instant, dans le plan XY, le lieu et la vitesse de la planète troublée. Ces éléments sont des fonctions du

temps qu'il s'agit de déterminer. Plus tard je montrerai comment on peut, des éléments correspondant à une époque, déduire ceux qui correspondent à une autre époque. Entre les coordonnées et les éléments qui précèdent, on a

$$\begin{aligned} nt + c &= \varepsilon - e \sin \varepsilon, \\ r \cos w &= a(\cos \varepsilon - e), \\ r \sin w &= af \sin \varepsilon, \\ v &= w + \chi, \\ a^3 n^2 &= \mu; \end{aligned}$$

comme on a aussi

$$\begin{aligned} n_0 z + c_0 &= \bar{\varepsilon} - e_0 \sin \bar{\varepsilon}, \\ \bar{r} \cos \bar{w} &= a_0 (\cos \bar{\varepsilon} - e_0), \\ \bar{r} \sin \bar{w} &= a_0 f_0 \sin \bar{\varepsilon}, \\ v &= \bar{w} + \varpi_0. \\ a_0^3 n_0^2 &= \mu, \end{aligned}$$

on en déduit

$$w = \bar{w} + \varpi_0 - \chi;$$

alors l'équation

$$\frac{a}{r} = \frac{1 + e \cos w}{f^2},$$

devient

$$\frac{a}{r} = \frac{1 + e \cos \bar{w} \cos (\varpi_0 - \chi) + e \sin \bar{w} \sin (\chi - \varpi_0)}{f^2},$$

d'où

$$\frac{\bar{r}a}{ra_0} = \frac{\bar{r} + \bar{r} \cos w \,.\, e \cos (\chi - \varpi_0) + \bar{r} \sin \bar{w} \,.\, e \sin (\chi - \varpi_0)}{a_0 f^2},$$

et comme

$$\bar{r} = a_0 f_0^2 - e_0 \bar{r} \cos \bar{w},$$

il vient

$$\frac{\bar{r}a}{ra_0} = \frac{f_0^2 + \dfrac{\bar{r}}{a_0} \left\{ e \cos (\chi - \varpi) - e_0 \right\} \cos \bar{w} + \dfrac{\bar{r}}{a_0} e \sin (\chi - \varpi_0) \sin \bar{w}}{f^2}.$$

r et v étant des coordonnées idéales, on a, dans le mouvement troublé,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dw}{dt} = \frac{d\bar{w}}{dz} \frac{dz}{dt},$$

et comme

$$\frac{dw}{dt} = \frac{a^2 nf}{r^2}, \quad \frac{d\bar{w}}{dz} = \frac{a_0^2 n_0 f_0}{\bar{r}^2},$$

il en résulte

$$\frac{dz}{dt} = \frac{a_0 n_0 f}{a n f_0} \frac{\bar{r}^2}{r^2},$$

en sorte qu'en posant

$$\frac{\frac{a_0 n_0}{f_0}}{\frac{an}{f}} = \frac{h_0}{h},$$

il vient

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h} \frac{1}{(1+\nu)^2}. \tag{20}$$

On peut remarquer ici qu'en prenant $h_0 = \frac{a_0 n_0}{f_0}$, on a $h = \frac{an}{f}$.

Pour obtenir une autre expression de $\frac{dz}{dt}$, je remarque qu'on a

$$\frac{\nu}{1+\nu} = \frac{r - \bar{r}}{r}$$

et par suite

$$\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 = 1 - \frac{2\bar{r}}{r} + \frac{1}{(1+\nu)^2} = 1 - \frac{2\bar{r}}{r} + \frac{h}{h_0}\frac{dz}{dt},$$

d'où

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \left(-1 - \frac{h_0}{h} + \frac{2h_0}{h}\frac{\bar{r}}{r}\right) + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 \frac{h_0}{h}:$$

posant maintenant

$$W' = -1 - \frac{h_0}{h} + \frac{2h_0}{h}\frac{\bar{r}}{r}, \tag{21}$$

on a finalement

$$\frac{dz}{dt} = 1 + W' + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 \frac{h_0}{h}. \tag{22}$$

La fonction W', qui joue un rôle très important dans ce travail, peut s'écrire sous une autre forme. En effet,

$$\frac{h_0^2}{h^2} = \frac{af^2}{a_0 f_0^2},$$

par suite

$$\frac{2h_0}{h}\frac{\bar r}{r}=\frac{2h}{h_0}\frac{1}{f_0^2}\frac{\bar r}{a_0}(1+e\cos w),$$

et comme

$$\frac{\bar r}{a_0}=f_0^2-e_0\frac{\bar r}{a_0}\cos\bar w,$$

on a

$$\frac{2h_0}{h}\frac{\bar r}{r}=\frac{2h}{h_0}\left(1-\frac{e_0}{f_0^2}\frac{\bar r}{a_0}\cos\bar w+\frac{e}{f_0^2}\frac{\bar r}{a_0}\cos w\right).$$

De plus

$$\cos w=\cos\bar w\cos(\chi-\varpi_0)+\sin\bar w\sin(\chi-\varpi_0);$$

donc

$$\frac{2h_0}{h}\frac{\bar r}{r}=\frac{2h}{h_0}\left\{1+\left[\frac{e}{f_0^2}\cos(\chi-\varpi_0)-\frac{e_0}{f_0^2}\right]\frac{\bar r}{a_0}\cos\bar w+\frac{e}{f_0^2}\sin(\chi-\varpi_0)\cdot\frac{\bar r}{a_0}\sin\bar w\right\},$$

et enfin

$$(23)\quad\left\{\begin{aligned}W'=\frac{2h}{h_0}-\frac{h_0}{h}-1+\frac{2h}{h_0}\left\{\frac{e}{f_0^2}\cos(\chi-\varpi_0)-\frac{e_0}{f_0^2}\right\}\frac{\bar r}{a_0}\cos w\\+\frac{2h}{h_0}\frac{e}{f_0^2}\sin(\chi-\varpi_0)\cdot\frac{\bar r}{a_0}\sin\bar w;\end{aligned}\right.$$

comme

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos w}{af^2}=\frac{a_0f_0^2h_0^2}{h^2}(1+e\cos w),$$

on peut aussi écrire

$$(24)\qquad W'=\frac{2h\bar r}{a_0h_0f_0^2}+\frac{2h\bar r e\cos(\chi-\varpi_0-\bar w)}{a_0h_0f_0^2}-\frac{h_0}{h}-1.$$

En introduisant l'anomalie excentrique, il vient

$$\begin{aligned}W'=\frac{2h}{h_0}-\frac{h_0}{h}-1-\frac{3h}{h_0}e_0\left[\frac{e\cos(\chi-\varpi_0)-e_0}{f_0^2}\right]\\+\frac{2h}{h_0}\left[\frac{e\cos(\chi-\varpi_0)-e_0}{f_0^2}\right](\cos\varepsilon+\tfrac{1}{2}e_0)\\+\frac{2h}{h_0f_0}e\sin(\chi-\varpi_0)\sin\varepsilon.\end{aligned}$$

14.

Avant d'aller plus loin, je vais établir une proposition dont il sera fait usage dans la suite. Soit L une fonction des coordonnées de la planète et des éléments osculateurs, c'est-à-dire correspondants à l'époque t; dans cette fonction, j'appelle τ le temps qui n'est pas contenu dans ces éléments, et t celui qui y est renfermé, de manière qu'il soit possible de différentier par rapport à t ou à τ, suivant les cas. Ainsi L étant une fonction des coordonnées idéales, sa différentielle première a la même forme dans le mouvement troublé et dans le mouvement non troublé; de sorte qu'en désignant par Λ ce que devient L, lorsqu'on écrit τ au lieu de t en dehors des éléments osculateurs, on obtient

$$\frac{dL}{dt} = \overline{\frac{\partial \Lambda}{\partial \tau}},$$

le trait superposé indiquant qu'après la différentiation il faut changer τ en t.

Il résulte de là que dans le mouvement troublé on a rigoureusement

$$L = \text{const} + \int \overline{\frac{\partial \Lambda}{\partial \tau}}\, dt.$$

Afin d'apporter plus de clarté dans l'application de cette proposition, j'appelle $\rho, \eta, \omega, \zeta, \beta$, lorsque le temps ne varie pas dans les éléments osculateurs, les quantités précédemmennt désignées par $r, \varepsilon, w, z, \nu$. La dérivée première d'une coordonnée idéale ayant la même forme dans le mouvement troublé et dans le mouvement non troublé, on a

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = 1 + W + \frac{h_0}{h}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^2, \tag{25}$$

où

$$W = -1 - \frac{h_0}{h} + \frac{2h_0}{h}\frac{\bar{\rho}}{\rho}, \tag{26}$$

qu'on peut encore écrire

$$W = -1 - \frac{h_0}{h} + \frac{2h}{a_0 h_0 f_0^2}\,\bar{\rho}\,[1 + e\cos(\chi - \varpi_0 - \bar{\omega})]. \tag{27}$$

On a aussi

$$(28) \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = \frac{h_0}{h(1+\beta)^2}.$$

Appliquant la proposition précédente à l'équation (25), il vient

$$(29) \qquad n_0 z = n_0 t + c_0 + n_0 \int \left\{ W + \frac{h_0}{h} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \right\} dt,$$

où c_0, constante amenée par l'intégration, représente l'anomalie moyenne pour $t = 0$.

15.

Éliminant $\frac{h_0}{h}$ entre les équations (25) et (28), j'ai

$$(1-\beta^2) \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = 1 + W;$$

différentiant cette équation par rapport à τ, ainsi que l'équation (28), il en résulte les deux équations

$$(1-\beta^2) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau} - 2\beta \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = \frac{\partial W}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \frac{1}{1+\beta} \frac{2\partial \beta}{\partial \tau},$$

entre lesquelles j'élimine $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2}$, ce qui donne, réductions faites,

$$(30) \qquad \frac{\partial \beta}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \zeta}.$$

Comme $\frac{d\nu}{dt} = \frac{\partial \beta}{\partial \tau}$, on a $\nu = C + \int \frac{\partial \beta}{\partial \tau} dt$, ou enfin,

$$(31) \qquad \nu = C - \frac{1}{2} \int \frac{\partial W}{d\zeta} dt.$$

16.

Pour calculer les perturbations dépendant de la première puissance de la force perturbatrice, il faut remplacer ζ par τ et négliger les puissances de ν supérieures à la première dans les équations (29) et (31), ce qui donne

$$
(32) \qquad \left\{
\begin{aligned}
n_0 z &= n_0 t + c_0 + n_0 \int \overline{W}_0 \, dt, \\
\nu &= C - \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial W}{\partial \tau} \, dt,
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$
(33) \qquad W_0 = -1 - \frac{h_0}{h} + \frac{2h}{a_0 h_0 f_0^2} \rho \left[1 + e \cos(\chi - \varpi_0 - \omega)\right],
$$

expression dans laquelle ρ et ω sont des fonctions de τ déterminées par les équations

$$
(34) \qquad \left\{
\begin{aligned}
n_0 \tau + c_0 &= \eta - e_0 \sin \eta, \\
\rho \cos \omega &= a_0 (\cos \eta - e_0), \\
\rho \sin \omega &= a_0 f_0 \sin \eta, \\
\rho &= a_0 (1 - e_0 \cos \eta).
\end{aligned}
\right.
$$

En substituant les valeurs de ρ et de ω déduites de ces équations dans la relation (33), il vient

$$
(35) \qquad W_0 = \Xi + \Upsilon (\cos \eta + \tfrac{1}{2} e_0) + \Psi \sin \eta,
$$

en posant

$$
\begin{aligned}
\Xi &= \frac{2h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 - \frac{3he_0}{h_0} \left[\frac{e \cos(\chi - \varpi_0) - e_0}{f_0^2} \right], \\
\Upsilon &= \frac{2h}{h_0} \frac{e \cos(\chi - \varpi_0) - e_0}{f_0^2}, \\
\Psi &= \frac{2h}{h_0} \frac{f_0 e \sin(\chi - \varpi_0)}{f_0^2}.
\end{aligned}
$$

Quand on veut avoir égard au carré et aux puissances supérieures de la force perturbatrice, on ne peut plus changer ζ en τ, et on tient compte de la différence entre ces deux quantités de la manière suivante. Soit

$$
n_0 z = n_0 t + c_0 + n \delta z,
$$

où $n\delta z$ est une fonction de t et une quantité de l'ordre de la force perturbatrice. Soit de même

$$
n_0 \zeta = n_0 \tau + c_0 + n \delta \zeta,
$$

où $n\delta\zeta$ est une fonction de τ et de t, devenant $n\delta z$ par le changement de τ en t. Les développements suivants montrent, du reste, qu'on n'a pas besoin de connaître $n\delta\zeta$. Soit W une fonction de ζ qui se déduit de W_0 en donnant à τ l'accroissement $\delta\zeta$, il vient

$$W = W_0 + \frac{\partial W_0}{\partial \tau}\delta\zeta + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 W_0}{\partial \tau^2}\delta\zeta^2 + \cdots,$$

de même

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta} = \frac{\partial W_0}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial \tau^2}\delta\zeta + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 W_0}{\partial \tau^3}\delta\zeta^2 + \cdots.$$

Si donc on ne tient pas compte des puissances de la force perturbatrice supérieures à la seconde, les expressions (29) et (31) donnent

$$(36)\qquad \begin{cases} n_0 z = n_0 t + c_0 + n_0 \displaystyle\int \left[W_0 + \frac{\partial W_0}{\partial \tau}\delta z + \nu^2 \right] dt, \\ \nu = C - \tfrac{1}{2}\displaystyle\int \left[\frac{\partial W_0}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial \tau^2}\delta z \right] dt. \end{cases}$$

17.

La fonction W_0 peut prendre une autre forme. L'équation (33) montre que cette fonction dépend des trois quantités h, $he\cos\chi$, $he\sin\chi$, qui dépendent elles-mêmes des éléments osculateurs. Reprenant donc les équations auxiliaires

$$w = \overline{w} - \omega - (\chi - \varpi_0 - \omega), \quad 1 = \frac{r}{af^2} + \frac{re\cos w}{af^2}, \quad h = \frac{an}{f},$$

les équations

$$r\frac{dv}{dt} = h(1 + e\cos w), \quad \frac{dr}{dt} = he\sin w,$$

deviennent

$$r\frac{dv}{dt} - h = he\cos(\chi - \varpi_0 - \omega)\cos(\overline{w} - \omega) + he\sin(\chi - \varpi_0 - \omega)\sin(\overline{w} - \omega),$$

$$\frac{dr}{dt} = he\cos(\chi - \varpi_0 - \omega)\sin(\overline{w} - \omega) - he\sin(\chi - \varpi_0 - \omega)\cos(\overline{w} - \omega),$$

d'où l'on tire facilement

$$he\cos(\chi - \varpi_0 - \omega) = \left(r\frac{dv}{dt} - h\right)\cos(\overline{w} - \omega) + \frac{dr}{dt}\sin(\overline{w} - \omega);$$

substituant dans W_0, et remarquant en outre que

$$\frac{h_0}{\mu} = \frac{1}{h_0 a_0 f_0^2},$$

il vient

$$W_0 = \frac{2h_0}{\mu}\rho\cos(\overline{w} - \omega)\,.\,r\frac{dv}{dt} + \frac{2h_0}{\mu}\rho\sin(\overline{w} - \omega)\cdot\frac{dr}{dt}$$
$$- \frac{2h_0}{\mu}\rho\,[\cos(\overline{w} - \omega) - 1]\,h - \frac{h_0}{h} - 1.$$

Différentiant W_0 par rapport à t, en observant que r et v étant des coordonnées idéales, leurs dérivées seules seront modifiées par cette opération, on a

$$\frac{dW_0}{dt} = \frac{2h_0}{\mu}\rho\cos(\bar{w}-\omega).r\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{2h_0}{\mu}\rho\sin(\bar{w}-\omega).\frac{d^2r}{dt^2}$$

$$-\frac{2h_0}{\mu}\rho\left[\cos(\bar{w}-\omega)-1\right]\frac{dh}{dt} + \frac{h_0}{h}\frac{dh}{dt}:$$

de plus, l'équation (13)** donne

$$\frac{dh}{\mu dt} = -\frac{\frac{d^2v}{dt^2}}{\left(r\frac{dv}{dt}\right)^2} = -\frac{\frac{d^2v}{dt^2}}{\frac{\mu^2}{h^2r^2}},$$

ou bien

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{h^2r^2}{\mu}\frac{d^2v}{dt^2}.$$

J'ai fait remarquer, art. 5, que l'introduction de la force perturbatrice amène pour $\frac{d^2v}{dt^2}$ et $\frac{d^2r}{dt^2}$ des accroissements respectifs

$$\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}, \quad \mu\frac{\partial\Omega}{\partial r},$$

par lesquels je vais remplacer ces fonctions dans $\frac{dW_0}{dt}$ et $\frac{dh}{dt}$, ce qui donne

$$(37)\quad\begin{cases}\dfrac{dh}{dt} = -h^2\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{dW_0}{dt} = h_0\left[2\dfrac{\rho}{r}\cos(\bar{w}-\omega) - 1 + \dfrac{2h^2}{h_0^2a_0f_0^2}\rho\left\{\cos(\bar{w}-\omega)-1\right\}\right]\dfrac{\partial\Omega}{\partial v} \\[2ex] \qquad -2h_0\dfrac{\rho}{r}\sin(\bar{w}-\omega).r\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}.\end{cases}$$

En changeant τ en t dans la dernière équation de ce système, il vient

$$\frac{d\overline{W}_0}{dt} = h_0\frac{\partial\Omega}{\partial v};$$

d'un autre côté, la première peut s'écrire

$$(38)\qquad \frac{d\frac{h_0}{h}}{dt} = h_0\frac{\partial\Omega}{\partial v},$$

par suite

$$\frac{d\frac{h_0}{h}}{dt}=\frac{d\overline{W}_0}{dt}, \tag{39}$$

relation qui dispense de calculer $\frac{\partial\Omega}{\partial v}$.

W_0 s'obtient par une intégration; substituant le résultat obtenu, dans les équations (32), deux intégrations nouvelles donneront les perturbations du premier ordre de la longitude moyenne et du logarithme du rayon vecteur. La première, on le voit, dépend d'une intégrale double.

Reste à obtenir l'expression des perturbations de la latitude.

18.

Je pose pour abréger $u=\frac{r}{a_0}$, et observant que $v=\bar{w}+\varpi_0$, il vient

$$u=\frac{\bar{r}}{a_0}q\sin(\bar{w}+\varpi_0-\theta_0)-\frac{\bar{r}}{a_0}p\cos(\bar{w}+\varpi_0-\theta_0),$$

de sorte que, en désignant par R ce que devient u quand on y change t en τ, il vient

$$R=\frac{\bar{\rho}}{a_0}q\sin(\bar{\omega}+\varpi_0-\theta_0)-\frac{\bar{\rho}}{a_0}p\cos(\bar{\omega}+\varpi_0-\theta_0).$$

Pour introduire la force perturbatrice, il faut différentier cette expression par rapport à t, ce qui donne

$$\frac{dR}{dt}=\frac{\bar{\rho}}{a_0}\left\{\sin(\bar{\omega}+\varpi_0-\theta_0).\frac{dq}{dt}-\cos(\bar{\omega}+\varpi_0-\theta_0).\frac{dp}{dt}\right\}, \tag{40}$$

ou bien, en tenant compte des équations (19),

$$\frac{dR}{dt}=hr\frac{\bar{\rho}}{a_0}\sin(\bar{\omega}-\bar{w}).\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\cos i, \tag{41}$$

qu'on peut encore écrire, à l'aide des équations qui lient l'anomalie vraie et le rayon vecteur correspondant, à l'anomalie excentrique,

$$\frac{dR}{dt}=P\sin\bar{\eta}-Q(\cos\bar{\eta}-e_0). \tag{41*}$$

En intégrant l'équation (41), il vient

$$u = \overline{R},$$

le trait superposé indiquant ici qu'après l'intégration il faut changer τ en t. Mais u étant une coordonnée idéale, on a aussi, d'après la proposition de l'art. 14,

$$u = \int \frac{\partial \overline{R}}{\partial \tau} dt.$$

Lorsqu'on ne veut tenir compte que de la première puissance de la force perturbatrice, il faut introduire, dans l'équation (41), les valeurs elliptiques des fonctions qui y entrent et remplacer h par h_0, ce qui donne

$$\frac{dR_0}{dt} = h_0 r \frac{\rho}{a_0} \sin(\omega - w) \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \cos i. \tag{42}$$

On a alors

$$u_0 = \overline{R}_0, \tag{43}$$

et

$$u_0 = \int \frac{\partial \overline{R}_0}{\partial \tau} dt, \tag{44}$$

R_0 représentant ce que devient R lorsqu'on y remplace les éléments par leurs valeurs elliptiques.

Pour obtenir les perturbations du second ordre, on a

$$R = R_0 + \frac{\partial R_0}{\partial \tau} \delta\zeta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2} \delta\zeta^2 + \cdots,$$

ou, en négligeant les termes de l'ordre du cube de la force perturbatrice,

$$\overline{R} = \overline{R}_0 + \frac{\partial \overline{R}_0}{n \partial \tau} n\delta z,$$

et par suite

$$u = \overline{R}_0 + \frac{\partial \overline{R}_0}{n \partial \tau} n\delta z, \tag{45}$$

R_0 étant tiré de l'équation (42), qui n'a subi aucun changement.

De l'expression précédente de R, je tire

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = \frac{\partial R_0}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2} \delta\zeta + \frac{\partial R_0}{\partial \tau} \frac{d\delta\zeta}{d\tau},$$

et d'après la proposition de l'art. 14,

$$(46)\qquad u = \int \left\{ \frac{\overline{\partial R_0}}{\partial z} \left(1 + \frac{d\delta\zeta}{dt}\right) + \frac{\overline{\partial^2 R_0}}{n\partial z^2} n\delta z \right\} dt .$$

---

§ III.

De la fonction perturbatrice et de ses dérivées partielles.

19.

La fonction perturbatrice étant indépendante de l'origine des coordonnées, on peut prendre celle-ci arbitrairement. Dans ce travail, elle est fixée au nœud ascendant de l'orbite de la planète troublée sur l'orbite de la planète troublante, ce qui donne des expressions plus simples. Le plan XY étant celui de la première, soient $X'Y'$ celui de la seconde, I l'inclinaison mutuelle de ces deux plans, φ et φ' les angles des axes des X et des X' avec le nœud ascendant, il vient avec ces notations

$$\begin{aligned} X &= r\cos(v-\varphi), & x' &= r'\cos(v'-\varphi'),\\ Y &= r\sin(v-\varphi), & y' &= r'\cos I \sin(v'-\varphi'),\\ & & z' &= -r'\sin I \sin(v'-\varphi'), \end{aligned}$$

expressions qu'il faudra substituer dans

$$\Omega = \frac{m'}{\mu}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{Xx' + Yy' + Zz'}{r'^3}\right)$$

et ses dérivées, après y avoir fait $Z = 0$.

En désignant par ϖ_0, ϖ_0' les longitudes des périhélies comptées respectivement à partir des axes des X et des X' ; par Π_0, Π_0', les longitudes des mêmes points comptées à partir du nœud ascendant de l'orbite troublée sur l'orbite troublante, on a

$$\Pi = \varpi_0 - \varphi \qquad \Pi' = \varpi_0' - \varphi',$$

et comme

$$v = \overline{w} + \varpi_0, \qquad v' = \overline{w}' + \varpi_0',$$

il vient

$$\begin{aligned} X &= r\cos(\overline{w} + \Pi), & x' &= r'\cos(\overline{w}' + \Pi'),\\ Y &= r\sin(\overline{w} + \Pi), & y' &= r'\cos I \sin(\overline{w}' + \Pi'),\\ & & z' &= r'\sin I \sin(\overline{w}' + \Pi'), \end{aligned}$$

de sorte qu'en posant

$$H = \cos(\bar{w} + \Pi)\cos(\bar{w}' + \Pi') + \cos I \sin(\bar{w} + \Pi)\sin(\bar{w}' + \Pi'),$$

on obtient

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'H,$$

$$\Omega = \frac{m'}{\mu}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{rr'H}{r'^3}\right). \tag{47}$$

De plus, comme

$$\frac{\partial\Omega}{\partial v} = \frac{\partial\Omega}{\partial \bar{w}},$$

il vient

$$\frac{\partial\Omega}{\partial v} = -\frac{m'}{\mu}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr'H',$$

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{m'}{\mu}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr'H - \frac{m'}{\mu}\frac{r^2}{\Delta^3},$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial Z} = -\frac{m'}{\mu}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \sin I \sin(\bar{w}' + \Pi'),$$

où j'ai fait pour abréger

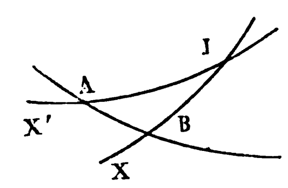
$$H' = \sin(\bar{w} + \Pi)\cos(\bar{w}' + \Pi') - \cos I \cos(\bar{w} + \Pi)\sin(\bar{w}' + \Pi').$$

Ce qui précède montre que les dérivées partielles de la fonction perturbatrice, contenues dans les formules de perturbations du § 2, sont exprimées en fonction de sept quantités, $r, r', \bar{w}, \bar{w}', I, \Pi, \Pi'$.

20.

Les variables I, Π, Π' ne sont pas données immédiatement, mais on peut les obtenir aisément. Soit, en effet,

$$\text{IB} = \Phi, \quad \text{IA} = \Phi', \quad \text{AX}' = \sigma', \quad \text{BX} = \sigma,$$



alors

$$\varphi = \Phi + \sigma, \quad \varphi' = \Phi' + \sigma',$$

par suite

$$\Pi = \varpi_0 - \sigma - \Phi\,, \quad \Pi' = \varpi_0' - \sigma' - \Phi'\,. \tag{48}$$

Le triangle des trois nœuds donne alors

$$\left\{\begin{aligned}
&\sin\frac{I}{2}\sin\tfrac{1}{2}(\Phi+\Phi') = \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\tfrac{1}{2}(i+i')\,,\\
&\sin\frac{I}{2}\cos\tfrac{1}{2}(\Phi+\Phi') = \cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\tfrac{1}{2}(i-i')\,,\\
&\cos\frac{I}{2}\sin\tfrac{1}{2}(\Phi'-\Phi) = \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\tfrac{1}{2}(i+i')\,,\\
&\cos\frac{I}{2}\cos\tfrac{1}{2}(\Phi'-\Phi) = \cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\tfrac{1}{2}(i-i')\,.
\end{aligned}\right. \tag{49}$$

Les éléments i', θ', σ' sont variables comme i, θ, σ, et par suite, $\Phi, \Phi', I, \Pi, \Pi'$ sont aussi variables; mais on peut les considérer comme invariables dans une première approximation, et on remplace alors, dans les équations précédentes, i, θ, i', θ' par leurs valeurs initiales i_0, $\theta_0 = \sigma_0$, i_0', $\theta_0' = \sigma_0'$. On obtient ainsi pour I, Φ, Φ' les valeurs I_0, Φ_0, Φ_0', d'où l'on tire

$$\Pi_0 = \varpi_0 - \theta_0 - \Phi_0\,, \quad \Pi_0' = \varpi_0' - \theta_0' - \Phi_0'\,, \tag{50}$$

valeurs que l'on substitue à I, Π, Π', dans les valeurs précédentes des dérivées de Ω. Il faudra ensuite, dans ces dérivées partielles, comme dans toutes les expressions précédentes, remplacer r et w par leurs valeurs en fonction de l'anomalie excentrique, à l'aide des équations

$$\begin{aligned}
n_0 t + c &= \varepsilon - e_0 \sin\varepsilon\,,\\
r\cos w &= a_0(\cos\varepsilon - e_0)\,,\\
r\sin w &= a_0 f_0 \sin\varepsilon\,,\\
r &= a_0(1 - e_0\cos\varepsilon)\,.
\end{aligned}$$

Dans cette première approximation, il faut aussi remplacer h et $\cos i$ par h_0 et $\cos i_0$; toutefois, il sera bon de laisser provisoirement, comme signe algébrique, $\cos i$ dans la valeur de u.

21.

Pour réunir les différentes dérivées de la fonction perturbatrice employées dans ce travail, je transcris celles de l'art. 19, en

supprimant le trait au-dessus des lettres qui en sont affectées; les autres se déduisent aisément des deux premières. Il vient ainsi

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r}=\frac{m'}{\mu}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)rr'H-\frac{m'}{\mu}\frac{r^2}{\Delta^3},$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial Z}=-\frac{m'}{\mu}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)r'\sin I\sin(w'+\Pi'),$$

$$r^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+r\frac{\partial\Omega}{\partial r}=\frac{m'}{\mu}\left[\frac{3}{\Delta^5}(r^2-rr'H)^2+\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)rr'H-2\frac{r^2}{\Delta^3}\right],$$

$$r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial Z}=\frac{m'}{\mu}\frac{1}{\Delta^5}(r^2-rr'H)\,r'\sin I\sin(w'+\Pi'),$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z^2}=\frac{m'}{\mu}\left(\frac{3}{\Delta^5}r'^2\sin^2 I\sin^2(w'+\Pi')-\frac{1}{\Delta^3}\right),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}=\frac{m'}{\mu}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)r\sin I\sin(w+\Pi),$$

$$r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial Z'}=-\frac{m'}{\mu}\frac{3}{\Delta^5}(r^2-rr'H)\,r\sin I\sin(w+\Pi)+\frac{\partial\Omega}{\partial Z'},$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z\partial Z'}=-\frac{m'}{\mu}\left[\frac{3}{\Delta^5}\sin I.rr'\sin(w+\Pi)\sin(w'+\Pi')-\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\cos I\right].$$

Les 5e, 6e et 8e équations de ce groupe servent de définitions aux premiers membres de ces équations; on verra plus tard dans quelles circonstances elles se présentent.

De l'expression de Δ^2 on tire

$$\frac{rr'H}{\Delta^3}=\frac{r^2+r'^2}{2\Delta^3}-\frac{1}{2\Delta},$$

$$\frac{r^2-rr'H}{\Delta^5}=-\frac{r'^2-r^2}{2\Delta^5}+\frac{1}{2\Delta^3},$$

d'où j'obtiens, par une simple substitution,

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r}=\frac{m'}{\mu}\left(\frac{r'^2-r^2}{2\Delta^3}-\frac{1}{2\Delta}-\frac{r}{r'^2}H\right),$$

$$r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial Z}=-\frac{3}{2}\frac{m'}{\mu}\left(\frac{r'^2-r^2}{\Delta^5}-\frac{1}{\Delta^3}\right)\sin I.r\sin(w+\Pi),$$

$$r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial Z}=\frac{3}{2}\frac{m'}{\mu}\left(\frac{r'^2-r^2}{\Delta^5}-\frac{1}{\Delta^3}\right)\sin I.r'\sin(w'+\Pi')+\frac{\partial\Omega}{\partial Z'};$$

cette dernière, en éliminant $\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}$, devient

$$r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial Z'}=\frac{3}{2}\frac{m'}{\mu}\left(\frac{r'^2-r^2}{\Delta^5}-\frac{1}{3\Delta^3}\right)\sin I.r\sin(w+\Pi)-\frac{m'}{\mu}\sin I.\frac{r}{r'^3}\sin(w+\Pi).$$

De Δ^2 on tire encore

$$\frac{(r^2-rr'H)^2}{\Delta^5}=\frac{(r'^2-r^2)^2}{4\Delta^5}-\frac{r'^2-r^2}{2\Delta^3}+\frac{1}{4\Delta},$$

ce qui donne immédiatement

$$r^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+r\frac{\partial\Omega}{\partial r}=\frac{m'}{\mu}\left[\frac{3(r'^2-r^2)}{4\Delta^5}-\frac{r'^2}{\Delta^3}+\frac{1}{4\Delta}\right]-\frac{m'}{\mu}\frac{r}{r'^2}H.$$

21.

Je fais maintenant

$$\mathbf{M}=\frac{m'}{\mu}\cdot 206265'',$$

$$\alpha=\frac{a'}{a},$$

et les expressions des articles précédents deviennent

$$a\Omega=\mathbf{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)-(H),$$

$$ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}=\tfrac{1}{2}\mathbf{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left[\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-r^2\right]-\tfrac{1}{2}\mathbf{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)-(H),$$

$$a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z}=-\mathbf{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\alpha\sin I.\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(w'+\Pi')+(I),$$

$$ar^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}=\tfrac{3}{4}\mathbf{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5\left[\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]-\mathbf{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2$$
$$+\tfrac{1}{4}\mathbf{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)-(H),$$

$$a^2r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial Z}=-\tfrac{3}{2}\mathbf{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5\left[\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\alpha\sin I.\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(w'+\Pi')$$
$$+\tfrac{1}{2}\mathbf{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\alpha\sin I.\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(w'+\Pi'),$$

$$a^3\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z^2}=3\mathbf{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5\alpha^2\sin^2 I.\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\sin^2(w'+\Pi')-\mathbf{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3,$$

$$aa'\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}=\mathbf{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\alpha\sin I.\left(\frac{r}{a}\right)\sin(w+\Pi)-(I)',$$

$$aa'r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial Z'}=\tfrac{3}{2}\mathbf{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5\left[\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\alpha\sin I.\left(\frac{r}{a}\right)\sin(w+\Pi)$$
$$-\tfrac{1}{2}\mathbf{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\alpha\sin I.\left(\frac{r}{a}\right)\sin(w+\Pi)-(I)',$$

$$a^2 a' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z \partial Z'} = -3\,\mathrm{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^5 \alpha^2 \sin^2 I.\left(\frac{r'}{a'}\right)\left(\frac{r}{a}\right) \sin(w' + \Pi') \sin(w + \Pi)$$
$$+ \mathrm{M}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 \alpha \cos I - (I)'',$$

avec

$$(H) = \frac{\mathrm{M}}{\alpha^2}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right) H,$$

$$(I) = \mathrm{M}\frac{\sin I}{\alpha^2}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \sin(w' + \Pi'),$$

$$(I)' = \mathrm{M}\frac{\sin I}{\alpha^2}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \frac{r}{a} \sin(w + \Pi),$$

$$(I)'' = \mathrm{M}\frac{\cos I}{\alpha^2}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3.$$

Ces formules, renfermant les rapports des quantités linéaires qui y entrent, au lieu de ces quantités elles-mêmes, sont mieux appropriées au calcul que les précédentes.

22.

Pour le développement de la fonction perturbatrice et de ses dérivées partielles contenues dans l'article précédent, je fais usage de la méthode de M. Liouville, combinée avec la méthode d'interpolation de M. Le Verrier, telle qu'elle a été modifiée par M. Hoüel. Pour l'exposition de cette méthode, je renvoie le lecteur à la thèse de M. Durrande sur ce sujet [1], et je conserve la notation de son travail en y remplaçant seulement T par ε et T' par g' : j'ai alors

$$\theta = j\varepsilon + j'g', \quad g' = j\sigma, \quad \varepsilon = \frac{\theta}{j} - j'\sigma.$$

En supposant que la fonction dont il s'agit, R, soit développée en série infinie, suivant les puissances de l'exponentielle $e^{\sigma i}$, on a, en se bornant aux $k+1$ premiers termes,

$$R = C_0 + C_1 e^{\sigma i} + C_2 e^{2\sigma i} + \cdots + C_k e^{k\sigma i}$$
$$+ C_{-1} e^{-\sigma i} + C_{-2} e^{-2\sigma i} + \cdots + C_{-k} e^{-k\sigma i}.$$

---

[1] *Détermination des coefficients des termes périodiques de la fonction perturbatrice*, 27 juillet 1864.

Donnant à σ les diverses valeurs

$$0,\quad \alpha,\quad 2\alpha,\quad 3\alpha,\ldots,\quad k\alpha,$$
$$-\alpha, -2\alpha, -3\alpha, \ldots, -k\alpha,$$

il en résultera pour R autant de valeurs correspondantes : je les désigne par

$$R_0, R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots, R_k$$
$$R_{-1}, R_{-2}, R_{-3}, \ldots, R_{-k},$$

ce qui fournit $2k+1$ équations du premier degré entre les $2k+1$ quantités C_0, C_1, C_{-1}, ... , C_k, C_{-k}. Mais, d'après la théorie, la constante C_0 est égale à la valeur de $\Theta = \Sigma A_j e^{j\theta i}$ correspondante à la valeur de θ qu'on vient d'employer concurremment avec les valeurs précédentes de σ; on a donc

$$\Sigma A_j e^{j\theta i} = C_0\,.$$

On obtiendra d'autres valeurs de $\Sigma A_j e^{j\theta i}$, en calculant les valeurs de R correspondantes à celles de ε et de θ satisfaisant à l'équation $\varepsilon = \frac{\theta}{j} - j'\sigma$, σ prenant les mêmes valeurs que précédemment. De cette façon, on aura autant de systèmes d'équations du premier degré que de systèmes de valeurs simultanées de $\sigma, \theta, \varepsilon$; à chacun d'eux correspond une quantité $(C_0)_h$ qui est la constante du développement et qui est une des valeurs de $\Sigma A_j e^{j\theta i}$. Ayant ainsi $2j+1$ valeurs de $\Sigma A_j e^{j\theta i}$, on en conclut celles des coefficients A_j.

Pour déterminer les termes de R ayant un argument d'une autre forme, tels que $B_h e^{(\lambda + h\theta)i}$, dans lequel $\lambda = n\varepsilon + n'g'$, avec la condition $n + n' \leqq \frac{1}{2}(j+j')$, la théorie montre qu'on a

$$\Sigma B_h e^{h\theta i} = e^{-\frac{n\theta}{j} i}\, C_{n'j-nj'}\,.$$

On obtiendra ainsi, à l'aide de coefficients déjà calculés, et pour chaque valeur de θ, des valeurs particulières de la somme $\Sigma B_h e^{h\theta i}$. On en conclura, par la méthode de M. Hoüel, comme précédemment pour les A_j, les valeurs des B_h.

23.

Pour trouver plus commodément les valeurs numériques de R, j'emploie les notations de M. Hoüel [1], en désignant les distances des périhélies au nœud ascendant de l'orbite de m sur l'orbite de m', par Π et Π', et j'ai

$$\mu\cos\omega + \nu\cos\Omega = M, \quad \mu\sin\omega + \nu\sin\Omega = N,$$
$$\mu\cos\omega - \nu\cos\Omega = M', \quad \mu\sin\omega - \nu\sin\Omega = N',$$
$$\Pi' - \Pi = \omega, \quad \Pi' + \Pi = \Omega,$$
$$\cos^2\frac{I}{2} = \mu, \quad \sin^2\frac{I}{2} = \nu;$$

par suite,

$$H = \mu\cos(w' - w + \omega) + \nu\cos(w' + w + \Omega).$$

Posant encore

$$X = a'r(M\cos w + N'\sin w) = -Maa'e + Maa'\cos\varepsilon + N'aa'f\sin\varepsilon,$$
$$Y = a'f'r(M\sin w - N\cos w) = Naa'ef' - Naa'f'\cos\varepsilon + M'aa'ff'\sin\varepsilon,$$

il vient

$$rr'H = -Xe' + X\cos\varepsilon' + Y\sin\varepsilon',$$
$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'H.$$

Cela posé, pour une valeur donnée de g', on calcule ε', puis $\frac{a'}{r'}$: pour la valeur correspondante de ε, on calcule aussi $\frac{a}{r}$; on conclut de là r', r, et par suite H et Δ^2. Les expressions $\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\sin w'$, $\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\cos w'$, $\left(\frac{a'}{r'}\right)^2$, $\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\sin w'$, $\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos w'$, qui entrent dans (H), (I), $(I)'$, $(I)''$, se développent en séries de sinus ou cosinus des multiples de g', ordonnées suivant les puissances de e' [2]. On obtient alors ces quantités immédiatement sous la forme voulue par une multiplication de deux séries.

---

[1] *Mémoire sur le développement des fonctions en séries périodiques au moyen de l'interpolation*, p. 54.

[2] Cayley, *Memoirs of the R. Astron. Society of London*, t. XXIX.

24.

Par les procédés succinctement rappelés dans les deux articles précédents, on trouve pour $a\Omega$ une expression de la forme

$$a\Omega = \Sigma A_{jj'}\, e^{(jg-j'g')i} + \Sigma (A)_{jj'}\, e^{-(jg-j'g')i}, \tag{51}$$

dans laquelle j et j' peuvent prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, et où A et (A) sont deux quantités imaginaires conjuguées, de sorte qu'on a

$$A = A' - iA'', \qquad (A) = A' + iA''.$$

Dans la suite de ce travail, comme ici, je désignerai toujours une quantité complexe par une lettre et sa conjuguée par la même lettre entre parenthèses; cette lettre servira aussi à représenter la partie réelle ou le coefficient de $i = \sqrt{-1}$, suivant qu'elle aura un ou deux accents. De plus, toutes les fois qu'il n'en pourra résulter d'ambiguïté, je supprimerai les indices et le signe Σ; il sera toujours facile de les rétablir au besoin. Lorsqu'il existera entre des quantités complexes une relation ayant aussi lieu entre leurs conjuguées, j'écrirai seulement celle dont l'écriture sera la plus simple.

On peut toujours se dispenser d'écrire les termes renfermant les puissances négatives de l'exponentielle imaginaire, quand on conserve les autres; en sorte qu'on aura simplement

$$a\Omega = A\, e^{(jg-j'g')i}. \tag{52}$$

Toutes les quantités de l'art. 21 se développent sous cette forme.

25.

Le second membre de l'équation (52) est susceptible de prendre une autre forme. En effet, on a

$$g' = n't + c', \qquad g = nt + c = \varepsilon - e\sin\varepsilon,$$

d'où

$$g' = N\varepsilon - Ne\sin\varepsilon + c' - cN,$$

en posant

$$N = \frac{n'}{n}.$$

D'après cela, il vient

$$j\varepsilon - j'g' = (j - j'N)\varepsilon + j'Ne\sin\varepsilon - j'(c' - cN),$$

et, si l'on pose, pour un instant,

$$j - j'N = \omega, \quad j'Ne = 2\beta, \quad c' - cN = \gamma,$$
$$e^{\varepsilon i} = y, \quad \text{d'où} \quad 2i\sin\varepsilon = y - y^{-1},$$

on a

$$e^{(j\varepsilon - j'g')i} = y^{\omega} \cdot e^{\beta(y - y^{-1})} \cdot e^{-j'\gamma i}.$$

Mais

$$e^{\beta(y-y^{-1})} = I_0^{\beta} + I_1^{\beta} y + I_2^{\beta} y^2 + \cdots + I_n^{\beta} y^n + \cdots$$
$$- I_1^{\beta} y^{-1} + I_2^{\beta} y^{-2} - \cdots \pm I_n^{\beta} y^{-n} \mp \cdots,$$

où

$$I_n^{\beta} = \frac{\beta^n}{n!}\left(1 - \frac{\beta^2}{n+1} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{\beta^4}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{\beta^6}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right),$$

$$I_0^{\beta} = 1 - \frac{\beta^2}{1!} + \left(\frac{\beta^2}{2!}\right)^2 - \left(\frac{\beta^2}{3!}\right)^3 + \cdots,$$

expressions dans lesquelles j'écris, pour abréger, $1.2.3....k = k!$. De ce qui précède on conclut aisément

$$(53)\left\{\begin{aligned} e^{(j\varepsilon - j'g')i} = I_0^{\beta} e^{(\omega\varepsilon - j'\gamma)i} + I_1^{\beta} e^{[(\omega+1)\varepsilon - j'\gamma]i} + \cdots + I_n^{\beta} e^{[(\omega+n)\varepsilon - j'\gamma]i} + \cdots \\ - I_1^{\beta} e^{[(\omega-1)\varepsilon - j'\gamma]i} + \cdots \pm I_n^{\beta} e^{[(\omega-n)\varepsilon - j'\gamma]i} \mp \cdots. \end{aligned}\right.$$

En multipliant chaque terme du second membre de l'équation (52) par la puissance de e correspondante et donnée par la relation précédente, on obtient le développement de $a\Omega$ en fonction de l'anomalie excentrique de la planète troublée.

En posant

$$(j - j'N)\varepsilon - j'\gamma + k\varepsilon = (j_1 - j'N)\varepsilon - j'\gamma - k\varepsilon,$$

d'où l'on tire

$$j - j_1 + 2k = 0, \quad \text{ou} \quad j_1 - j = 2k,$$

on obtient la condition pour que deux termes de ce développement aient même argument. L'un d'eux appartient évidemment à la série de ceux qui dérivent de la ligne supérieure de la relation (53), et l'autre à la série de ceux qui dérivent de la ligne inférieure; en les réduisant en un seul, il vient

$$(A_{j,j'} \pm A_{j+2k,j'})\, I_k^{\beta}\, e^{[(\omega+k)\varepsilon - j'\gamma]i},$$

expression dans laquelle on prend + lorsque k est pair et — lorsque k est impair. Il faut remarquer que pour $k = 0$, on a simplement

$$A_{j,j'} I_0^e \, e^{(\omega\epsilon - j'\gamma)i} .$$

Ainsi donc, en désignant par $A_{j,j'}$ des quantités qui se déduisent, comme on vient de le voir, des $A_{j,j'}$ donnés par le développement numérique de la fonction perturbatrice, on a

$$a\Omega = A_{j,j'} \, e^{[(j-j'N)\epsilon - j'(c'-cN)]i} .$$

26.

Pour obtenir la dérivée partielle de cette fonction par rapport à ϵ, on ne peut pas la différentier directement. Toutefois, cette dérivée s'exprime simplement à l'aide des coefficients du développement précédent. Soient, en effet, les deux formes de développement

$$F = K_j \, e^{[(j-j'N)\epsilon - U]i}, \tag{54}$$

$$F = H_j \, e^{(j\epsilon - j'g')i}, \tag{55}$$

où, pour abréger, j'ai fait $j'(c'-cN) = U$ et supprimé le signe $\Sigma\Sigma$. En différentiant la seconde par rapport à ϵ, j'ai

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon} = j i H_j \, e^{(j\epsilon - j'g')i}; \tag{56}$$

mais

$$K_j \, e^{[(j-j'N)\epsilon - U]i} = H_j \, e^{(j\epsilon - j'g')i},$$

d'où, en différentiant par rapport à ϵ,

$$(j-j'N) K_j \, e^{[(j-j'N)\epsilon - U]i} \, d\epsilon = H_j \, e^{(j\epsilon - j'g')i} (j\,d\epsilon - j'\,dg'),$$

ou, à cause de

$$dg' = N[1 - \tfrac{1}{2} e (e^{\epsilon i} + e^{-\epsilon i})] \, d\epsilon,$$

$$(j-j'N) K_j \, e^{[(j-j'N)\epsilon - U]i} = \{ j - j'N [1 - \tfrac{1}{2} e (e^{\epsilon i} + e^{-\epsilon i})] \} H_j \, e^{(j\epsilon - j'g')i},$$

qu'on peut écrire

$$j H_j \, e^{(j\epsilon - j'g')i} = \left[j K_j - j'N . \frac{e}{2} (K_{j-1} + K_{j+1}) \right] e^{[(j-j'N)\epsilon - U]i} .$$

Substituant dans l'équation (56), on a

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon} = i \left[j K_j - j'N \frac{e}{2} (K_{j-1} + K_{j+1}) \right] e^{[(j-j'N)\epsilon - U]i},$$

relation qui permettra de calculer avec facilité $\frac{\partial F}{\partial \epsilon}$ à l'aide des coefficients de F développée sous la forme (54).

La dérivée partielle par rapport à g', ou, ce qui revient au même, par rapport à c', s'obtient par la différentiation directe de l'équation (54), ce qui donne

$$\frac{\partial F}{\partial g'} = -j' i F.$$

---

§ IV.

Développement des fonctions W_0 et R_0 suivant les puissances de $e^{\varepsilon i}$.

27.

On trouve que

$$a \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} = A e^{\varphi i},$$

où je pose $\varphi = (j - j'N)\varepsilon - U$. On a de même

$$ar \frac{\partial \Omega}{\partial r} = B e^{\varphi i},$$

et comme

$$A'_{j,j'} = A'_{-j,-j'}, \qquad B'_{j,j'} = B'_{-j,-j'}, \qquad A'_0 = 0,$$
$$A''_{j,j'} = -A''_{-j,-j'}, \quad B''_{j,j'} = -B''_{-j,-j'}, \quad A''_0 = 0, \quad B''_0 = 0,$$

il en résulte

$$A_{-j,-j'} = (A)_{j,j'}, \qquad B_{-j,-j'} = (B)_{j,j'}.$$

28.

Comme la fonction perturbatrice est développée par rapport à l'anomalie excentrique ε_0, qui résulte du temps et des éléments constants, il faut éliminer dt des expressions de $\frac{dW_0}{dt}$ et de $\frac{dR_0}{dt}$, art. 17 et 18. Pour cela, de la relation

$$n_0 t + c_0 = \varepsilon_0 - e_0 \sin \varepsilon_0,$$

je tire

$$n_0 dt = (1 - e_0 \cos \varepsilon_0) d\varepsilon_0 = \frac{r_0}{a_0} d\varepsilon_0,$$

r_0 étant le rayon vecteur correspondant à l'anomalie excentrique ε_0; posant maintenant, pour abréger,

$$T = \frac{dW_0}{d\varepsilon_0}, \quad U = \frac{dR_0}{d\varepsilon_0},$$

il vient

$$(57) \begin{cases} T = \dfrac{h_0 r_0}{a_0 n_0}\left\{2\dfrac{\rho}{r}\cos(\bar{w}-\omega) - 1 + \dfrac{2h^2\rho}{a_0 h_0^2 f_0^2}[\cos(\bar{w}-\omega)-1]\right\}\dfrac{\partial\Omega}{\partial w} \\ \qquad + \dfrac{2h_0 r_0}{a_0 n_0}\dfrac{\rho}{r}\sin(\bar{w}-\omega).r\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}, \\ U = \dfrac{h r_0 r}{a_0^2 n_0}\sin(\omega-\bar{w})\cdot\dfrac{\partial\Omega}{\partial Z}\cos i. \end{cases}$$

Si l'on veut s'en tenir à la première approximation, les signes distinctifs deviennent inutiles, puisque partout il faut entendre par éléments les constantes $a_0, e_0, \ldots$, et par coordonnées, celles du mouvement elliptique. On a dans ce cas

$$(58) \begin{cases} T = \dfrac{1}{f}\left\{2\rho\cos(w-\omega) - r + \dfrac{2\rho r}{af^2}[\cos(w-\omega)-1]\right\}\dfrac{\partial\Omega}{\partial Z} \\ \qquad + \dfrac{2}{f}\rho\sin(w-\omega).r\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}, \end{cases}$$

$$(59) \qquad U = \frac{r^2\rho}{af}\sin(\omega-w)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\cos i.$$

Pour éliminer $\dfrac{\partial\Omega}{\partial w}$ de la valeur de T, je remarque que

$$\frac{\partial w}{\partial\varepsilon} = \frac{af}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial\varepsilon} = \frac{er\sin w}{f};$$

par suite

$$(60) \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} = \frac{af}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial w} + \frac{er\sin w}{f}\frac{\partial\Omega}{\partial r},$$

ce qui donne

$$(60)^* \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial w} = \frac{r}{af}\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} - \frac{er\sin w}{f}r\frac{\partial\Omega}{\partial r}.$$

Substituant dans l'expression (58), et posant

$$(60)^{**} \begin{cases} M = \dfrac{1}{a^2 f^2}\left\{2\rho r\cos(w-\omega) - r^2 + \dfrac{2r^2\rho}{af^2}[\cos(w-\omega)-1]\right\}, \\ N = \dfrac{1}{af}\left\{2\rho\sin(w-\omega) - \left[2\rho\cos(w-\omega) - r + \dfrac{2\rho r}{af^2}(\cos(w-\omega)-1)\right]\dfrac{er\sin w}{af^2}\right\}, \end{cases}$$

il vient

$$T = Ma\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} + Nar\frac{\partial \Omega}{\partial r}, \tag{61}$$

équation à laquelle il faut joindre les deux systèmes

$$\left\{\begin{array}{l} r\cos w = a(\cos\varepsilon - e), \\ r\sin w = af\sin\varepsilon, \\ \quad r = a(1 - e\cos\varepsilon), \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \rho\cos\omega = a(\cos\eta - e), \\ \rho\sin\omega = af\sin\eta, \\ \quad \rho = a(1 - e\cos\eta), \end{array}\right. \tag{62}$$

qui permettent d'exprimer M et N en fonctions finies de l'anomalie excentrique. Cela se voit immédiatement pour M; je vais démontrer que N jouit de la même propriété. En effet, à cause des relations

$$\rho = af^2 - \rho e\cos\omega, \quad 1 = \frac{r}{af^2} + \frac{er\cos w}{af^2},$$

on a successivement

$$afN = 2\rho\sin(w-\omega)\left(\frac{r}{af^2} + \frac{er\cos w}{af^2}\right) - 2\rho r\frac{e}{af^2}\sin w\cos(w-\omega)$$
$$- 2\rho r\frac{e}{af^2}\frac{r}{af^2}\sin w\cos(w-\omega) + \frac{2r^2e}{af^2}\sin w\left(1 - \frac{\rho e\cos\omega}{af^2}\right) + \frac{e}{af^2}r^2\sin w,$$

$$a^2f^3N = 2\rho r\sin(w-\omega)\left[1 - \frac{re}{af^2}(e+\cos w)\right] - 4\rho re\sin\omega + 3r^2e\sin w,$$

$$N = \frac{1}{a^2f^3}\left[\frac{2\rho r^2}{a}\sin(w-\omega) - 4\rho re\sin\omega + 3r^2e\sin w\right],$$

forme sous laquelle on voit immédiatement que N est une fonction finie de l'anomalie excentrique.

Éliminant w et ω des quantités M et N, à l'aide des équations (62), il vient

$$\left\{\begin{array}{l} M = \frac{1}{f^2}\Big[-3(1 - \frac{1}{2}e^2) + 2\cos\varepsilon - \frac{1}{2}e^2\cos 2\varepsilon + e^2\cos(\eta+\varepsilon) - 3e\cos\eta \\ \qquad\qquad + (4 - e^2)\cos(\eta - \varepsilon) - e\cos(\eta - 2\varepsilon)\Big], \\ N = \frac{1}{f^2}\Big[e\sin\varepsilon - \frac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon + e^2\sin(\eta+\varepsilon) - e\sin\eta - (2 - e^2)\sin(\eta - \varepsilon) \\ \qquad\qquad + e\sin(\eta - 2\varepsilon)\Big]. \end{array}\right. \tag{63}$$

On a aussi, pour la première approximation,

$$U = \frac{r^2\rho}{af}\sin(\omega - w).\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\cos i,$$

expression qui, en éliminant ω et w par les relations (62), devient

$$U = Qa^2\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\cos i, \tag{64}$$

où

$$(65)\quad \left\{ \begin{aligned} Q &= e\sin\epsilon - \tfrac{1}{2}e^2\sin 2\epsilon + \tfrac{1}{2}e^2\sin(\eta+\epsilon) - \tfrac{3}{2}e\sin\eta \\ &\quad + (1+\tfrac{1}{2}e^2)\sin(\eta-\epsilon) - \tfrac{1}{2}e\sin(\eta-2\epsilon)\,. \end{aligned} \right.$$

Les seconds membres des équations (61) et (64), se développant en série suivant les puissances de $e^{\epsilon i}$, il suffira d'une simple intégration pour donner W_0 et R_0, desquelles dépendent les perturbations de la longitude moyenne, du logarithme du rayon vecteur et de la coordonnée perpendiculaire au plan fondamental.

29.

En multipliant M et N par les expressions de l'art. 27, et faisant pour abréger

$$\varphi = (j - j'N)\epsilon - j'(c' - cN)\,,$$

il vient

$$\begin{aligned} f^2Ma\frac{\partial\Omega}{\partial\epsilon} &= \left(-\frac{6-3e^2}{2}A_j + eA_{j-1} - \tfrac{1}{4}e^2A_{j-2} + eA_{j+1} - \tfrac{1}{4}e^2A_{j+2}\right)e^{\varphi i} \\ &+ \left(\tfrac{1}{2}e^2A_{j+1} - \tfrac{3}{2}eA_j + \frac{4-e^2}{2}A_{j-1} - \tfrac{1}{2}eA_{j-2}\right)e^{(\varphi-\eta)i} \\ &+ \left(\tfrac{1}{2}e^2A_{j-1} - \tfrac{3}{2}A_j + \frac{4-e^2}{2}A_{j+1} - \tfrac{1}{2}eA_{j+2}\right)e^{(\varphi+\eta)i}\,, \\ f^2Nar\frac{\partial\Omega}{\partial r} &= i\left(-\tfrac{1}{2}eB_{j-1} + \tfrac{1}{4}e^2B_{j-2} + \tfrac{1}{2}eB_{j+1} - \tfrac{1}{4}e^2B_{j+2}\right)e^{\varphi i} \\ &+ i\left(\tfrac{1}{2}e^2B_{j+1} - \tfrac{1}{2}eB_j - \frac{2-e^2}{2}B_{j-1} + \tfrac{1}{2}eB_{j-2}\right)e^{(\varphi-\eta)i} \\ &+ i\left(-\tfrac{1}{2}e^2B_{j-1} + \tfrac{1}{2}eB_j - \frac{2-e^2}{2}B_{j+1} - \tfrac{1}{2}eB_{j+2}\right)e^{(\varphi+\eta)i}\,, \end{aligned}$$

en sorte que si l'on pose

$$(66)\quad \left\{ \begin{aligned} f^2(F)_j &= -\frac{6-3e^2}{2}A_j + eA_{j-1} - \tfrac{1}{4}e^2A_{j-2} + eA_{j+1} - \tfrac{1}{4}e^2A_{j+2} \\ &\quad + i\left(-\tfrac{1}{2}eB_{j-1} + \tfrac{1}{4}e^2B_{j-2} + \tfrac{1}{2}eB_{j+1} - \tfrac{1}{4}e^2B_{j+2}\right)\,, \\ f^2(G)_j &= \tfrac{1}{2}e^2A_{j+1} - \tfrac{3}{2}eA_j + \frac{4-e^2}{2}A_{j-1} - \tfrac{1}{2}eA_{j-2} \\ &\quad + i\left(\tfrac{1}{2}e^2B_{j+1} - \tfrac{1}{2}eB_j - \frac{2-e^2}{2}B_{j-1} + \tfrac{1}{2}eB_{j-2}\right), \\ f^2(H) &= \tfrac{1}{2}e^2A_{j-1} - \tfrac{3}{2}eA_j + \frac{4-e^2}{2}A_{j+1} - \tfrac{1}{2}eA_{j+2} \\ &\quad + i\left(-\tfrac{1}{2}e^2B_{j-1} + \tfrac{1}{2}eB_j + \frac{2-e^2}{2}B_{j+1} - \tfrac{1}{2}eB_{j+2}\right), \end{aligned} \right.$$

il en résulte, en supprimant l'indice zéro, ce qui peut maintenant se faire sans qu'il en résulte de confusion,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (F)e^{\varphi t} + (G)e^{(\varphi-\eta)t} + (H)e^{(\varphi+\eta)t}. \tag{67}$$

Des relations de l'art. 27 entre les coefficients, on conclut

$$\begin{cases} F_{-j,-j'} = (F)_{j,j'}, \\ G_{-j,-j'} = (H)_{j,j'}, \end{cases} \tag{68}$$

équations complexes qui donnent les suivantes entre quantités réelles,

$$\begin{cases} F'_{-j,-j'} = F'_{j,j'}, \qquad G'_{-j,-j'} = H'_{j,j'}, \\ F''_{-j,-j'} = -F''_{j,j'}, \qquad G''_{-j,-j'} = -H''_{j,j'}, \end{cases} \tag{68*}$$

Dans le cas particulier où $j = j' = 0$, ces équations deviennent

$$F''_{0,0} = 0, \qquad G''_{0,0} = -H''_{0,0}, \qquad G'_{0,0} = H'_{0,0}, \tag{69}$$

$$F'_{0,0} = -G'_{1,0} = eH'_{0,0}. \tag{70}$$

Des relations (66), on conclut aisément

$$F_j + \tfrac{1}{2}(G_{j+1} + H_{j-1}) + A_j = 0. \tag{71}$$

30.

J'intègre l'équation (67), et, négligeant ici comme plus bas la constante d'intégration dont il sera tenu compte dans un autre paragraphe, il vient

$$W = -\frac{i}{\omega}e^{-\varphi t}\left[(F) + (G)e^{-\eta t} + (H)e^{\eta t}\right],$$

et par suite

$$\overline{W} = -i\left[\frac{(F)_j}{\omega} + \frac{(G)_{j+1}}{\omega+1} + \frac{(H)_{j-1}}{\omega-1}\right]e^{\varphi t}.$$

L'équation (29) donne

$$n(z-t) = c_0 + n\int \overline{W}\,dt.$$

d'où l'on tire

$$nd\delta z = n\overline{W}dt,$$

ou bien

$$nd\delta z = -i(P)_j ndt,$$

en posant

$$P_j = \frac{F_j}{\omega} + \frac{G_{j+1}}{\omega + 1} + \frac{H_{j-1}}{\omega - 1}.$$

Or

$$ndt = (1 - e\cos\epsilon)\,d\epsilon,$$

donc

$$nd\delta z = -\,i\left[(P)_j - \tfrac{1}{2}e(P)_{j-1} - \tfrac{1}{2}e(P)_{j+1}\right] e^{\varphi i} d\epsilon.$$

En intégrant, on a

(72) $$n\delta z = -\,(R)_j\, e^{\varphi i},$$

où l'on a fait

$$R_j = \frac{1}{\omega}\left(P_j - \tfrac{1}{2}eP_{j-1} - \tfrac{1}{2}eP_{j+1}\right).$$

L'équation (31) donne à son tour

$$\frac{d\nu}{d\epsilon} = -\tfrac{1}{2}\frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta};$$

mais

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = \frac{1}{\omega}\left[-(G)\, e^{(\varphi-\eta)i} + (H)\, e^{(\varphi+\eta)i}\right],$$

d'où

$$\frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta} = \left[-\frac{(G)_{j+1}}{\omega + 1} + \frac{(H)_{j-1}}{\omega - 1}\right] e^{\varphi i};$$

si donc on pose

$$Q_j = \frac{(G)_{j+1}}{\omega + 1} - \frac{(H)_{j-1}}{\omega - 1},$$

il vient

$$2d\nu = Q_j\, e^{\varphi i} d\epsilon,$$

et, en intégrant,

(73) $$2\nu = -\,iS_j\, e^{\varphi i},$$

où l'on a fait

$$S_j = \frac{1}{\omega} Q_j.$$

31.

On peut contrôler les calculs numériques auxquels conduisent ces formules. En effet, la première des équations (37) peut s'écrire

$$\frac{d\frac{h_0}{h}}{dt} = -\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 h_0 \frac{\partial \Omega}{\partial w};$$

de plus

$$\frac{h}{h_0} - 1 = \frac{h - h_0}{h} = \delta \frac{h}{h_0},$$

et par suite, en se bornant à la première approximation,

$$\frac{d\frac{h}{h_0}}{dt} = -\frac{an}{f} \frac{\partial \Omega}{\partial v},$$

où l'on a supprimé l'indice 0 des éléments, comme dans ce qui précède. Éliminant dt, il vient

$$d\frac{h}{h_0} = -\frac{r}{f} \frac{\partial \Omega}{\partial v} d\varepsilon;$$

mais $\overline{T} = \frac{r}{f} \frac{\partial \Omega}{\partial v}$, donc enfin

$$d\frac{h}{h_0} = d\left(1 + \delta \frac{h}{h_0}\right) = d\delta \frac{h}{h_0} = -\overline{T} d\varepsilon;$$

comme

$$\overline{T} = [(F)_j + (G)_{j-1} + (H)_{j-1}] e^{\varphi i},$$

il vient finalement

$$\delta \frac{h}{h_0} = \frac{1}{\omega} i [(F)_j + (G)_{j+1} + (H)_{j-1}] e^{\varphi i}.$$

D'un autre côté, l'équation (20) donne

$$\frac{h_0}{h} = (1 + \nu)^2 \frac{dz}{dt},$$

ou bien, puisque $\frac{dz}{dt} = 1 + \frac{d\delta z}{dt}$,

$$\frac{h_0}{h} = \left(1 + \delta \frac{h}{h_0}\right)^{-},$$

et, en se bornant à la première approximation,

$$\frac{h_0}{h} = 1 - \delta \frac{h}{h_0}:$$

on aura donc

$$1 - \delta \frac{h}{h_0} = (1 + \nu)^2 \left(1 + \frac{d\delta z}{dt}\right),$$

ou, en négligeant les termes du second ordre,

$$\delta \frac{h}{h_0} = -\frac{d\delta z}{dt} - 2\nu. \tag{74}$$

En tenant compte des résultats de l'article précédent, on a

$$\delta \frac{h}{h_0} = i\,(\Pi)_j\, e^{\varphi\varepsilon},$$

en posant

$$\Pi_j = S_j + P_j\,.$$

L'un de ces deux procédés de calcul servira de vérification à l'autre.

32.

Le calcul des perturbations de la latitude, produites par la première puissance de la force perturbatrice, dépend de l'équation

$$\frac{1}{\cos i}\frac{dR}{d\varepsilon} = Q a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z},$$

dans laquelle

$$a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z} = D_{j,j'}\, e^{\varphi\varepsilon}\,.$$

La quantité complexe $D_{j,j'}$ est telle que

$$D_{-j,-j'} = (D)_{j,j'}\,, \quad D'_{0,0} = 0\,.$$

Multipliant la valeur de Q, (65), par le développement de $a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z}$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos i}\frac{dR}{d\varepsilon} &= i\left[-\tfrac{1}{2}e(D_{j-1}-D_{j+1}) + \tfrac{1}{4}e^2(D_{j-2}-D_{j+2})\right] e^{\varphi\varepsilon}\\ &+ i\left[\tfrac{3}{4}eD_j - \tfrac{1}{4}e^2 D_{j-1} - \tfrac{1}{4}(2+e^2)\,D_{j+1} + \tfrac{1}{4}eD_{j+2}\right] e^{(\varphi+\eta)\varepsilon}\\ &+ i\left[-\tfrac{3}{4}eD_j + \tfrac{1}{4}e^2 D_{j+1} + \tfrac{1}{4}(2+e^2)D_{j-1} - \tfrac{1}{4}eD_{j-2}\right] e^{(\varphi-\eta)\varepsilon}\,;\end{aligned}$$

posant, ensuite pour abréger,

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned} T_j &= -\tfrac{1}{2}e\,(D_{j-1}-D_{j+1}) + \tfrac{1}{4}e^2\,(D_{j-2}-D_{j+2})\,,\\ U_j &= -\tfrac{3}{4}eD_j + \tfrac{1}{4}e^2 D_{j+1} + \tfrac{1}{4}(2+e^2)\,D_{j-1} - \tfrac{1}{4}eD_{j-2}\,,\\ V_j &= \tfrac{3}{4}eD_j - \tfrac{1}{4}e^2 D_{j-1} - \tfrac{1}{4}(2+e^2)\,D_{j+1} + \tfrac{1}{4}eD_{j+2}\,,\end{aligned}\right.$$

il vient

$$(76)\quad \frac{1}{\cos i}\frac{dR}{d\varepsilon} = i\,e^{\varphi\varepsilon}\,(T_j + U_j e^{-\eta\varepsilon} + V_j e^{\eta\varepsilon})\,.$$

Les équations (75) donnent les formules

$$(77) \qquad (T)_{j,j'} = -T_{-j,-j'}, \quad (V)_{j,j'} = -U_{-j,\,j'},$$

qui correspondent à

$$(77)^* \qquad \begin{cases} T'_{j,j'} = -T'_{-j,-j'}, & V'_{j,j'} = -U'_{-j,-j'}, \\ T''_{j,j'} = T''_{-j,-j'}, & V''_{j,j'} = U''_{-j,-j'}. \end{cases}$$

Les mêmes équations (75) donnent encore

$$(78) \qquad T_{j,j'} + V_{j-1,j'} + U_{j+1,j'} = 0,$$

et

$$(79) \qquad \dot{T}'_{0,0} = 0, \quad -\tfrac{1}{2}T''_{0,0} = U''_{1,0} = e\,V''_{0,0}.$$

Intégrant l'équation (76), on a

$$\frac{R}{\cos i} = \frac{1}{\omega} e^{\varphi\iota}(T + Ue^{\eta\iota} + Ve^{\eta\iota}),$$

et par suite

$$\frac{\overline{R}}{\cos i} = Y_j e^{\varphi\iota},$$

en posant

$$Y_j = \frac{T_j}{\omega} + \frac{U_{j+1}}{\omega+1} + \frac{V_{j-1}}{\omega-1}.$$

De plus, d'après l'équation (43), $u = \overline{R}$; donc

$$(80) \qquad \frac{u}{\cos i} = Y_j e^{\varphi\iota}.$$

L'équation (44) donne $\frac{du}{dt} = \frac{\partial \overline{R}}{\partial \tau}$, ou bien $\frac{du}{d\iota} = \frac{\partial \overline{R}}{\partial \eta}$; par suite

$$u = \int \frac{\partial \overline{R}}{\partial \eta} d\iota.$$

Différentiant maintenant par rapport à η la valeur précédente de R, il vient

$$\frac{1}{\cos i}\frac{\partial R}{\partial \eta} = -\frac{i}{\omega}\left(U_j e^{(\varphi-\eta)\iota} - V_j e^{(\varphi+\eta)\iota}\right),$$

d'où

$$\frac{1}{\cos i}\frac{\partial \overline{R}}{\partial \eta} = -i\left(\frac{U_{j+1}}{\omega+1} - \frac{V_{j-1}}{\omega-1}\right)e^{\varphi\iota},$$

et enfin

$$(81) \qquad \frac{u}{\cos i} = \frac{W_j}{\omega} e^{\varphi\iota},$$

où j'ai fait

$$W_j = -\frac{U_{j+1}}{\omega + 1} + \frac{V_{j-1}}{\omega - 1}.$$

Le rapprochement des deux équations (80) et (81) donne l'équation de condition

$$Y_j = \frac{W_j}{\omega},$$

qui pourra servir à contrôler les calculs numériques.

---

§ V.

Intégration des équations différentielles dans le cas où $j' = 0$. — Détermination des constantes arbitraires dans deux cas différents.

33.

En prenant seulement les premiers termes de $\frac{dW}{d\varepsilon}$, obtenus lorsqu'on y fait $j' = 0$, et $j = 0, 1, 2, \ldots$ successivement, on a

$$\begin{aligned}\frac{dW}{d\varepsilon} = F'_0 \quad & + (H)_0 e^{\eta i} && + (G)_0 e^{-\eta i} \\ + (F)_1 e^{\varepsilon i} & + (H)_1 e^{(\varepsilon+\eta)i} && + (G)_1 e^{(\varepsilon-\eta)i} \\ + (F)_2 e^{2\varepsilon i} & + (H)_2 e^{(2\varepsilon+\eta)i} && + (G)_2 e^{(2\varepsilon-\eta)i} \\ + \cdots \quad & + \cdots && + \cdots,\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}W = 2k + K_1 e^{\eta i} + F'_0 \varepsilon \quad & + (H)_0 e^{\eta i}\varepsilon && + (G)_0 e^{-\eta i}\varepsilon \\ - i(F)_1 e^{\varepsilon i} \quad & - i(H)_1 e^{(\varepsilon+\eta)i} && - i(G)_1 e^{(\varepsilon-\eta)i} \\ - \tfrac{1}{2} i (F)_2 e^{2\varepsilon i} & - \tfrac{1}{2} i (H)_2 e^{(2\varepsilon+\eta)i} && - \tfrac{1}{2} i (G) e^{(2\varepsilon-\eta)i} \\ - \cdots \quad & - \cdots && - \cdots,\end{aligned}$$

en désignant par $2k + K_1 e^{\eta i}$ la constante d'intégration, constante dans laquelle $K_1 = K'_1 - iK''_1$. De plus, en faisant $\tau = t$, et observant que $F'_0 = eH'_0$, on a

$$\begin{aligned}\overline{W} = 2k + 2G''_1 + eH'_0\varepsilon + (H)_0 e^{\varepsilon i}\varepsilon \\ - i[(P)_1 + iK_1] e^{\varepsilon i} - i(P)_2 e^{2\varepsilon i} - i(P)_3 e^{3\varepsilon i} - \cdots,\end{aligned}$$

où l'on a remplacé $(G)_0$ par son égal H_0, $(G)_0 e^{-\varepsilon i}$ par $(H)_0 e^{\varepsilon i}$, et posé, pour abréger,

$$
\begin{aligned}
P_0 &= G_1, \\
P_1 &= F_1 + \tfrac{1}{2} G_2, \\
P_2 &= \tfrac{1}{2} F_2 + \tfrac{1}{3} G_3 + H_1, \\
P_3 &= \tfrac{1}{3} F_3 + \tfrac{1}{4} G_4 + \tfrac{1}{2} H_2, \\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Mais la première des équations (32) donne $\frac{dz}{dt} = 1 + \overline{W}$; on a donc

$$
(82)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} = 1 + 2k + 2P''_0 + eH'_0\varepsilon + (H)_0 e^{\varepsilon i}\varepsilon \\
- i[(P)_1 + iK_1] e^{\varepsilon i} - i(P)_2 e^{2\varepsilon i} - i(P_3) e^{3\varepsilon i} - \dots
\end{aligned}
\right.
$$

Éliminant dt par la relation $n\,dt = (1 - e\cos\varepsilon)\,d\varepsilon$, il vient

$$
\begin{aligned}
n\frac{dz}{dt} = 1 + 2k + 2P''_0 - e(P''_1 + K'_1) + [(1 - \tfrac{1}{2}e^2) H'_0 + i H''_0] e^{\varepsilon i}\varepsilon \\
- (\tfrac{1}{2}e^2 H'_0 + \tfrac{1}{2} i e H''_0) e^{2\varepsilon i}\varepsilon \\
+ [P''_1 + K'_1 - \tfrac{1}{2}e(1 + 2k + 2P''_0) - \tfrac{1}{2}eP''_2 - i(P'_1 + K''_1 - \tfrac{1}{2}eP'_2)] e^{\varepsilon i} \\
+ [P''_2 - \tfrac{1}{2}eP''_1 - \tfrac{1}{2}eP''_3 - \tfrac{1}{2}eK'_1 - i(P'_2 - \tfrac{1}{2}eP'_1 - \tfrac{1}{2}eK''_1 - \tfrac{1}{2}eP'_3)] e^{2\varepsilon i} \\
+ [P''_3 - \tfrac{1}{2}eP''_2 - \tfrac{1}{2}eP''_4 - i(P'_3 - \tfrac{1}{2}eP'_2 - \tfrac{1}{2}eP'_4)] e^{3\varepsilon i} \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{aligned}
$$

et, en intégrant,

$$
(83)\quad \left\{
\begin{aligned}
nz = c + (1 + 2R''_0 + 2k - eK'_1)\varepsilon \\
- \{R'_1 - (1 - \tfrac{1}{2}e^2) H'_0 + K''_1 + i[R''_1 - H''_0 + K'_1 - \tfrac{1}{2}e(1 + 2k)]\} e^{\varepsilon i} \\
+ [H''_0 - i(1 - \tfrac{1}{2}e^2) H'_0] e^{\varepsilon i}\varepsilon \\
- [R'_2 + \tfrac{1}{8}eH'_0 - \tfrac{1}{4}eK''_1 + i(R''_2 + \tfrac{1}{8}eH''_0 - \tfrac{1}{4}eK'_1)] e^{2\varepsilon i} \\
- \tfrac{1}{4}e(H''_0 - iH'_0) e^{2\varepsilon i}\varepsilon \\
- (R'_3 + iR''_3) e^{3\varepsilon i} \\
- \dots ,
\end{aligned}
\right.
$$

où l'on a représenté par c la constante d'intégration, et posé

$$
\begin{aligned}
R''_0 &= P''_0 - \tfrac{1}{2}eP''_1, \\
R''_1 &= P''_1 - \tfrac{1}{2}eP''_2 - eP''_0, & R'_1 &= P'_1 - \tfrac{1}{2}eP'_2, \\
R''_2 &= \tfrac{1}{2}(P''_2 - \tfrac{1}{2}eP''_1 - \tfrac{1}{2}eP''_3), & R'_2 &= \tfrac{1}{2}(P'_2 - \tfrac{1}{2}eP'_1 - \tfrac{1}{2}eP'_3), \\
R''_3 &= \tfrac{1}{3}(P''_3 - \tfrac{1}{2}eP''_2 - \tfrac{1}{2}eP''_4), & R'_3 &= \tfrac{1}{3}(P'_3 - \tfrac{1}{2}eP'_2 - \tfrac{1}{2}eP'_4), \\
&\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

La constante c est l'anomalie moyenne pour $t = 0$.

34.

Je vais maintenant éliminer ε en dehors des exponentielles à l'aide de la relation $nt + c = \varepsilon - e \sin \varepsilon$, et, dans cette opération, je néglige c, parce que les termes qui en proviennent se combinent avec les constantes arbitraires; alors, désignant simplement par c la somme constante $c + e(1 - \frac{1}{2}e^2)h_0$, on a

$$(84)\left\{\begin{aligned} nz = c &+ [1 + 2R''_0 + 2(k - \tfrac{1}{2}eK'_1)]\,nt \\ &-\{R'_1 - (1 - \tfrac{5}{8}e^2)H'_0 + K''_1 + i[R''_1 + eR''_0 - (1 - \tfrac{1}{8}e^2)H''_0 + (1 - \tfrac{1}{2}e^2)K'_1]\}e^{\varepsilon\iota} \\ &+ [H''_0 - i(1 - \tfrac{1}{2}e^2)H'_0]\,e^{\varepsilon\iota}nt \\ &- [R'_2 + \tfrac{1}{8}e(5 - 2e^2)H'_0 - \tfrac{1}{4}eK''_1 + i(R''_2 + \tfrac{5}{8}eH''_0 - \tfrac{1}{4}eK'_1)]\,e^{2\varepsilon\iota} \\ &- \tfrac{1}{4}e(H''_0 - iH'_0)\,e^{2\varepsilon\iota}nt \\ &- [R'_3 - \tfrac{1}{8}e^2H'_0 + i(R''_3 - \tfrac{1}{4}e^2H''_0)]\,e^{3\varepsilon\iota} \\ &- (R'_4 + iR''_4)\,e^{4\varepsilon\iota} \\ &- \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Éliminant ε des termes de même nature dans $\frac{dz}{dt}$, il vient

$$(85)\left\{\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = 1 &+ 2k + 2P''_0 - eH''_0 + eH'_0nt \\ &+ [P''_1 + K'_1 - i(P'_1 + e^2H'_0 + K''_1)]\,e^{\varepsilon\iota} \\ &+ (H'_0 + iH''_0)\,e^{\varepsilon\iota}nt \\ &+ [P''_2 + \tfrac{1}{2}eH''_0 - i(P''_2 + \tfrac{1}{2}eH'_0)]\,e^{2\varepsilon\iota} \\ &+ (P''_3 - iP'_3)\,e^{3\varepsilon\iota} \\ &+ \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

35.

En différentiant la valeur de W par rapport à η, il vient

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = -(G)_1 e^{(\varepsilon-\eta)\iota} + i(H)_0 e^{\eta\iota}\varepsilon + iK_1 e^{\eta\iota} - \tfrac{1}{2}(G)_2 e^{(2\varepsilon-\eta)\iota} - \tfrac{1}{3}(G)_3 e^{(3\varepsilon-\eta)\iota} + (H)_1 e^{(\varepsilon+\eta)\iota} + \cdots :$$

par suite

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta} = 2eH'_0 &+ [K''_1 - \tfrac{1}{2}G'_2 + i(K'_1 - \tfrac{1}{2}G''_2)]\,e^{\varepsilon\iota} \\ &- (H''_0 - iH'_0)\,e^{\varepsilon\iota}\varepsilon \\ &- [\tfrac{1}{3}G'_3 - H'_1 + i(\tfrac{1}{3}G''_3 - H''_1)]\,e^{2\varepsilon\iota} \\ &- [\tfrac{1}{4}G'_4 - \tfrac{1}{2}H'_2 + i(\tfrac{1}{4}G''_4 - \tfrac{1}{2}H''_2)]\,e^{3\varepsilon\iota} \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et comme $2\frac{d\nu}{d\varepsilon} = -\frac{\partial \overline{W}}{\partial \eta}$, en multipliant par $d\varepsilon$ et intégrant, on a

$$
(86) \left\{
\begin{aligned}
2\nu = {} & 2C - 2eH'_0 nt \\
& + \{Q''_1 + H''_0 - K'_1 - i[Q'_1 + (1-e^2)H'_0 - K''_1]\} e^{\varepsilon i} \\
& - (H'_0 + iH''_0) e^{\varepsilon i} nt \\
& + \tfrac{1}{2}[Q''_2 - eH''_0 - i(Q'_2 - eH'_0)] e^{2\varepsilon i} \\
& + \tfrac{1}{3}(Q''_3 - iQ'_3) e^{3\varepsilon i} \\
& + \ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned}
\right.
$$

après avoir éliminé ε en dehors des exponentielles et posé

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \tfrac{1}{2} G_2 , \\
Q_2 &= \tfrac{1}{3} G_3 - H_1 , \\
Q_3 &= \tfrac{1}{4} G_4 - \tfrac{1}{2} H_2 , \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

36.

Je vais maintenant faire subir les mêmes transformations aux quantités $\frac{\partial \overline{W}}{\partial \eta} = -2\frac{d\nu}{d\varepsilon}$, $\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \eta^2}$, qui se présenteront dans la suite. On a

$$
\begin{aligned}
2\frac{d\nu}{d\varepsilon} = -\frac{\partial \overline{W}}{\partial \eta} = -eH'_0 & + [Q'_1 - K''_1 + i(Q''_1 - K'_1)] e^{\varepsilon i} \\
& + (H''_0 - iH'_0) e^{\varepsilon i} nt \\
& + [Q'_2 - \tfrac{1}{2} eH'_0 + i(Q''_2 - \tfrac{1}{2} eH''_0)] e^{2\varepsilon i} \\
& + (Q'_3 + iQ''_3) e^{3\varepsilon i} \\
& + \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Ensuite, différentiant $\frac{\partial W}{\partial \eta}$ par rapport à η, il vient

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = {} & i(G)_1 e^{(\varepsilon-\eta)i} - (H)_0 e^{\eta i} \varepsilon \\
& - K_1 e^{\eta i} + \tfrac{1}{2} i(G)_2 e^{(2\varepsilon-\eta)i} + \tfrac{1}{3}(G)_3 e^{(3\varepsilon-\eta)i} + i(H)_1 e^{(\varepsilon+\eta)i} + \cdots ,
\end{aligned}
$$

d'où l'on tire

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \eta^2} = - 2G''_1 + eH''_0 & - [\tfrac{1}{2} G''_2 + K'_1 - i(\tfrac{1}{2} G'_2 + K''_1)] e^{\varepsilon i} \\
& - (H'_0 + iH''_0) e^{\varepsilon i} nt \\
& - [\tfrac{1}{3} G''_3 + H''_1 + \tfrac{1}{2} eH''_0 - i(\tfrac{1}{3} G'_3 + H'_1 + \tfrac{1}{2} eH'_0)] e^{2\varepsilon i} \\
& - [\tfrac{1}{4} G''_4 + \tfrac{1}{2} H''_2 - i(\tfrac{1}{4} G'_4 + \tfrac{1}{2} H'_2)] e^{3\varepsilon i} \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

37.

L'équation, art. 33,

$$d\delta\frac{h}{h_0} = -\,\overline{T}d\epsilon\,,$$

qui sert à contrôler le calcul numérique des quantités $\frac{d\delta z}{dt}$ et ν, donne, dans le cas où $j' = 0$ et $j = 0, 1, 2, \ldots$, en ayant égard aux équations de condition (69) et (70),

$$\frac{d\delta\frac{h}{h_0}}{d\epsilon} = eH_0' - [(F)_1 + (G)_2 + (H)_0]\,e^{\epsilon i} - [(F)_2 + (G)_3 + (H)_1]\,e^{2\epsilon i} - \cdots;$$

intégrant et désignant par $2K$ une constante arbitraire, il vient

$$\begin{aligned}\delta\frac{h}{h_0} = 2K + eH_0'nt - [\Pi_1'' - i(\Pi_1' - \tfrac{1}{2}e^2H_0')]\,e^{\epsilon i}\\ -\tfrac{1}{2}(\Pi_2'' - i\Pi_2')\,e^{2\epsilon i}\\ -\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

après avoir éliminé ϵ hors des exponentielles.

38.

Il faut maintenant, pour compléter ce qui est relatif au cas $j' = 0$, s'occuper de l'équation (76), qui devient dans ce cas

$$\begin{aligned}\frac{dR}{\cos i\,d\epsilon} = T_0'' + iU_0e^{-\eta i} + iT_1e^{\epsilon i} + iU_1e^{(\epsilon-\eta)i} + iV_1e^{(\epsilon+\eta)i}\\ + iT_2e^{2\epsilon i} + iU_2e^{(2\epsilon-\eta)i} + iV_2e^{(2\epsilon+\eta)i}\\ + iT_3e^{3\epsilon i} + iU_3e^{(3\epsilon-\eta)i} + iV_3e^{(3\epsilon+\eta)i}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

où l'on peut, à cause des équations (79), remplacer T_0'' par $-2eV_0''$.

Cette équation peut s'écrire, art. 28,

$$\frac{dR}{\cos i\,d\epsilon} = \frac{hr^2}{na^2}\,\rho\sin(\omega - w)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\,,$$

dont l'intégrale amènera une constante de la forme

$$2l_1'\frac{p}{a}\sin\omega + 2l_2''\frac{\rho}{a}\cos\omega\,,$$

qui peut s'écrire

$$2l_1'f\sin\eta + 2l_1''(\cos\eta - e)\,;$$

la constante indépendante de l'exponentielle $e^{\eta\iota}$ a donc pour valeur $-2el''_1$, lorsque la constante dépendant de cette exponentielle est mise sous la forme $(l'_1 - il''_1)e^{\eta\iota}$. Ainsi, l'intégrale de l'équation placée au commencement de cet article a pour constante

$$-2el''_1 + l_1 e^{\eta\iota}.$$

On a donc successivement

$$\begin{aligned}\frac{R}{\cos i} = &-2el''_1 - 2eV''_0\varepsilon + iV_0 e^{\eta\iota}\varepsilon + l_1 e^{\eta\iota}\\ &+ T_1 e^{\varepsilon\iota} + U_1 e^{(\varepsilon-\eta)\iota} + V_1 e^{(\varepsilon+\eta)\iota}\\ &+ \tfrac{1}{2}T_2 e^{2\varepsilon\iota} + \tfrac{1}{2}U_2 e^{(2\varepsilon-\eta)\iota} + \tfrac{1}{2}V_2 e^{(2\varepsilon+\eta)\iota}\\ &+ \cdots + \cdots + \cdots,\end{aligned}$$

$$\frac{\overline{R}}{\cos i} = 2U'_1 - 2el''_1 - 2eV''_0\varepsilon + (Y_1 + l_1)e^{\varepsilon\iota} + iV_0 e^{\varepsilon\iota}\varepsilon + Y_2 e^{2\varepsilon\iota} + Y_3 e^{3\varepsilon\iota} + \cdots,$$

en posant

$$Y_1 = T_1 + \tfrac{1}{2}U_2, \quad Y_2 = \tfrac{1}{2}T_2 + \tfrac{1}{3}U_3 + V_1, \quad Y_3 = \tfrac{1}{3}T_3 + \tfrac{1}{4}U_4 + \tfrac{1}{2}V_2, \ldots,$$

et enfin, à cause de l'équation (43) et en éliminant ε hors des exponentielles,

$$\begin{aligned}\frac{u}{\cos i} = 2U'_1 - 2el''_1 - eV'_0 - 2eV''_0 nt &+ [Y'_1 + l'_1 - i(Y''_1 - e^2 V''_0 + l''_1)]e^{\varepsilon\iota}\\ &+ (V''_0 + iV'_0)e^{\varepsilon\iota}nt\\ &+ [Y'_2 + \tfrac{1}{2}eV'_0 - i(Y''_2 + \tfrac{1}{2}eV''_0)]e^{2\varepsilon\iota}\\ &+ (Y'_3 - iY''_3)e^{3\varepsilon\iota}\\ &+ \cdots\cdots\end{aligned}$$

Je vais aussi donner la dérivée de u, dont on se servira plus loin. On a, art. 33,

$$\frac{1}{\cos i}\frac{du}{d\varepsilon} = \frac{1}{\cos i}\frac{\partial R}{\partial \eta};$$

alors la valeur précédente de u donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos i}\frac{\partial \overline{R}}{\partial \eta} = \frac{1}{\cos i}\frac{du}{d\varepsilon} = &-3eV''_0\\ &+ [Y''_1 + V''_0 + l''_1 + i(Y'_1 + V'_0 + l'_1)]e^{\varepsilon\iota}\\ &- (V'_0 - iV''_0)e^{\varepsilon\iota}nt\\ &+ 2[Y''_2 + \tfrac{1}{4}eV''_0 + i(Y'_2 + \tfrac{1}{2}eV'_0)]e^{2\varepsilon\iota}\\ &+ 3(Y''_3 + iY'_3)e^{3\varepsilon\iota}\\ &+ \cdots\cdots\end{aligned}$$

39.

Par les intégrations précédentes, j'ai introduit huit constantes, $c, k, K'_1, K''_1, l'_1, l''_1, K, C$, dont les deux dernières, par exemple, sont des fonctions des autres. On va les déterminer, en se bornant à la première approximation.

L'expression de dW_0, art. 17, se compose de trois parties, l'une ayant en facteur $\rho \sin \omega$, l'autre $\rho \cos \omega$, et enfin une troisième

$$- h_0 \left(1 + 2 \frac{h^2}{h_0^2}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial w} dt,$$

indépendante de ces facteurs.

Or, on a vu que l'intégration de dW amène pour constante

$$2k + 2K'_1 \cos \eta + 2K''_1 \sin \eta,$$

qu'on peut écrire

$$2k + 2K'_1 \left(\frac{\rho}{a} \cos \omega + e\right) + 2K''_1 \frac{\rho}{a} \sin \omega$$

$$= 2k + 2eK'_1 + 2K'_1 \frac{\rho}{a} \cos \omega + 2K''_1 \frac{\rho}{a} \sin \omega,$$

de sorte que la constante amenée par l'intégration de la troisième partie de dW_0 est

$$2k + 2eK'_1.$$

Mais on a, (38),

$$h_0 \frac{\partial \Omega}{\partial w} dt = d \frac{h_0}{h},$$

$$-2 \frac{h^2}{h_0} \frac{\partial \Omega}{\partial w} dt = 2d \frac{h}{h_0},$$

d'où l'on tire

$$d\left(2 \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h}\right) = - h_0 \left(1 + \frac{2h^2}{h_0^2}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial w} dt.$$

En intégrant, et remarquant que dans la première approximation $h = h_0$, on a

$$2 \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} = 1 + 2k + 2eK'_1 - h_0 \int \left(1 + \frac{2h^2}{h_0^2}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial w} dt;$$

de plus, $2K$ étant la constante arbitraire introduite par l'intégration

dans l'expression de $\delta \frac{h}{h_0}$, on a, puisque $\frac{h_0}{h} = 1 - \delta \frac{h}{h_0}$ et $d \frac{h_0}{h} = d\delta \frac{h}{h_0}$,

$$\frac{h_0}{h} = 1 - 2K + h_0 \int \frac{\partial \Omega}{\partial w} dt ;$$

on a encore

$$\frac{h_0}{h} = 1 + \frac{h_0}{h} - 1 ,$$

d'où

$$\frac{h}{h_0} = 1 - \left(\frac{h_0}{h} - 1\right) + \left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^2 - \left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^3 + \dots ,$$

et par suite

$$\frac{2h}{h_0} - \frac{h_0}{h} = 4 - \frac{3h_0}{h} + 2\left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^2 - 2\left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^3 + \cdots ,$$

de sorte que, si l'on désigne par $2H_1$ une quantité constante dépendant des puissances de la force perturbatrice supérieures à la première, on a

$$\frac{2h}{h_0} - \frac{h_0}{h} = 1 + 6K + 2H_1 + \text{des termes variables.}$$

Comparant cette expression à celle qui a déjà été obtenue plus haut pour la même quantité, on en conclut

$$K = \tfrac{1}{3}(k + eK_1') - \tfrac{1}{3} H_1 , \tag{87}$$

et, si l'on se borne à la première approximation,

$$K = \tfrac{1}{3}(k + eK_1') . \tag{88}$$

Pour déterminer C, j'écris l'équation (20) sous la forme

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h} - 2\nu + (3\nu^2 - 4\nu^3 + \cdots)\frac{h_0}{h} - 2\nu\left(\frac{h_0}{h} - 1\right) ;$$

par suite, en désignant par $2V_1$ une quantité de même ordre que $2H_1$, on a

$$\frac{dz}{dt} = 1 - 2K - 2C + 2V_1 + \text{des termes variables.}$$

D'un autre côté, on a trouvé, (85),

$$\frac{dz}{dt} = 1 + 2k + 2P_0'' - eH_0'' + \text{des termes variables} ,$$

ou bien

$$\frac{dz}{dt} = 1 + 2k + 2Z_0 + 2Z_1 + \text{des termes variables},$$

en posant

$$Z_0 = P_0'' - \tfrac{1}{2} e H_0'',$$

et désignant par Z_1 une quantité de même ordre que V_1. Comparant les deux valeurs de $\frac{dz}{dt}$, on en tire

$$k + Z_0 + Z_1 = - K - C + V_1,$$

d'où

$$(89) \qquad C = - \tfrac{1}{3}(4k + eK_1' + 3Z_0) + \tfrac{1}{3}(H_1 + 3V_1 - 3Z_1),$$

et, en négligeant les termes d'un ordre supérieur au premier par rapport à la force perturbatrice,

$$(90) \qquad C = - \tfrac{1}{3}(4k + eK_1' + 3Z_0).$$

40.

Pour terminer ce paragraphe, il me reste à exposer les moyens employés pour déterminer les constantes arbitraires.

Les éléments moyens sont les moyennes entre les limites possibles des éléments osculateurs rapportés à l'époque. Leur emploi conduit à des perturbations dont le maximum possible est moindre que celui qui dépend de tout autre système d'éléments. On fera voir plus tard comment d'un système d'éléments osculateurs on peut déduire les éléments moyens; on peut donc chercher à déterminer les constantes, soit en partant des éléments moyens, soit en partant des éléments osculateurs.

Lorsque les éléments moyens sont connus, la constante c est la valeur moyenne de l'anomalie moyenne: or, la vraie valeur du moyen mouvement est la limite du rapport de l'angle décrit par le rayon vecteur de la planète au temps employé à le décrire, lorsque cet angle augmente indéfiniment; le moyen mouvement étant exempt de variations séculaires, la valeur moyenne du moyen mouvement doit être identique à cette vraie valeur; de sorte que l'expression de nz ne peut renfermer d'autres termes proportionnels à t que nt, sans quoi n ne serait pas la limite du rapport indiqué dans la définition précédente. Cette valeur de n devra être introduite aussi dans les arguments, sans quoi les perturbations ne représenteraient

le lieu et la vitesse de la planète que pendant un temps plus ou moins long, au bout duquel des écarts apparaîtraient.

Les termes perturbateurs de nz, qui varient le plus avec les éléments elliptiques pris pour base du calcul, sont les facteurs de $e^{\varepsilon i}$ et de $e^{2\varepsilon i}$; dans ν et u, ceux qui varient le plus, dans les mêmes circonstances, sont les termes constants et les facteurs de $e^{\varepsilon i}$. Il résulte de la forme de ces termes qu'on ne peut pas les annuler à la fois ; on dispose alors des constantes pour annuler les coefficients de $e^{\varepsilon i}$ dans nz et ν. Par ces considérations, on obtient les cinq équations

$$
\begin{aligned}
&R''_0 + k - \tfrac{1}{2} e K'_1 = 0 ,\\
&R'_1 - (1 - \tfrac{5}{8} e^2) H'_0 + K''_1 = 0 ,\\
&R''_1 + e R''_0 - (1 - \tfrac{1}{8} e^2) H''_0 + (1 - \tfrac{1}{2} e^2) K'_1 = 0 ,\\
&Y'_1 + l'_1 = 0 ,\\
&Y''_1 - e^2 R''_0 + l''_1 = 0 ;
\end{aligned}
$$

on tire de là

$$
\begin{aligned}
K'_1 &= - \frac{R''_1 + e R''_0 - (1 - \tfrac{1}{8} e^2) H''_0}{1 - \tfrac{1}{2} e^2} ,\\
K''_1 &= - R'_1 + (1 - \tfrac{5}{8} e^2) H'_0 ,\\
k &= \frac{- R''_0 - \tfrac{1}{2} e R''_1 + \tfrac{1}{2} e (1 - \tfrac{1}{8} e^2) H''_0}{1 - \tfrac{1}{2} e^2} ,\\
l'_1 &= - Y'_1 ,\\
l''_1 &= e^2 V''_0 - Y''_1 .
\end{aligned}
$$

Alors on a

$$
\begin{aligned}
nz = c + nt &\\
&+ [H''_0 - i (1 - \tfrac{1}{2} e^2) H'_0] e^{\varepsilon i} nt\\
&- \Big\{ R'_2 + \tfrac{1}{4} e R'_1 + \tfrac{3}{8} e (1 - \tfrac{1}{4} e^2) H'_0\\
&\qquad + \frac{4}{4 - e^2} i [(1 - \tfrac{1}{2} e^2) R''_2 + \tfrac{1}{4} e R''_1 + \tfrac{1}{4} e^2 R''_0 + \tfrac{3}{8} e (1 - \tfrac{3}{4} e^2) H''_0] \Big\} e^{2\varepsilon i}\\
&- \tfrac{1}{4} e (H''_0 - i H'_0) e^{2\varepsilon i} nt\\
&- [R'_3 - \tfrac{1}{8} e^2 H'_0 + i (R''_0 - \tfrac{1}{4} e^2 H''_0)] e^{3\varepsilon i}\\
&- (R'_4 + i R''_4) e^{4\varepsilon i}\\
&- \ldots\ldots ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu = 2C - 2eH'_0 nt & \\
& + \left(Q''_1 + \frac{(1-\frac{5}{8}e^2)H''_0 - R''_1 - eR''_0}{1-\frac{1}{2}e^2} - i(Q'_1 + R'_1 - \tfrac{3}{8}e^2 H'_0)\right)\mathrm{e}^{\varepsilon i} \\
& - (H'_0 + iH''_0)\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} nt \\
& + \tfrac{1}{2}[Q''_2 - eH''_0 - i(Q'_2 - eH'_0)]\,\mathrm{e}^{2\varepsilon i} \\
& + \tfrac{1}{3}(Q''_3 - iQ'_3)\,\mathrm{e}^{3\varepsilon i} \\
& + \ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = 2(U'_1 - eY'_1 - \tfrac{1}{2}eV'_0) - 2eV''_0 nt & \\
& + (V''_0 + iV'_0)\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} nt \\
& + [Y'_2 + \tfrac{1}{2}eV'_0 - i(Y''_2 + \tfrac{1}{2}eV''_0)]\,\mathrm{e}^{2\varepsilon i} \\
& + (Y'_3 - iY''_3)\,\mathrm{e}^{3\varepsilon i} \\
& + \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Telles seront les formules de perturbations du premier ordre, lorsqu'on aura pris les éléments moyens pour base du calcul.

41.

Je vais maintenant prendre pour base de la détermination des constantes arbitraires les éléments osculateurs correspondants à l'époque, c'est-à-dire à $t = 0$. Dans ce cas, les valeurs numériques des perturbations et de leurs différentielles premières par rapport au temps sont évidemment nulles; on a donc pour cet instant

$$
nz = c_0, \quad \nu = 0, \quad u = 0,
$$
$$
\frac{dz}{dt} = 1, \quad \frac{d\nu}{dt} = 0, \quad \frac{du}{dt} = 0,
$$

où c_0, parmi les éléments osculateurs, désigne l'anomalie moyenne. Comme $\frac{d\nu}{dt} = \frac{d\nu}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}$, $\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}$, et que $\frac{d\varepsilon}{dt}$ ne saurait être nul, il en résulte que, pour l'époque,

$$
\frac{d\nu}{d\varepsilon} = 0, \quad \frac{du}{d\varepsilon} = 0.
$$

Si maintenant on désigne par ε_0 la valeur de ε pour cet instant, et par

$$(n\delta z)_0, \quad 1+\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0, \quad (\nu)_0, \quad \left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0, \quad \left(\frac{u}{\cos i}\right)_0, \quad \left(\frac{du}{\cos i\, d\varepsilon}\right)_0,$$

les parties indépendantes des constantes arbitraires dans les expressions de

$$n\delta z, \quad 1+\frac{d\delta z}{dt}, \quad \nu, \quad \frac{d\nu}{d\varepsilon}, \quad \frac{u}{\cos i}, \quad \frac{du}{\cos i\, d\varepsilon},$$

on obtient

$$c_0 = c - [K''_1 + i(1-\tfrac{1}{2}e^2)K'_1]\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} + \tfrac{1}{4}e(K''_1 + iK'_1)\,\mathrm{e}^{2\varepsilon i} + (n\delta z)_0,$$

$$0 = 2k + (K'_1 - iK''_1)\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} + \left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0,$$

$$0 = -\tfrac{8}{3}k - \tfrac{2}{3}eK'_1 - 2Z - (K'_1 - iK''_1)\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} + 2(\nu)_0,$$

$$0 = (K''_1 + iK'_1)\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} + 2\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0,$$

$$0 = -2el'_1 + (l'_1 - il'_1)\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} + \left(\frac{u}{\cos i}\right)_0,$$

$$0 = (l''_1 + il'_1)\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} + \left(\frac{du}{\cos i\, d\varepsilon}\right)_0,$$

où l'on a écrit Z pour $Z_0 + Z_1$.

Résolvant ces équations, on trouve

$$c = c_0 - (n\delta z)_0 - K'_1[(1-\tfrac{1}{2}e^2)\sin\varepsilon_0 - \tfrac{1}{4}e\sin 2\varepsilon_0] + K'_1(\tfrac{1}{4}e + \cos\varepsilon_0 - \tfrac{1}{2}e\cos^2\varepsilon_0),$$

$$k = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + \frac{2\left(\dfrac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 3(\nu)_0 - 3Z}{1 - e\cos\varepsilon_0} + \frac{e\sin\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0}\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0,$$

$$K'_1 = -\frac{\left[2\left(\dfrac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 3(\nu)_0 - 3Z\right]\cos\varepsilon_0 + \left(\dfrac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0\sin\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0},$$

$$K''_1 = -\frac{\left[2\left(\dfrac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 3(\nu)_0 - 3Z\right]\sin\varepsilon_0 + (e - \cos\varepsilon_0)\left(\dfrac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0}{1 - e\cos\varepsilon_0},$$

$$l'_1 = \frac{\left(\dfrac{du}{\cos i\, d\varepsilon}\right)_0\sin\varepsilon_0 - \left(\dfrac{u}{\cos i}\right)_0\cos\varepsilon_0}{2(1 - e\cos\varepsilon_0)},$$

$$l''_1 = -\frac{\left(\dfrac{du}{\cos i\, d\varepsilon}\right)_0(\cos\varepsilon_0 - e) + \left(\dfrac{u}{\cos i}\right)_0\sin\varepsilon_0}{2(1 - e\cos\varepsilon_0)}.$$

Ainsi sont obtenues les valeurs numériques à substituer aux constantes dans les expressions de nz, ν et $\frac{u}{\cos i}$.

42.

Les relations précédentes montrent que c dépend seul de $(n\delta z)_0$, et par suite, de la seconde puissance des petits diviseurs qui sont calculés en fonction de la valeur osculatrice de n, et non de la valeur moyenne; c est donc la constante qui est calculée avec le moins d'exactitude. On peut, sans calculer les perturbations du second ordre, corriger le résultat qu'on vient d'obtenir.

La substitution des valeurs numériques de k et k_1 donne

$$nz = c + [1 + 2R'_0 + 2(k - \tfrac{1}{2}eK'_1)]nt + \text{des termes périodiques},$$

où n représente la valeur osculatrice du moyen mouvement dont la vraie valeur moyenne dans l'unité de temps est

$$[1 + 2(R'_0 + k - \tfrac{1}{2}eK'_1)]n.$$

Lorsque, dans la détermination des constantes, on aura eu égard aux quantités du second ordre, l'expression précédente représentera cette valeur moyenne, aux quantités près de l'ordre du cube de la force perturbatrice. Si l'on pousse plus loin l'exactitude pour les constantes, il en résultera une valeur correspondante pour cette vraie valeur moyenne du moyen mouvement dans l'unité de temps.

Pour montrer comment on peut, avec l'approximation déjà obtenue, corriger la valeur du moyen mouvement, je représente par n_0 sa valeur osculatrice, et par (n) la valeur corrigée qui servira, une fois connue, à corriger les coefficients ainsi que c et N, et enfin les arguments. De là résulteront pour les constantes de nouvelles valeurs qui permettront à leur tour de corriger (n).

Dans le cas des petits diviseurs, on peut établir les formules de correction de la manière suivante.

On a vu qu'en désignant par F l'un des coefficients des quantités

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial R}{\cos i\,\partial \eta},$$

il faut, pour obtenir

$$\frac{d\delta z}{dt}, \quad \frac{d\nu}{d\varepsilon}, \quad \frac{du}{\cos i\,d\varepsilon},$$

intégrer des expressions de la forme

$$F d\iota = B e^{\varphi\iota} d\iota ,$$

φ ayant la même signification qu'à l'art. 29.

On a alors

$$\int F d\iota = -\frac{iB}{j-j'N} e^{\varphi\iota} = -i \frac{nF}{jn-j'n'} .$$

Comme (n) ne diffère de n_0 que de quantités du premier ordre, les variations du dénominateur seront les seules ayant une influence dans le cas des petits diviseurs. Remplaçant alors le coefficient de $-iF$, dans l'expression précédente, par $\frac{n_0}{jn-j'n'}$, prenant la variation de cette fraction par rapport à n, et remplaçant ensuite dans le dénominateur n par n_0, il vient

$$-\frac{(n)-n_0}{n_0} \frac{j}{(j-j'N)^2} ;$$

désignant maintenant par la caractéristique Δ la variation due à cette correction de n, on a

$$\Delta \int F d\iota = -i \frac{(n)-n_0}{n_0} \frac{j}{(j-j'N)^2} F ,$$

d'où, en posant

$$f(j,j') = -\frac{(n)-n_0}{n_0} \frac{j}{(j-j'N)} ,$$

$$\Delta \int F d\iota = \frac{iF}{j-j'N} f(j,j') ,$$

ou encore

$$\Delta \left(\frac{B}{j-j'N}\right) = \frac{Bf(j,j')}{j-j'N} i .$$

Appliquant ces résultats aux expressions des art. précédents, on a, ω ayant la même signification qu'à l'art. 25,

$$\Delta (P)_{j,j'} = -f(j,j') \frac{iF_{j,j'}}{\omega} - f(j+1,j') \frac{i(G)_{j+1,j'}}{\omega+1} - f(j-1,j') \frac{i(H)_{j-1,j'}}{\omega-1}$$

$$\Delta (Q)_{j,j'} = -f(j+1,j') \frac{i(G)_{j+1,j'}}{\omega+1} + f(j-1,j') \frac{i(H)_{j-1,j'}}{\omega-1} ,$$

$$\Delta (R)_{j,j'} = f(j,j')(R)_{j,j'} + \frac{\Delta (P)_{j,j'} - \frac{1}{2} e \Delta (P)_{j-1,j'} - \frac{1}{2} e \Delta (P)_{j+1,j'}}{\omega} ,$$

$$\Delta S_{j,j'} = f(j,j') S_{j,j'} + \frac{\Delta Q_{j,j'}}{\omega},$$

$$\Delta Y_{j,j'} = -f(j,j') \frac{i T_{j,j'}}{\omega} - f(j+1,j') \frac{i U_{j+1,j'}}{\omega+1} - f(j-1,j') \frac{i V_{j-1,j'}}{\omega-1},$$

$$\Delta W_{j,j'} = f(j+1,j') \frac{i U_{j+1,j'}}{\omega+1} - f(j-1,j') \frac{i V_{j-1,j'}}{\omega-1}.$$

Dans ces expressions, les fonctions multipliées par la fonction f ont été déjà calculées dans l'approximation précédente. On a ensuite

$$\Delta n\delta z = -\Sigma \Delta (R)_{j,j'} e^{\varphi i},$$

$$2\Delta \nu = -i\Sigma \Delta (S)_{j,j'} e^{\varphi i},$$

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = \Sigma \Delta Y_{j,j'} e^{\varphi i},$$

$$\Delta \frac{d\delta z}{dt} = -i\Sigma \Delta (P)_{j,j'} e^{\varphi i},$$

$$2\Delta \frac{d\nu}{dt} = \Sigma \Delta (Q)_{j,j'} e^{\varphi i},$$

$$\Delta \frac{du}{\cos i\, dt} = i\Sigma W_{j,j'} e^{\varphi i}.$$

Ainsi se trouvent terminés les développements relatifs à la première approximation.

DEUXIÈME PARTIE.

§ I.

Établissement des formules générales nécessaires pour le calcul des perturbations du second ordre.

1.

Si l'on ne tient pas compte, dans les formules (36), (45), (46), des termes dus aux perturbations du premier ordre, elles donnent

$$n\delta z = n\int\left(\delta\overline{W} + \frac{\partial\overline{W}}{\partial\tau}\delta z + \nu^2\right)dt,$$

$$\delta\nu = -\tfrac{1}{2}\int\left(\delta\frac{\partial\overline{W}}{\partial\tau} + \frac{\partial^2\overline{W}}{\partial\tau^2}\delta z\right)dt,$$

$$\delta u = \delta\overline{R} + \frac{\partial\overline{R}}{n\partial\tau}n\delta z,$$

ou

$$\delta u = \int\left(\frac{\partial\delta\overline{R}}{\partial\tau} + \frac{\partial\overline{R}}{\partial\tau}\frac{d\delta z}{dt} + \frac{\partial^2\overline{R}}{n\partial\tau^2}n\delta z\right)dt.$$

Prenant ε pour variable indépendante, on a

$$\frac{\partial\delta W}{\partial\tau} = \frac{\partial\delta W}{\partial\eta}\frac{an}{\rho},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}\frac{an}{\rho}\frac{d\eta}{d\tau} - \frac{\partial W}{d\eta}\frac{an}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\tau},$$

et par suite

$$(0)\quad\left\{\begin{aligned}
n\delta z &= \int\frac{r}{a}\left(\delta\overline{W} + \frac{\partial\overline{W}}{\partial\eta}\frac{a}{r}n\delta z + \nu^2\right)d\varepsilon,\\
\delta\nu &= -\tfrac{1}{2}\int\left[\frac{\partial\delta\overline{W}}{\partial\eta} + \left(\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial\eta^2} - \frac{\partial\overline{W}}{\partial\eta}\frac{ae}{r}\sin\varepsilon\right)\frac{a}{r}n\delta z\right]d\varepsilon,\\
\delta u &= \delta\overline{R} + \frac{\partial\overline{R}}{\partial\eta}\frac{a}{r}n\delta z,\\
\delta u &= \int\left[\frac{\partial\delta\overline{R}}{\partial\eta} + \frac{\partial\overline{R}}{\partial\eta}\frac{d\delta z}{dt} + \left(\frac{\partial^2\overline{R}}{\partial\eta^2} - \frac{\partial\overline{R}}{\partial\eta}\frac{ae}{r}\sin\varepsilon\right)\frac{a}{r}n\delta z\right]d\varepsilon.
\end{aligned}\right.$$

2.

La fonction $\frac{dW}{dt} = \frac{an}{r} T$, qui a été introduite dans la première approximation, et dont dépend aussi la seconde, est une fonction de $r, g, r', g', h, I, \Pi, \Pi'$, de sorte que, si l'on écrit pour abréger $T_0 = \frac{dW}{dt}$, on aura, par le théorème de Taylor,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\delta W}{dt} = \frac{\partial T_0}{\partial g}\delta g + \frac{\partial T_0}{\partial r}\delta r + \frac{\partial T_0}{\partial h}\delta h + \frac{\partial T_0}{\partial q'}\delta q' + \frac{\partial T_0}{\partial r'}\delta r' \\ + \frac{\partial T_0}{\partial I}\delta I + \frac{\partial T_0}{\partial \Pi}\delta\Pi + \frac{\partial T_0}{\partial \Pi'}\delta\Pi'. \end{aligned} \right.$$

Mais, de la relation $r = \bar{r}\,(1 + \nu)$, on tire $dr = \bar{r}d\nu + \nu d\bar{r}$, d'où $\frac{\partial\nu}{\partial r} = \frac{1}{\bar{r}}$, et par suite $\frac{\partial T_0}{\partial r} = \frac{\partial T_0}{\partial\nu}\frac{1}{\bar{r}}$; de plus, comme $\delta r = \bar{r}\nu$, il vient

$$\frac{\partial T_0}{\partial r}\delta r = \frac{\partial T_0}{\partial\nu}\nu :$$

on a donc

$$\begin{aligned} \frac{d\delta W}{dt} = \frac{\partial T_0}{\partial g}n\delta z + \frac{\partial T_0}{\partial\nu}\nu + \frac{\partial T_0}{\partial h}\delta h + \frac{\partial T_0}{\partial g'}n'\delta z' + \frac{\partial T_0}{\partial\nu'}\nu' \\ + \frac{\partial T_0}{\partial I}\delta I + \frac{\partial T_0}{\partial\Pi}\delta\Pi + \frac{\partial T_0}{\partial\Pi'}\delta\Pi'. \end{aligned}$$

$\frac{d\delta R}{dt}$ se mettra sons une forme analogue.

3.

La somme des trois derniers termes du développement précédent est susceptible d'une transformation remarquable. En effet, désignant par δ' l'accroissement de Ω, dû aux accroissements de I, Π, Π', on a

$$\delta'\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial I}\delta I + \frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\delta\Pi + \frac{\partial\Omega}{\partial\Pi'}\delta\Pi'.$$

Les formules différentielles des triangles sphériques donnent, pour le triangle des trois nœuds,

$$\begin{aligned} dI &= \cos\Phi di - \cos\Phi' di' + \sin\Phi'\sin i'\,(d\theta - d\theta'), \\ d\Phi &= -\cos i\, d(\theta - \theta') + \cos I d\Phi' + \sin\Phi'\sin I di', \\ d\Phi' &= \cos i' d(\theta - \theta') + \cos I d\Phi - \sin\Phi'\sin I di; \end{aligned}$$

éliminant $d\Phi'$ entre les deux dernières équations, il vient

$$d\Phi = \sin i'\,\text{coséc}\, I\cos\Phi' d(\theta - \theta') - \cot I\sin\Phi di - \sin\Phi'\,\text{coséc}\, I di',$$

et, à cause des équations (14) et (48), *Première partie,*

$$d\Pi = -(\sin i' \operatorname{coséc} I \cos \Phi' + \cos i) \frac{d\sigma}{\cos i} + \operatorname{coséc} I \sin i' \cos \Phi' \frac{d\sigma'}{\cos i'}$$
$$- \operatorname{coséc} I \sin \Phi' \, di' + \cot I \sin \Phi \, di .$$

De plus, le triangle des trois nœuds donne

$$\cos i = \cos i' \cos I - \sin i' \sin I \cos \Phi' ,$$
$$\cos i' = \cos i \cos I + \sin i \sin I \cos \Phi ,$$

d'où

$$\cos i + \sin i' \operatorname{coséc} I \cos \Phi' = \sin i \cot I \cos \Phi ;$$

substituant plus haut, puis changeant dans le résultat Φ en Φ', i en $180° - i'$, on a successivement

$$d\Pi = \cot I \left(\sin \Phi \, di - \sin i \cos \Phi \frac{d\sigma}{\cos i} \right) - \operatorname{coséc} I \left(\sin \Phi' di' - \sin i' \cos \Phi' \frac{d\sigma'}{\cos i'} \right),$$
$$d\Pi' = \cot I \left(- \sin \Phi di' + \sin i' \cos \Phi' \frac{d\sigma'}{\cos i'} \right) + \operatorname{coséc} I \left(\sin \Phi \, di - \sin i \cos \Phi \frac{d\sigma}{\cos i} \right).$$

Des équations

$$p = \sin i \sin (\sigma - \theta) , \quad q = \sin i \cos (\sigma - \theta) - \sin i_0 ,$$

on tire

$$di = \frac{\sin (\sigma - \theta_0)}{\cos i} dp + \frac{\cos (\sigma - \theta_0)}{\cos i} dq ,$$
$$d\sigma = \frac{\cos (\sigma - \theta_0)}{\sin i} dp - \frac{\sin (\sigma - \theta_0)}{\sin i} dq ;$$

on a des expressions analogues pour $di', d\sigma'$. Substituant ces résultats dans les expressions de $dI, d\Pi, d\Pi'$, et tenant compte des équations (48), *Première partie,* il vient

$$(2) \left\{ \begin{aligned} dI &= - \sin (\Pi - \varpi_0 + \theta_0) \frac{dp}{\cos i} + \cos (\Pi - \varpi_0 + \theta_0) \frac{dq}{\cos i} \\ &\quad + \sin (\Pi' - \varpi'_0 + \theta'_0) \frac{dp'}{\cos i'} - \cos (\Pi' - \varpi'_0 + \theta'_0) \frac{dq'}{\cos i'} , \\ d\Pi &= - \cot I \left[\cos (\Pi - \varpi_0 + \theta_0) \frac{dp}{\cos i} + \sin (\Pi - \varpi_0 + \theta_0) \frac{dq}{\cos i} \right] \\ &\quad + \operatorname{coséc} I \left[\cos (\Pi' - \varpi'_0 + \theta'_0) \frac{dp'}{\cos i'} + \sin (\Pi' - \varpi'_0 + \theta'_0) \frac{dq'}{\cos i'} \right], \\ d\Pi' &= \cot I \left[\cos (\Pi' - \varpi'_0 + \theta'_0) \frac{dp'}{\cos i'} + \sin (\Pi' - \varpi'_0 + \theta'_0) \frac{dq'}{\cos i'} \right] \\ &\quad - \operatorname{coséc} I \left[\cos (\Pi - \varpi_0 + \theta_0) \frac{dp}{\cos i} + \sin (\Pi - \varpi_0 + \theta_0) \frac{dq}{\cos i} \right]. \end{aligned} \right.$$

En substituant dans ces équations les valeurs de dp', dq', on obtiendrait par intégration, avec toute l'exactitude désirable, les valeurs des accroissements $\delta I, \delta\Pi, \delta\Pi'$, qu'il faut ajouter aux valeurs initiales de I, Π, Π'. Mais, ces quantités variant très peu, on peut les considérer, sans erreur sensible, comme constantes dans les seconds membres des équations (2), de sorte que l'intégration se fait en remplaçant dans les seconds membres dp, dq, dp', dq', par p, q, p', q'. Posant maintenant

$$-\Phi_0 = \Pi - \varpi_0 + \theta, \quad -\Phi_0' = \Pi - \varpi_0' + \theta_0',$$

on a, pour les accroissements $\delta I, \delta\Pi, \delta\Pi'$, les valeurs

$$\delta I = \sin\Phi_0 \cdot \frac{p}{\cos i} + \cos\Phi_0 \cdot \frac{q}{\cos i} - \sin\Phi_0' \cdot \frac{p'}{\cos i'} - \cos\Phi_0' \cdot \frac{q'}{\cos i'},$$

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & -\cot I\left(\cos\Phi_0 \cdot \frac{p}{\cos i} - \sin\Phi_0 \cdot \frac{q}{\cos i}\right) \\ & + \operatorname{coséc} I\left(\cos\Phi_0' \cdot \frac{p'}{\cos i'} - \sin\Phi_0' \cdot \frac{q'}{\cos i'}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\Pi' = & \cot I\left(\cos\Phi_0' \cdot \frac{p'}{\cos i'} - \sin\Phi_0' \cdot \frac{q'}{\cos i'}\right) \\ & - \operatorname{coséc} I\left(\cos\Phi_0 \cdot \frac{p}{\cos i} - \sin\Phi_0 \cdot \frac{q}{\cos i}\right), \end{aligned}$$

qui deviennent

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta I &= \frac{q_1}{\cos i} - \frac{q_1'}{\cos i'}, \\ \delta\Pi &= \cot I \cdot \frac{p_1}{\cos i} - \operatorname{coséc} I \cdot \frac{p_1'}{\cos i'}, \\ \delta\Pi' &= \operatorname{coséc} I \cdot \frac{p_1}{\cos i} - \cot I \cdot \frac{p_1'}{\cos i'}, \end{aligned} \right.$$

en posant

$$(3)^* \quad \left\{ \begin{aligned} p_1 &= -p\cos\Phi_0 + q\sin\Phi_0, \\ q_1 &= p\sin\Phi_0 + q\cos\Phi_0, \\ p_1' &= -p'\cos\Phi_0' + q'\sin\Phi_0', \\ q_1' &= p'\sin\Phi_0' + q'\cos\Phi_0'. \end{aligned} \right.$$

et, à cause des équations (14) et (48), *Première partie,*

$$d\Pi = -(\sin i' \operatorname{cos\acute{e}c} I \cos \Phi' + \cos i) \frac{d\sigma}{\cos i} + \operatorname{cos\acute{e}c} I \sin i' \cos \Phi' \frac{d\sigma'}{\cos i'}$$

$$- \operatorname{cos\acute{e}c} I \sin \Phi' \, di' + \cot I \sin \Phi \, di .$$

De plus, le triangle des trois nœuds donne

$$\cos i = \cos i' \cos I - \sin i' \sin I \cos \Phi' ,$$

$$\cos i' = \cos i \cos I + \sin i \sin I \cos \Phi ,$$

d'où

$$\cos i + \sin i' \operatorname{cos\acute{e}c} I \cos \Phi' = \sin i \cot I \cos \Phi ;$$

substituant plus haut, puis changeant dans le résultat Φ en Φ', i en $180° - i'$, on a successivement

$$d\Pi = \cot I \left(\sin \Phi \, di - \sin i \cos \Phi \frac{d\sigma}{\cos i} \right) - \operatorname{cos\acute{e}c} I \left(\sin \Phi' di' - \sin i' \cos \Phi' \frac{d\sigma'}{\cos i'} \right) .$$

$$d\Pi' = \cot I \left(-\sin \Phi' di' + \sin i' \cos \Phi' \frac{d\sigma'}{\cos i'} \right) + \operatorname{cos\acute{e}c} I \left(\sin \Phi \, di - \sin i \cos \Phi \frac{d\sigma}{\cos i} \right) .$$

Des équations

$$p = \sin i \sin (\sigma - \theta) , \quad q = \sin i \cos (\sigma - \theta) - \sin i_0 ,$$

on tire

$$di = \frac{\sin (\sigma - \theta_0)}{\cos i} dp + \frac{\cos (\sigma - \theta_0)}{\cos i} dq ,$$

$$d\sigma = \frac{\cos (\sigma - \theta_0)}{\sin i} dp - \frac{\sin (\sigma - \theta_0)}{\sin i} dq ;$$

on a des expressions analogues pour $di', d\sigma'$. Substituant ce[illegible] dans les expressions de $dI, d\Pi, d\Pi'$, et tenant comp[illegible] tions (48), *Première partie,* il vient

(2)

$$dI = -\sin (\Pi - \varpi_0 + \theta_0) \frac{dp}{\cos i} + \cos (\Pi - \varpi_0 \text{ [illegible]}$$

$$+ \sin (\Pi' - \varpi'_0 + \theta'_0) \frac{dp'}{\cos i'} - \cos (\Pi' - \text{ [illegible]}$$

$$d\Pi = -\cot I \Big[\cos (\Pi - \varpi_0 + \theta_0) \frac{dp}{\cos i} + \sin \text{ [illegible]}$$

$$+ \operatorname{cos\acute{e}c} I \Big[\cos (\Pi' - \varpi'_0 + \theta'_0) \frac{dp'}{\cos i'} \text{ [illegible]}$$

$$d\Pi' = \cot I \Big[\cos (\Pi' - \varpi'_0 + \theta'_0) \frac{dp'}{\cos i'} \text{ [illegible]}$$

$$- \operatorname{cos\acute{e}c} I \Big[\cos (\Pi - \varpi_0 + \theta_0 \text{ [illegible]}$$

En substituant dans ces équations les valeurs ... obtiendrait par intégration, avec toute l'ex... valeurs des accroissements $\delta I, \delta \Pi, \delta \Pi'$, qu'il ... initiales de I, Π, Π'. Mais, ces quantités vari... considérer, sans erreur sensible, comme co... membres des équations (2), de sorte que ... remplaçant dans les seconds membres dp, dq ...

Posant maintenant

$$-\Phi_0 = \Pi - \omega_0 + \theta, \qquad -\Phi'_0 = \Sigma - \dots$$

on a, pour les accroissements $\delta I, \delta \Pi, \delta \Pi'$ ... $\frac{q_1}{\cos i'}$;

$$\delta I = \sin\Phi_0 \cdot \frac{p}{\cos i} + \cos\Phi_0 \cdot \frac{q}{\cos i} - \sin \dots$$

$$\delta \Pi = -\cot I\left(\cos\Phi_0 \cdot \frac{p}{\cos i} - \sin\Phi_0 \cdot \frac{q}{\cos i} \dots\right.$$

$$+ \operatorname{cos\acute{e}c} I\left(\cos\Phi'_0 \cdot \frac{p'}{\cos i'} - \dots\right.$$

$$\delta \Pi' = \cot I\left(\cos\Phi'_0 \cdot \frac{p'}{\cos i'} - \sin\Phi'_0 \dots\right.$$

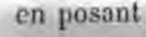
$$- \operatorname{cos\acute{e}c} I\left(\cos\Phi_0 \cdot \frac{p}{\cos i} \dots\right.$$

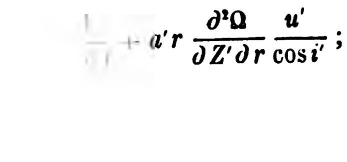
...riables u, u', au

qui deviennent

$$(3) \quad \begin{cases} \delta I = \dfrac{q_1}{\cos i} - \dots \\ \delta \Pi = \cot I \cdot \dots \\ \delta \Pi' = \cos \dots \end{cases}$$

...ivement par rapport





$$\dots + a' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z' \partial w} \frac{u'}{\cos i'},$$

$$\dots + a' r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z' \partial r} \frac{u'}{\cos i'};$$

en posant



(3)'

$$n + \frac{p}{f} n_1 \dots$$

4.

Les quantités p_1, q_1 peuvent s'exprimer en fonction de u, et de $u_1 = \frac{du}{dt}$. En effet, remplaçant z par t dans la valeur de u, art. 18, *Première partie*, cette valeur devient

$$u = q_1 \frac{r}{a} \sin(w + \Pi_0) + p_1 \frac{r}{a} \cos(w + \Pi_0) ;$$

par suite,

$$u_1 = \frac{q_1}{af} r [\cos(w + \Pi_0) + e \cos \Pi_0] - \frac{p_1}{af} r [\sin(w + \Pi_0) + e \sin \Pi_0] ,$$

d'où l'on tire

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} p_1 &= \frac{u}{f^2} [\cos(w + \Pi) + e \cos \Pi] - \frac{u_1}{f} \sin(w + \Pi) , \\ q_1 &= \frac{u}{f^2} [\sin(w + \Pi) + e \sin \Pi] + \frac{u_1}{f} \cos(w + \Pi) , \end{aligned} \right.$$

où l'on a remplacé Π_0 par Π, ce qui n'a pas ici d'influence sensible.

On aurait des expressions analogues pour p_1', q_1'.

5.

De la relation

$$\Omega = \frac{m'}{1 + m} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{rr'H}{r'^3} \right) ,$$

on tire

$$\delta'\Omega = \frac{m'}{1 + m} rr' \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \delta'H ,$$

et de la valeur de H on déduit celle de $\delta'H$, qui, substituée dans la relation précédente, donne

$$\delta'\Omega = \frac{m'}{1 + m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) rr' \sin I \left\{ \begin{aligned} &- \cos(w + \Pi) \sin(w' + \Pi') \cdot \frac{p_1}{\cos i} \\ &- \sin(w + \Pi) \sin(w' + \Pi') \cdot \frac{q_1}{\cos i} \\ &+ \sin(w + \Pi) \cos(w' + \Pi') \cdot \frac{p_1'}{\cos i'} \\ &+ \sin(w + \Pi) \sin(w' + \Pi') \cdot \frac{q_1'}{\cos i'} \end{aligned} \right\} .$$

Or

$$\frac{\partial\Omega}{\partial Z}=-\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)r'\sin I\sin(w'+\Pi'),$$

et si de plus, par analogie et comme définition de $\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}$, on pose

$$\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}=-\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)r\sin I\sin(w+\Pi),$$

on aura

$$\begin{aligned}\delta'\Omega&=r\cos(w+\Pi)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\frac{p_1}{\cos i}+r\sin(w+\Pi)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\frac{q_1}{\cos i}\\&+r'\cos(w'+\Pi)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}\frac{p'_1}{\cos i'}+r'\sin(w'+\Pi')\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}\frac{q'_1}{\cos i'};\end{aligned}$$

comme, de plus,

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned}au&=q_1r\sin(w+\Pi)+p_1r\cos(w+\Pi),\\a'u'&=q'_1r'\sin(w'+\Pi')+p'_1r'\cos(w'+\Pi'),\end{aligned}\right.$$

il vient finalement

$$(6)\qquad\delta'\Omega=a\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\frac{u}{\cos i}+a'\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}\frac{u'}{\cos i'};$$

$\delta'\Omega$ se trouve ainsi exprimé en fonction des deux variables u, u', au lieu des trois I,Π,Π'.

6.

Différentiant cette expression de $\delta'\Omega$ successivement par rapport à r et à w, il vient

$$\frac{\partial\delta'\Omega}{\partial w}=a\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z\partial w}\frac{u}{\cos i}+a\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\frac{\partial u}{\partial w}\frac{1}{\cos i}+a'\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z'\partial w}\frac{u'}{\cos i'},$$

$$r\frac{\partial\delta'\Omega}{\partial r}=ar\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z\partial r}\frac{u}{\cos i}+ar\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{\cos i}+a'r\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z'\partial r}\frac{u'}{\cos i'};$$

de la première des équations (5), on tire

$$r\frac{\partial u}{\partial r}=u,$$

$$a\frac{\partial u}{\partial w}=-\frac{re\sin w}{f^2}u+\frac{r}{f}u_1,$$

par suite,

$$(7)\begin{cases} \dfrac{\partial\delta'\Omega}{\partial w}=\left(a\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial Z\partial w}-\dfrac{re\sin w}{f^2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)\dfrac{u}{\cos i}+\dfrac{r}{f}\dfrac{\partial\Omega}{\partial Z}\dfrac{u_1}{\cos i}+a'\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial Z'\partial w}\dfrac{u'}{\cos i'}, \\ r\dfrac{\partial\delta'\Omega}{\partial r}=\left(ar\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial Z\partial r}+a\dfrac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)\dfrac{u}{\cos i}+a'r\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial Z'\partial r}\dfrac{u'}{\cos i'}. \end{cases}$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial\Omega}{\partial w}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial r}$ entrant dans $\frac{dW}{dt}$, la variation de cette fonction introduit les termes en u, u_1, u', au lieu des termes en $\delta I, \delta\Pi, \delta\Pi'$.

7.

Pour calculer l'expression $\delta'\frac{\partial\Omega}{\partial Z}$, qui sera nécessaire plus tard, il faut prendre la variation de

$$\frac{\partial\Omega}{\partial Z}=-\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)r'\sin I\sin(w'+\Pi')\,;$$

substituant dans le résultat, pour $\delta I, \delta\Pi, \delta\Pi'$, leurs valeurs, il vient

$$\begin{aligned} \delta'\frac{\partial\Omega}{\partial Z}=&-\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\cos I\cdot r'\sin(w'+\Pi')\left(\frac{q_1}{\cos i}-\frac{q_1'}{\cos i'}\right) \\ &-\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\sin I\cdot r'\cos(w'+\Pi')\left(\operatorname{coséc} I\cdot\frac{p_1}{\cos i}-\cot I\cdot\frac{p_1'}{\cos i'}\right) \\ &+\frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}\sin^2 I\cdot ar'^2\sin^2(w'+\Pi')\cdot\frac{u}{\cos i} \\ &-\frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}\sin^2 I\cdot a'rr'\sin(w'+\Pi')\sin(w+\Pi)\cdot\frac{u'}{\cos i'}. \end{aligned}$$

Éliminant p_1, p_1', q_1, q_1', par les équations (4), et posant, comme définitions,

$$(8)\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial^2 Z}=\dfrac{m'}{1+m}\dfrac{3}{\Delta^5}\sin^2 I\cdot r'^2\sin^2(w'+\Pi')-\dfrac{m'}{1+m}\dfrac{1}{\Delta^3}, \\ \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial Z\partial Z'}=-\dfrac{m'}{1+m}\dfrac{1}{\Delta^5}\sin^2 I\cdot rr'\sin(w+\Pi)\sin(w'+\Pi') \\ \qquad\qquad +\dfrac{m'}{1+m}\left(\dfrac{1}{\Delta^3}-\dfrac{1}{r'^3}\right)\cos I, \end{cases}$$

on a finalement

$$(9)\quad \begin{cases} \delta'\dfrac{\partial\Omega}{\partial Z}=\left(a\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial Z^2}-\dfrac{a}{r}\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}+\dfrac{e\sin w}{rf^2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial w}\right)\dfrac{u}{\cos i}-\dfrac{1}{rf}\dfrac{\partial\Omega}{\partial w}\dfrac{u_1}{\cos i} \\ \qquad +a'\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial Z\partial Z'}\dfrac{u'}{\cos i'}. \end{cases}$$

8.

L'inclinaison peut aussi s'exprimer en fonction de u, u_1. En effet, les équations (3)* donnent, en substituant les valeurs de p et de q dans les équations (17)*, *Première partie*,

$$\sin i \sin(\sigma-\theta_0) = -p_1\cos\Phi + q_1\sin\Phi,$$
$$\sin i\cos(\sigma-\theta_0) = \sin i_0 + p_1\sin\Phi + q_1\cos\Phi,$$

d'où l'on tire

$$\cos^2 i = \cos^2 i_0 - 2p_1\sin\Phi\sin i_0 - 2q_1\cos\Phi\sin i_0 - p_1^2 - q_1^2,$$

ou, en négligeant les secondes puissances de p_1, q_1,

$$\cos^2 i = \cos^2 i_0 - 2p_1\sin\Phi\sin i_0 - 2q_1\cos\Phi\sin i_0;$$

extrayant la racine carrée avec la même approximation, il vient

$$\cos i = \cos i_0 - p_1\sin\Phi\tang i_0 - q\cos\Phi\tang i_0,$$

et, en remplaçant p_1, q_1 par leurs valeurs,

$$(10)\quad \begin{cases} \cos i = \cos i_0 - \dfrac{\sin i_0}{f}\left[\sin(w+\varpi_0-\theta_0)+e\sin(\varpi_0-\theta_0)\right]\dfrac{u}{\cos i_0} \\ \qquad -\dfrac{\sin i_0}{f}\cos(w+\varpi_0-\theta_0)\dfrac{u_1}{\cos i_0}. \end{cases}$$

Dans le cas des petites inclinaisons, les termes qui dépendent de u, u_1, u' dans les développements précédents, sont peu ou point sensibles. Lorsque les inclinaisons sont considérables, elles ne peuvent amener de termes bien grands dans les expressions qui précèdent, puisqu'elles renferment les rapports $\dfrac{u}{\cos i}$, $\dfrac{u_1}{\cos i}$, $\dfrac{u'}{\cos i}$, et que ces rapports ont comme facteur, soit $\sin I$, soit $\sin^2 I$. On peut même faire en sorte que les termes perturbateurs de l'équation (10) soient nuls;

il suffit pour cela de choisir le plan fondamental, qui est arbitraire dans la méthode de M. Hansen, de manière que $i_0 = 0$. La trigonométrie donne le moyen de passer ensuite à l'écliptique ou à l'équateur.

9.

Il résulte de l'art. 2 qu'on a

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\delta W}{d\varepsilon} &= A\frac{a}{r}n\delta z + B\nu + C\delta\frac{h}{h_0} + D\frac{u}{\cos i} + E\frac{u_1}{\cos i} \\ &\quad + Fn'\delta z' + G\nu' + H\frac{u'}{\cos i'}, \end{aligned} \right.$$

expression dont il faut déterminer les coefficients $A, B, \ldots$, et dans laquelle les seconds facteurs de la première ligne du second membre représentent les perturbations complètes du premier ordre de la planète troublée, tandis que les premiers facteurs s'étendent à toutes les planètes troublantes : chacune de celles-ci introduit trois termes analogues à ceux de la seconde ligne.

Calcul de A. — La fonction T, *Première partie*, renferme r et w, qui sont des fonctions de $n\delta z$, tandis que r_0 est simplement fonction de l'anomalie moyenne $g = n_0 t + c_0$; $n\delta z$ étant la variation de cette anomalie moyenne, on a

$$A\frac{a}{r} = r_0\frac{\partial T'}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial g},$$

après avoir posé

$$T = r_0 T',$$

et en se rappelant que r_0 est ici constant; il vient ensuite aisément

$$A = r_0\frac{\partial T'}{\partial \varepsilon}.$$

Différentiant la relation $T = r_0 T'$, il vient

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = r_0\frac{\partial T'}{\partial \varepsilon} + T'\frac{\partial r_0}{\partial \varepsilon},$$

ou bien

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = r_0\frac{\partial T'}{\partial \varepsilon} + T' a_0 e_0 \sin\varepsilon;$$

par suite, en supprimant les indices qui deviennent inutiles,

$$(12)\qquad A = \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - \frac{T}{r} ae\sin\varepsilon .$$

Le premier terme de A s'obtient par une différentiation directe; pour obtenir le second, on pose

$$\beta = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\operatorname{arc}\sin e),$$

et l'on trouve

$$(13)\qquad \frac{a}{r} = \frac{1}{f} + \frac{2\beta}{f}\cos\varepsilon + \frac{2\beta^2}{f}\cos 2\varepsilon + \frac{2\beta^3}{f}\cos 3\varepsilon + \cdots,$$

$$(14)\qquad \frac{ae\sin\varepsilon}{r} = 2\beta\sin\varepsilon + 2\beta^2\sin 2\varepsilon + 2\beta^3\sin 3e + \cdots$$

En multipliant T par cette dernière série, on a le second terme de A; enfin, en multipliant A par la série (13), on obtient le coefficient de $n\partial z$.

Calcul de B. — Ce coefficient est égal à $\frac{\partial T}{\partial \nu} = r\frac{\partial T}{\partial r}$. En différentiant T, fonction dans laquelle r_0 est constant, on a

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{r_0}{f_0}\left\{2\frac{\rho}{r}\cos(\bar{w}-\omega) - 1 + \frac{2h^2}{a_0h_0^2f_0^2}\rho\left[\cos(\bar{w}-\omega)-1\right]\right\}\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial w}$$
$$+\frac{2r_0}{f_0}\rho\sin(\bar{w}-\omega)\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} - \frac{2r_0}{f_0r^2}\rho\cos(\bar{w}-\omega)\frac{\partial\Omega}{\partial w},$$

ou bien, en se bornant à la première approximation,

$$r\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{f}\left\{2\rho\cos(w-\omega) - r + \frac{2r\rho}{af^2}\left[\cos(w-\omega)-1\right]\right\}r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial w}$$
$$+\frac{2}{f}\rho\sin(w-\omega)r^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} - \frac{2}{f}\rho\cos(w-\omega)\frac{\partial\Omega}{\partial w}.$$

Mais, par un calcul semblable à celui qui donne la relation (60)*, *Première partie*, on trouve

$$(15)\qquad r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial w} = \frac{r}{af}\frac{\partial . r\frac{\partial\Omega}{\partial r}}{\partial \varepsilon} - \left(r^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\frac{er\sin w}{af^2},$$

en sorte que, si l'on pose

$$V = \frac{1}{f}\left\{2\rho\cos(w-\omega) + \frac{2\rho r}{af^2}[\cos(w-\omega)-1]\right\} r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial w}$$
$$+\frac{2}{f}\rho\sin(w-\omega)\left(r^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right),$$

$$X = -\frac{2}{f}\rho\cos(w-\omega)\frac{\partial\Omega}{\partial w}-\frac{2}{f}\rho\sin(w-\omega)r\frac{\partial\Omega}{\partial r},$$

on aura

$$(16) \qquad B = V + X.$$

En faisant usage des équations (60)*, *Première partie*, et (15), on obtient

$$(17) \qquad V = M\frac{ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}}{\partial\epsilon}+N\left(ar^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right),$$

$$(18) \qquad X = M'a\frac{\partial\Omega}{\partial\epsilon}+N'ar\frac{\partial\Omega}{\partial r},$$

où l'on a posé

$$M' = -\frac{2}{af^2}\rho r\cos(w-\omega),$$

$$N' = -\frac{2}{af^3}[\rho r\sin(w-\omega)-e\rho r\sin\omega].$$

Ces fonctions, M' et N', peuvent s'écrire

$$(19)\begin{cases} M' = \frac{1}{f^2}[-2e^2+2e\cos\epsilon-e^2\cos(\eta+\epsilon)+2e\cos\eta-(2-e^2)\cos(\eta-\epsilon)], \\ N' = \frac{1}{f^3}[2e\sin\epsilon-e^2\sin(\eta+\epsilon)+(2-e^2)\sin(\eta-\epsilon)]. \end{cases}$$

Calcul de C. — En différentiant par rapport à h l'expression rigoureuse de T, on a

$$\frac{\partial T}{\partial h}=\frac{h_0r_0}{a_0n_0}\frac{4h\rho}{h_0^2a_0f_0^2}[\cos(\overline{w}-\omega)-1]\frac{\partial\Omega}{\partial w},$$

ou bien, en se bornant à la première approximation,

$$C = \frac{4\rho r}{af^2}[\cos(w-\omega)-1].$$

Or, si l'on change τ en t dans l'expression rigoureuse de T, il vient

$$\overline{T} = \frac{r}{f}\frac{\partial\Omega}{\partial w};$$

par suite,

$$T + \overline{T} + X = 2C. \tag{20}$$

Calcul de D, E, H. — Désignant, comme précédemment, par δ' la variation d'une fonction lorsqu'on y fait varier I, Π, Π', il vient

$$\delta' T = \frac{1}{f}\left\{2\rho\cos(w-\omega) - r + \frac{2\rho r}{af^2}[\cos(w-\omega)-1]\right\}\delta'\frac{\partial\Omega}{\partial w}$$
$$+\frac{2}{f}\rho\sin(w-\omega)\, r\,\delta'\frac{\partial\Omega}{\partial r};$$

substituant pour $\delta'\frac{\partial\Omega}{\partial w}$ et $\delta'\frac{\partial\Omega}{\partial r}$ leurs valeurs fournies par les équations (7), et posant

$$P = \frac{1}{f}\left\{2\rho\cos(w-\omega) - r + \frac{2\rho r}{af^2}[\cos(w-\omega)-1]\right\} a\frac{\partial^2\Omega}{\partial w\partial Z}$$
$$+\frac{2}{f}\rho\sin(w-\omega)\, ar\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial Z},$$

$$Q = \frac{1}{f}\left\{2\rho\sin(w-\omega) - \left[2\rho\cos(w-\omega) - r + \frac{2\rho r}{af^2}(\cos(w-\omega)-1)\right]\frac{er\sin w}{af^2}\right\} a\frac{\partial\Omega}{\partial Z},$$

on obtient

$$D = P + Q,$$

$$E = \frac{1}{f^2}\left\{2\rho r\cos(w-\omega) - r^2 + \frac{2\rho r^2}{af^2}[\cos(w-\omega)-1]\right\}\frac{\partial\Omega}{\partial Z},$$

$$H = \frac{1}{f}\left\{2\rho\cos(w-\omega) - r + \frac{2\rho r}{af^2}[\cos(w-\omega)-1]\right\} a'\frac{\partial^2\Omega}{\partial w\partial Z'}$$
$$+\frac{2}{f}\rho\sin(w-\omega).a'r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial Z'},$$

ou, en éliminant les dérivées de Ω par rapport à w,

$$\left\{\begin{aligned} D &= Ma^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon\partial Z} + N\left(a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z} + a^2 r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial Z}\right),\\ E &= Ma^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z},\\ H &= Maa'\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon\partial Z'} + Naa'r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial Z'}.\end{aligned}\right. \tag{21}$$

4.

Les quantités p_1, q_1 peuvent s'exprimer en fonction de u, et de $u_1 = \frac{du}{dt}$. En effet, remplaçant z par t dans la valeur de u, art. 18, *Première partie*, cette valeur devient

$$u = q_1 \frac{r}{a} \sin(w + \Pi_0) + p_1 \frac{r}{a} \cos(w + \Pi_0) ;$$

par suite,

$$u_1 = \frac{q_1}{af} r [\cos(w + \Pi_0) + e \cos \Pi_0] - \frac{p_1}{af} r [\sin(w + \Pi_0) + e \sin \Pi_0] ,$$

d'où l'on tire

$$(4) \quad \begin{cases} p_1 = \frac{u}{f^2} [\cos(w + \Pi) + e \cos \Pi] - \frac{u_1}{f} \sin(w + \Pi) , \\ q_1 = \frac{u}{f^2} [\sin(w + \Pi) + e \sin \Pi] + \frac{u_1}{f} \cos(w + \Pi) , \end{cases}$$

où l'on a remplacé Π_0 par Π, ce qui n'a pas ici d'influence sensible.

On aurait des expressions analogues pour p_1', q_1'.

5.

De la relation

$$\Omega = \frac{m'}{1 + m} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{rr'H}{r'^3} \right) ,$$

on tire

$$\delta'\Omega = \frac{m'}{1 + m} rr' \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \delta' H ,$$

et de la valeur de H on déduit celle de $\delta' H$, qui, substituée dans la relation précédente, donne

$$\delta'\Omega = \frac{m'}{1 + m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) rr' \sin I \left\{ \begin{array}{l} - \cos(w + \Pi) \sin(w' + \Pi') \cdot \frac{p_1}{\cos i} \\ - \sin(w + \Pi) \sin(w' + \Pi') \cdot \frac{q_1}{\cos i} \\ + \sin(w + \Pi) \cos(w' + \Pi') \cdot \frac{p_1'}{\cos i'} \\ + \sin(w + \Pi) \sin(w' + \Pi') \cdot \frac{q_1'}{\cos i'} \end{array} \right\} .$$

Or

$$\frac{\partial\Omega}{\partial Z}=-\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)r'\sin I\sin(w'+\Pi'),$$

et si de plus, par analogie et comme définition de $\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}$, on pose

$$\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}=-\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)r\sin I\sin(w+\Pi),$$

on aura

$$\begin{aligned}\delta'\Omega=&\ r\cos(w+\Pi)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\frac{p_1}{\cos i}+r\sin(w+\Pi)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\frac{q_1}{\cos i}\\&+r'\cos(w'+\Pi)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}\frac{p'_1}{\cos i'}+r'\sin(w'+\Pi')\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}\frac{q'_1}{\cos i'};\end{aligned}$$

comme, de plus,

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned}au&=q_1r\sin(w+\Pi)+p_1r\cos(w+\Pi),\\a'u'&=q'_1r'\sin(w'+\Pi')+p'_1r'\cos(w'+\Pi'),\end{aligned}\right.$$

il vient finalement

$$(6)\qquad\delta'\Omega=a\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\frac{u}{\cos i}+a'\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}\frac{u'}{\cos i'};$$

$\delta'\Omega$ se trouve ainsi exprimé en fonction des deux variables u, u', au lieu des trois I,Π,Π'.

6.

Différentiant cette expression de $\delta'\Omega$ successivement par rapport à r et à w, il vient

$$\frac{\partial\delta'\Omega}{\partial w}=a\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z\partial w}\frac{u}{\cos i}+a\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\frac{\partial u}{\partial w}\frac{1}{\cos i}+a'\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z'\partial w}\frac{u'}{\cos i'},$$

$$r\frac{\partial\delta'\Omega}{\partial r}=ar\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z\partial r}\frac{u}{\cos i}+ar\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{\cos i}+a'r\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z'\partial r}\frac{u'}{\cos i'};$$

de la première des équations (5), on tire

$$r\frac{\partial u}{\partial r}=u,$$

$$a\frac{\partial u}{\partial w}=-\frac{re\sin w}{f^2}u+\frac{r}{f}u_1,$$

11.

L'équation (20), *Première partie*, indépendamment de ce contrôle, permet de calculer directement les perturbations en longitude. En effet, on peut l'écrire

$$1+\delta\frac{dz}{dt}=\left(1+\delta\frac{h_0}{h}\right)(1+\nu)^{-2},$$

d'où, en s'arrêtant aux termes du second ordre, et éliminant dt,

$$n\delta z=\int\frac{r}{a}\left(\delta\frac{h_0}{h}-2\delta\nu-2\nu\delta\frac{h_0}{h}+3\nu^2\right)d\epsilon. \tag{29}$$

Dans le second membre, il faut substituer aux deux premiers termes les perturbations du second ordre; les facteurs des autres sont les perturbations du premier ordre.

12.

Pour calculer les perturbations en latitude, on a le développement

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d\delta R}{d\epsilon}&=A'\frac{a}{r}n\delta z+B'\nu+C'\delta\frac{h}{h_0}+D'\frac{u}{\cos i}+E'\frac{u_1}{\cos i}\\&\quad+F'n'\delta z'+G'\nu'+H'\frac{u'}{\cos i'}\cdot\end{aligned}\right.$$

Calcul de A'. — Se rappelant ici que

$$\frac{dR}{d\epsilon}=U=\frac{r^2\rho}{af}\sin(\omega-w)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\cos i=Qa^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\cos i,$$

où l'on a fait

$$Q=\frac{r^2\rho}{a^3f}\sin(\omega-w),$$

on obtient

$$A'=\frac{\partial U}{\partial\epsilon}-U\frac{ae\sin\epsilon}{r}. \tag{31}$$

Calcul de B'. — En raisonnant comme à l'art. 9, on trouve

$$B'=r\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{r^2\rho}{af}\sin(\omega-w)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\cos i+\frac{r^2\rho}{af}\sin(\omega-w).r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial Z}\cos i;$$

si donc on pose

$$Y = Q a^2 r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial Z}, \tag{32}$$

il vient

$$B' = U + Y. \tag{33}$$

Calcul de C'. — En différentiant la valeur rigoureuse de $\frac{dR}{d\varepsilon}$ par rapport à h, on trouve

$$C' = U.$$

Calcul de D', E', H'. — En prenant les variations de U par rapport à la caractéristique δ', puis éliminant les dérivées par rapport à w, à l'aide de l'équation (60)*, *Première partie*, et posant

$$D' = D'_1 + D'_2, \qquad E' = E'_1 + E'_2,$$

il vient, en ayant aussi égard aux équations (9) et (10),

$$D'_1 = \frac{pr^2}{af}\sin(\omega - w).\left(a\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z^2} + \frac{e\sin w}{af^3}\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} - \frac{1+e^2+2e\cos w}{af^4} r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\cos i,$$

$$E'_1 = -\frac{pr^2}{a^2f^3}\sin(\omega - w).\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} - \frac{e\sin w}{f} r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\cos i;$$

$$D'_2 = -\frac{pr^2}{af^3}\sin(\omega - w).[\sin(w+\varpi_0-\theta_0) + e\sin(\varpi_0-\theta_0)]\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\sin i,$$

$$E'_2 = -\frac{pr^2}{af^2}\sin(\omega - w)\cos(w+\varpi_0-\theta_0)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\sin i.$$

Ces différents coefficients peuvent s'exprimer en fonctions finies de l'anomalie excentrique. Si l'on pose, pour abréger,

$$P = \frac{pr}{a^2f}\sin(\omega - w),$$

$$W = ra^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z^2} + \frac{re\sin w}{af^3}\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} - \frac{r(1+e^2+2e\cos w)}{af^4}r\frac{\partial\Omega}{\partial r}.$$

$$W_1 = -\frac{r}{f^2}\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} + \frac{re\sin w}{f^3}r\frac{\partial\Omega}{\partial r},$$

on a

$$D'_1 = PW\cos i, \qquad E'_1 = PW_1\cos i; \tag{34}$$

puis introduisant l'anomalie excentrique, il vient finalement

$$(35)\quad \begin{cases} P = e\sin\varepsilon - e\sin\eta + \sin(\eta-\varepsilon), \\ W = (1-e\cos\varepsilon)a^3\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial Z^2} + \dfrac{e\sin\varepsilon}{f^2}a\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} - \dfrac{1+e\cos\varepsilon}{f^2}ar\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}, \\ W_1 = -\dfrac{1-e\cos\varepsilon}{f^2}a\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} + \dfrac{e\sin\varepsilon}{f^2}ar\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}. \end{cases}$$

On peut encore développer D_1', E_1', en se servant de la quantité Q déjà développée. En effet, on peut écrire

$$(36)\quad \begin{cases} D_1' = Qa^3\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial Z^2}\cos i + Q_1 a\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}\cos i + Q_2 ar\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}\cos i, \\ E_1' = -\dfrac{Q}{f^2}a\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}\cos i + Q_1 ar\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}\cos i, \end{cases}$$

où Q est donné par l'équation (65), *Première partie*, et où l'on a

$$(37)\quad \begin{cases} Q_1 = \dfrac{1}{f^2}\left[\tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}e^2\cos(\eta+\varepsilon) - \tfrac{1}{2}e\cos\eta - \tfrac{1}{2}e^2\cos(\eta-\varepsilon)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \tfrac{1}{2}e\cos(\eta-2\varepsilon)\right], \\ Q_2 = \dfrac{1}{f^2}\left[-e\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}e^2\sin(\eta+\varepsilon) + \tfrac{1}{2}e\sin\eta\right. \\ \qquad\qquad \left. -(1-\tfrac{1}{2}e^2)\sin(\eta-\varepsilon) - \tfrac{1}{2}e\sin(\eta-2\varepsilon)\right]. \end{cases}$$

Pour le calcul de D_2', E_2', on pose

$$K_1 = \frac{pr^2\sin w}{af^2}\sin(\omega - w)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z},$$

$$K_2 = -\frac{pr^2\cos w}{af^2}\sin(\omega - w)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z},$$

ce qui donne

$$(38)\quad \begin{cases} D_2' = -K_1\cos(\varpi-\theta)\sin i + K_2\sin(\varpi-\theta)\sin i - \dfrac{Ue\sin(\varpi-\theta)}{f^2\cos i}\sin i, \\ E_2' = K_1 f\sin(\varpi-\theta)\sin i + K_2 f\cos(\varpi-\theta)\sin i. \end{cases}$$

On peut aussi développer ces formules de deux manières. Posan

$$(39)\quad W' = \frac{\sin\varepsilon}{f}a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z}, \qquad W_1' = -\frac{\cos\varepsilon - e}{f^2}a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z},$$

on a

$$(40)\quad K_1 = P\,W', \qquad K_2 = P\,W_1'.$$

Le second procédé consiste à développer le produit, au lieu de développer les deux facteurs. On a ainsi

$$(41)\qquad K_1 = \frac{f}{e} Q_1 a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z}, \qquad K_2 = Q_3 a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z},$$

où

$$(42)\qquad \left\{ \begin{aligned} Q_3 = \frac{1}{f^2} [& c^2 \sin \varepsilon - \tfrac{1}{2} e \sin 2\varepsilon + \tfrac{1}{2} e \sin(\eta + \varepsilon) - \tfrac{1}{2}(1 + 2e^2) \sin \eta \\ & + \tfrac{3}{2} e \sin(\eta - \varepsilon) - \tfrac{1}{2} \sin(\eta - 2\varepsilon)] . \end{aligned} \right.$$

Il faudrait que l'inclinaison fût considérable pour que tous ces termes fussent sensibles.

Calcul de F', G'. — Le développement (30) montre qu'on a

$$(43)\qquad F' = \frac{\partial U}{\partial c'};$$

de plus $G' = r' \dfrac{\partial U}{\partial r'}$, et comme le seul facteur de U qui contienne r' est $\dfrac{\partial \Omega}{\partial Z}$, fonction homogène et de degré -2 par rapport à r et à r', on a

$$r \frac{\partial U}{\partial r} + r' \frac{\partial U}{\partial r'} = -2U;$$

mais

$$r \frac{\partial U}{\partial r} = Y = Q a^2 r \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \cos i,$$

par suite

$$(44)\qquad G' = -2U - Y.$$

Calcul de H'. — En comparant l'expression rigoureuse de U, (57), *Première partie*, avec la relation (9), on voit aisément que

$$(45)\qquad H' = Q a^2 a' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z \partial Z'} \cos i .$$

On obtient ensuite δR par intégration.

La substitution des résultats ainsi obtenus dans les équations (0) fournira les perturbations cherchées.

§ II.

Développement des quantités auxiliaires servant au calcul des perturbations dépendant du carré de la masse perturbatrice.

13.

A la variation de $\frac{dW}{d\varepsilon}$, telle qu'elle a été donnée art. 9, il faut ajouter deux corrections, provenant de la différence $(n) - n_0$; l'une est duë au changement que cette différence amène dans les petits diviseurs, et l'on a montré, art. 32, *Première partie*, comment on peut en tenir compte; l'autre provient de la variation qu'éprouve la quantité $\lambda = \frac{1}{2}\frac{n'}{n}e$, pour la même cause, et qui ajoute au second membre de $\frac{d\delta W}{d\varepsilon}$ un terme $\frac{\partial T}{\partial \lambda}\delta\lambda$. Or, en prenant la variation de λ, on trouve

$$\delta\lambda = -\lambda\frac{\Delta n}{n};$$

de plus, si l'on désigne par F une fonction de la forme

$$F = A\,e^{(j\varepsilon - j'g')i},$$

où

$$g' = N(\varepsilon - e\sin\varepsilon) - Nc + c',$$

et qu'on élimine g' entre ces deux relations, il vient

$$F = B\,e^{[(j - j'N)\varepsilon - j'(c' - cN)]i},$$

et comme

$$e^{-j'g'i} = e^{-j'N\varepsilon i}\,e^{-j'(c' - cN)i}\,e^{j'\lambda(e^{\varepsilon i} - e^{-\varepsilon i})},$$

on a, pour déterminer B,

$$A\,e^{j'\lambda(e^{\varepsilon i} - e^{-\varepsilon i})} = B.$$

Puisque A n'est pas fonction de λ, on tire de cette dernière équation

$$\frac{\partial B}{\partial \lambda} = j'B(e^{\varepsilon i} - e^{-\varepsilon i}),$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = j'(B_{j+1} - B_{j-1})\,e^{[(j - j'N)\varepsilon - j'(c' - cN)]i}. \tag{46}$$

Les coefficients de $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ se déduiront donc de ceux de F, suivant une règle très simple, qu'il faudra appliquer aux trois sortes de termes contenus dans T.

14.

Développement du terme $A\,\frac{a}{r}\,n\delta z$. — De la valeur de $\frac{a}{r}$, art. 9, en posant

$$\frac{1-f}{f}=\alpha_0,\quad \frac{6}{f}=\alpha_1,\quad \frac{6^2}{f}=\alpha_2,\ \cdots,$$

on tire

$$\frac{a}{r}-1=\alpha_0+2\alpha_1\cos\varepsilon+2\alpha_2\cos2\varepsilon+\cdots,$$

et comme

$$n\delta z=\mathfrak{A}e^{\varphi i},$$

il vient

$$(47)\qquad \left(\frac{a}{r}-1\right)n\delta z=\begin{bmatrix}\alpha_0\mathfrak{A}_j+\alpha_1\mathfrak{A}_{j-1}+\alpha_2\mathfrak{A}_{j-2}+\cdots\\ +\alpha_1\mathfrak{A}_{j+1}+\alpha_2\mathfrak{A}_{j+2}+\cdots\end{bmatrix}e^{\varphi i},$$

formule générale, puisque $n\delta z$ ne contient aucun terme constant.

On a vu, art. 26, *Première partie*, que, si l'on a $F=Ke^{\varphi i}$, il en résulte

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}=i\left[jK_j-\tfrac{1}{2}j'Ne(K_{j-1}+K_{j+1})\right]e^{\varphi i};$$

appliquant cette formule aux trois sortes de termes de T, on a

$$(48)\qquad \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}=A_je^{\varphi i}+B_je^{(\varphi-\eta)i}+C_je^{(\varphi+\eta)i}.$$

Il y a une équation de condition servant à vérifier ces calculs. En effet, on démontre aisément que

$$(49)\qquad \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial T}{\partial \eta}=\frac{\partial \overline{T}}{\partial \varepsilon};$$

ici

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \varepsilon}=(A_j+B_{j+1}+C_{j-1})e^{\varphi i},$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \eta}=(-G_{j+1}+H_{j-1})e^{\varphi i};$$

de plus, supposant que l'on ait

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = D_j e^{\varphi i},$$

l'équation (49) donne

$$(50) \quad \begin{cases} D_j = A_j + B_{j+1} + C_{j-1} \\ \qquad - G_{j+1} + H_{j-1}. \end{cases}$$

Pour obtenir $T\dfrac{ae\sin\varepsilon}{r}$, on multiplie T, art. 28, *Première partie*, par

$$\frac{ae\sin\varepsilon}{r} = - i6(e^{\varepsilon i} - e^{-\varepsilon i}) - i6^2(e^{2\varepsilon i} - e^{-2\varepsilon i}) - \cdots,$$

ce qui donne

$$(51) \quad \begin{cases} T\dfrac{ae\sin\varepsilon}{r} = - i[6(F_{j-1} - F_{j+1}) + 6^2(F_{j-2} - F_{j+2}) + \cdots]e^{\varphi i} \\ \qquad - i[6(G_{j-1} - G_{j+1}) + 6^2(G_{j-2} - G_{j+2}) + \cdots]e^{(\varphi - \eta)i} \\ \qquad - i[6(H_{j-1} - H_{j+1}) + 6^2(H_{j-2} - H_{j+2}) + \cdots]e^{(\varphi + \eta)i}. \end{cases}$$

15.

Développement de V. — On a obtenu

$$ar\frac{\partial \Omega}{\partial r} = Be^{\varphi i},$$

d'où

$$\frac{\partial . ar\dfrac{\partial \Omega}{\partial r}}{\partial \varepsilon} = i[jB_j - \tfrac{1}{2}j'Ne(B_{j-1} + B_{j+1})]e^{\varphi i};$$

posant de plus

$$ar^2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + ar\frac{\partial \Omega}{\partial r} = Qe^{\varphi i},$$

et faisant la somme des produits obtenus en multipliant cette équation par N et la précédente par M, on a V sous la forme obtenue pour T.

16.

Développement de X. — Sa forme est la même que celle de T et de V, mais les facteurs ont une autre valeur. On a

$$
\begin{aligned}
M'a\frac{\partial\Omega}{\partial\iota}+N'ar\frac{\partial\Omega}{\partial r} = {} & [-2e^2A_j+e(A_{j-1}+A_{j+1})-ie(B_{j-1}-B_{j+1})]\,e^{\varphi i} \\
& +\{eA_j-\tfrac{1}{2}e^2A_{j+1}-\tfrac{1}{2}(2-e^2)A_{j+1}-i[-\tfrac{1}{2}e^2B_{j-1}+\tfrac{1}{2}(2-e^2)B_{j+1}]\}\,e^{(\varphi+\eta)i} \\
& +\{eA_j-\tfrac{1}{2}e^2A_{j+1}-\tfrac{1}{2}(2-e^2)A_{j-1}-i[\tfrac{1}{2}e^2B_{j+1}-\tfrac{1}{2}(2-e^2)B_{j-1}]\}\,e^{(\varphi-\eta)i}.
\end{aligned}
$$

Si l'on pose

$$
(52)\quad \left\{
\begin{aligned}
J_j &= -2e^2A_j+e(A_{j-1}+A_{j+1})-ie(B_{j-1}-B_{j+1}), \\
K_j &= eA_j-\tfrac{1}{2}e^2A_{j+1}-\tfrac{1}{2}(2-e^2)A_{j-1}-i\{[\tfrac{1}{2}e^2B_{j+1}-\tfrac{1}{2}(2-e^2)B_{j-1}]\}, \\
L_j &= eA_j-\tfrac{1}{2}e^2A_{j-1}-\tfrac{1}{2}(2-e^2)A_{j+1}-i\{[-\tfrac{1}{2}e^2B_{j-1}+\tfrac{1}{2}(2-e^2)B_{j+1}]\},
\end{aligned}
\right.
$$

il vient

$$
(53)\qquad X = Je^{\varphi i}+Ke^{(\varphi-\eta)i}+Le^{(\varphi+\eta)i}.
$$

Des équations (52) on conclut les équations de condition

$$
(54)\qquad J_{-j,-j'} = (J)_{j,j'}, \qquad L_{-j,-j'} = (K)_{j,j'}.
$$

Des équations

$$
\overline{X} = -\frac{2r}{f}\frac{\partial\Omega}{\partial w}, \qquad \overline{T} = \frac{r}{f}\frac{\partial\Omega}{\partial w},
$$

on tire

$$
\overline{X}+2\overline{T}=0,
$$

et, par suite,

$$
(55)\qquad J_j+K_{j+1}+L_{j-1}+2(F_j+G_{j+1}+H_{j-1})=0,
$$

équation de condition qui servira à contrôler les calculs.

17.

Développement de D. — De l'expression de $\frac{\partial\Omega}{\partial Z}$, on déduit celle de $\frac{\partial^2\Omega}{\partial\iota\partial Z}$, ce qui donne

$$
a^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial\iota\partial Z} = Re^{\varphi i};
$$

on forme ensuite

$$a^2 r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial Z} + a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z} = S e^{\varphi i}.$$

Remplaçant maintenant, dans le second membre de l'équation (67), *Première partie*, A par R, B par S, on a D sous la forme

$$(56) \qquad D = (F) e^{\varphi i} + (G)^{(\varphi - \eta) i} + (H) e^{(\varphi + \eta) i}.$$

Développement de E. — Si l'on pose

$$a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z} = Q e^{\varphi i},$$

et, si l'on remplace dans le second membre de l'équation (67), *Première partie*, A par Q, B par 0, on obtient E sous la forme

$$(57) \qquad E = F e^{\varphi i} + G e^{(\varphi - \eta) i} + H e^{(\varphi + \eta) i}.$$

18.

On peut calculer autrement la somme des deux derniers termes de la première ligne du second membre de l'équation (11). En effet, calculant immédiatement les produits

$$a^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \iota \partial Z} \frac{u}{\cos i}, \qquad \left(a^2 r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial Z} + a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right) \frac{u}{\cos i}, \qquad a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \frac{u_1}{\cos i},$$

posant de plus

$$a^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \iota \partial Z} \frac{u}{\cos i} + a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \frac{u_1}{\cos i} = U e^{\varphi i},$$

$$\left(a^2 r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial Z} + a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right) \frac{u}{\cos i} = (V) e^{\varphi i},$$

et, remplaçant dans le second membre de l'équation (67), *Première partie*, A par U, B par (V), on trouve, pour la somme en question, la forme

$$D \frac{u}{\cos i} + E \frac{u_1}{\cos i} = F e^{\varphi i} + G e^{(\varphi + \eta) i} + H e^{(\varphi - \eta) i}.$$

M. Hansen préfère le premier procédé.

19.

L'équation (24), qui sert à contrôler les résultats, doit avoir son second membre complété d'un terme

$$\frac{\partial \frac{d\frac{h_0}{h}}{d\epsilon}}{\partial \lambda}\delta\lambda = \frac{\partial \overline{T}}{\partial \lambda}\delta\lambda,$$

qu'on obtient en raisonnant comme à l'art. 13. Les autres coefficients se déduisent, par les équations (25) et (26), de ceux qu'on vient de calculer pour le développement de $\frac{d\delta_1 W}{d\epsilon}$.

20.

Le second membre de l'équation (30) doit être aussi complété par un terme $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$; on le calculera par la relation (46).

Dans A', $\frac{\partial U}{\partial \epsilon}$ s'obtient en appliquant l'équation (48), et $\frac{Uae \sin \epsilon}{r}$ par la relation (51); il faudra remplacer dans ces équations les coefficients de T par ceux de U.

Dans $B' = U + Y$, U se compose en $a^2\frac{\partial \Omega}{\partial Z}$ comme Y en $a^2 r\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial Z}$; on obtiendra donc cette deuxième quantité, en remplaçant dans les équations (75) et (76), *Première partie*, les coefficients D par ceux de $a^2 r\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial Z}$. On obtient ainsi $\frac{Y}{\cos i}$ sous la même forme que $\frac{U}{\cos i}$.

De plus $C' = U$; il ne reste donc qu'à s'occuper de D' et de E'. Négligeant les termes dépendant de D'_2 et de E'_2 et qui donnent lieu à une intégration directe, je rappelle qu'on a

$$\frac{1}{\cos i}D'_1 = PW, \quad \frac{1}{\cos i}E'_1 = PW_1:$$

soit de plus

$$a^3\frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} = (C)e^{\psi\sqrt{-1}},$$

par suite

$$(1-e\cos\varepsilon)a^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z^2}=\{(C)_j-\tfrac{1}{2}e[(C)_{j-1}+(C)_{j+1}]\}e^{\varphi i};$$

soit encore, comme précédemment,

$$a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}=A_j e^{\varphi i},$$

par suite

$$\frac{ae}{f^2}\sin\varepsilon\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}=-\frac{ie}{2f^2}(A_{j-1}-A_{j+1})e^{\varphi i},$$

$$\frac{a(1-e\cos\varepsilon)}{f^2}\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}=\frac{1}{f^2}[A_j-\tfrac{1}{2}e(A_{j-1}+A_{j+1})]e^{\varphi i};$$

soit enfin

$$ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}=(B)_j e^{\varphi i},$$

par suite

$$\frac{1+e\cos\varepsilon}{f^2}ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}=\frac{1}{f^2}\{(B)_j+\tfrac{1}{2}e[(B)_{j-1}+(B)_{j+1}]\}e^{\varphi i},$$

$$\frac{e\sin\varepsilon}{f^2}ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}=-\frac{ie}{2f^2}[(B)_{j-1}-(B)_{j+1}]e^{\varphi i}.$$

Les valeurs de W, W_1, art. 12, deviennent alors

$$W=\left\{\begin{array}{l}(C)_j-\tfrac{1}{2}e[(C)_{j-1}+(C)_{j+1}]+\dfrac{ie}{2f^2}(A_{j+1}-A_{j-1})\\ -\dfrac{1}{f^2}\{(B)_j+\tfrac{1}{2}e[(B)_{j-1}+(B)_{j+1}]\}\end{array}\right\}e^{\varphi i},$$

$$W_1=\frac{1}{f^2}\{-A_j+\tfrac{1}{2}e(A_{j-1}+A_{j+1})-\tfrac{1}{2}ei[(B)_{j-1}-(B)_{j+1}]\}e^{\varphi i};$$

on a donc, pour W et W_1, des expressions de la forme

$$(58)\qquad W=(\mathfrak{G})e^{\varphi i},\qquad W_1=\mathfrak{G}_1 e^{\varphi i}.$$

Multipliant ces expressions par P, il vient

$$(59)\qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{D'}{\cos i}=Fe^{\varphi i}+Ge^{(\varphi-\eta)i}+He^{(\varphi+\eta)i},\\ \dfrac{F'}{\cos i}=(F)_1e^{\varphi i}+(G)_1e^{(\varphi-\eta)i}+(H)_1e^{(\varphi+\eta)i}.\end{array}\right.$$

Entre les coefficients on a les relations

$$(60)\qquad \begin{cases} F_j = -\tfrac{1}{2} ei\left[(\mathfrak{S})_{j-1} - (\mathfrak{S})_{j+1}\right], \\ G_j = -\tfrac{1}{2} i\left[e(\mathfrak{S})_j - (\mathfrak{S})_{j-1}\right], \\ H_j = \tfrac{1}{2} i\left[e(\mathfrak{S})_j - (\mathfrak{S})_{j+1}\right]. \end{cases}$$

On conclut de là

$$(61)\qquad F_j + G_{j-1} + H_{j+1} = 0\,.$$

21.

On a vu, dans le calcul des perturbations de la latitude, s'introduire la somme des quantités

$$Pe^{\varphi i}, \qquad Qe^{(\varphi-\eta)i}, \qquad Re^{(\varphi+\eta)i},$$

les indices j, j' prenant respectivement les mêmes valeurs dans ces trois termes à la fois. Cette somme peut s'écrire, à un facteur constant près,

$$P\cos\varphi + Q\cos(\varphi-\eta) + R\cos(\varphi+\eta)\,,$$

ou bien,

$$\cos\varphi(P + Q\cos\eta + R\cos\eta) + \sin\varphi(Q\sin\eta - R\sin\eta)\,,$$

et comme, d'après (41)*, *Première partie,* la forme générale de cette expression est

$$M\sin\varphi\sin\eta + N\cos\varphi(\cos\eta - e)\,,$$

il vient

$$N\cos\eta - Ne = R + (Q + R)\cos\eta\,,$$

d'où l'on tire

$$P = -Ne\,, \qquad N = Q + R\,;$$

par suite

$$(62)\qquad P + e(Q + R) = 0\,,$$

équation de condition qu'on pourra employer au contrôle des calculs.

22.

Pour exécuter, avec plus de facilité, les produits indiqués dans ce qui précède, il faut remarquer que

$$(A+iB)e^{\varphi i}\times[(P+iQ)e^{\psi i}+(P-iQ)e^{-\psi i}]$$
$$=[AP-BQ+i(AQ+BP)]e^{(\varphi+\psi)i}+[AP+BQ+i(-AQ+BP)]e^{(\varphi-\psi)i};$$

il s'agit donc d'obtenir les produits deux à deux des coefficients, but qu'on atteindra sans difficulté, en écrivant les coefficients P, Q, dans l'ordre et avec les signes qui suivent, sur le bord inférieur d'une bande de papier,

$$P,\quad -Q,\quad Q,\quad P,$$

puis, on fait glisser la bande de manière que les quatre termes passent successivement au-dessus des coefficients A, B, qu'on a préalablement disposés sur une même ligne horizontale, dans deux colonnes verticales contiguës. La somme algébrique des deux premiers produits donne le coefficient de la partie réelle, tandis qu'en effectuant la somme des deux derniers, on obtiendra celui de la partie imaginaire de la quantité complexe ayant pour argument la somme des arguments des facteurs. Changeant ensuite les signes du second et du troisième produit, puis opérant comme avant ce changement, on obtient les coefficients d'une quantité complexe qui a pour argument la différence entre l'argument du multiplicande et celui du multiplicateur. On pourra disposer ces calculs comme il suit :

	AP	AQ
$\varphi+\psi$	$-BQ$	BP
	$AP-BQ$	$AQ+BP$

	AP	$-AQ$
$\varphi-\psi$	BQ	BP
	$AP+BQ$	$-AQ+BP$

Dans la première colonne de ces deux tableaux, se trouvent les arguments des termes du produit; dans la seconde, les coefficients de la partie réelle, et dans la troisième, ceux de la partie imaginaire des produits. On pourra utiliser la place dont on dispose, pour que les arguments de même ordre soient dans une même colonne verticale.

Dans les calculs qu'on doit effectuer ici, l'argument du multiplicande a presque toujours la forme $\varphi+l\eta$, où l'on doit remplacer l successivement par $-1, 0, 1$, et faire la somme des termes qui en résultent, φ étant lui-même de la forme

$$(j-j'N)\varepsilon-j'(c'-cN)\,;$$

on a aussi pour ψ une expression de même forme

$$(k-k'N)\varepsilon-k'(c'-cN)\,.$$

Le multiplicande étant donc $(A+iB)\,e^{(l\eta+\varphi)i}$, et le multiplicateur $(P+iQ)e^{\psi i}$, on a

$$l,\varphi+\psi\left|\begin{array}{c|c} AP & AQ \\ -BQ & BP \\ \hline AP-BQ & AQ+BP \end{array}\right|,\qquad l,\varphi-\psi\left|\begin{array}{c|c} AP & AQ \\ -BQ & BP \\ \hline AP+BQ & -AQ+BP \end{array}\right|.$$

Si deux facteurs sont tels que $\varphi=\psi$, le produit aura l'un de ses deux termes qui dépendra seulement de l.

Lorsque la différence des arguments amène ponr coefficient de ε une quantité négative, dans l'argument du produit, en sorte qu'on ait $(P+iQ)e^{(-p\varepsilon+q)i}$, on change le signe de i, ce qui donne $(P-iQ)\,e^{(p\varepsilon-q)i}$, et n'altère en rien les résultats.

23.

Il faut avoir soin de calculer avec plus d'exactitude que les autres les termes qui se rapportent aux petits diviseurs introduits par l'intégration. La même précaution doit être prise pour ceux qui renferment t en facteur en dehors des exponentielles, et qui fournissent les inégalités non périodiques, désignées sous le nom de variations *séculaires*. Les développements, § 5, *Première partie*, montrent qu'elles proviennent des termes ayant pour arguments $-\eta+\varepsilon$ et η, ainsi que des termes des facteurs $\frac{an\delta z}{r}$, ν, ... , qui, dans la première approximation, sont multipliés par ε. Les termes ayant pour arguments

$$-\eta+(j-j'N)\varepsilon-U,\quad (j-j'N)\varepsilon-U,\quad -\eta+(j+1-j'N)\varepsilon-U,$$
$$\eta+(j-1-j'N)\varepsilon-U,\quad \eta+(j-j'N)\varepsilon-U,$$

sont ceux par lesquels s'introduit le petit diviseur; le second l'introduit au carré, et les autres à la première puissance.

Les termes ayant pour arguments

$$(j-1-j'N)\varepsilon-U, \quad \eta+(j-2-j'N)\varepsilon-U,$$
$$(j+1-j'N)\varepsilon-U, \quad -\eta+(j+2-j'N)\varepsilon-U,$$

introduisent aussi le petit diviseur à la première puissance; mais en même temps, ces termes sont multipliés par $\frac{1}{2}e$, ce qui atténue l'influence de ce petit diviseur.

21.

Le petit diviseur est aussi introduit dans la recherche de Γ. En effet, en remplaçant h par $\frac{an}{f}$, s par $\frac{a}{r}u$, dans l'art. 9, *Première partie*, on a

$$\cos i\frac{d\Gamma}{d\varepsilon}=\frac{r}{a}\frac{u}{\cos i}\frac{1}{2f}a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z};$$

de sorte qu'en posant

$$\frac{u}{\cos i}\frac{a^2}{2f}\frac{\partial\Omega}{\partial Z}=Z e^{\varphi i},$$

et multipliant les deux membres de cette relation par $\frac{r}{a}=1-e\cos\varepsilon$. on obtient

$$\cos i\frac{d\Gamma}{d\varepsilon}=[Z_j-\tfrac{1}{2}e(Z_{j+1}+Z_{j-1})]e^{\varphi i}.$$

Il suffira, dans la plupart des cas, de conserver les termes recevant le petit diviseur par l'intégration et ceux qui amènent des inégalités non périodiques.

§ III.

Variation séculaire de la longitude moyenne.

25.

Avant de passer à l'intégration des différentielles développées dans ce qui précède, je vais démontrer quelques propositions importantes, relatives aux variations à très longue période.

La variation séculaire de la longitude moyenne se compose des termes de $n z$ proportionnels à t^2 et aux puissances supérieures de t. Les développements de la première approximation nous ont montré que de pareils termes ne peuvent provenir que de la seconde, en sorte qu'en négligeant les termes renfermant t^3 et les puissances supérieures de t, la variation séculaire de la longitude moyenne se réduit aux termes de $n z$ proportionnels à t^2, lorsqu'on ne tient pas compte des puissances de la force perturbatrice supérieures à la seconde. Le théorème de l'invariabilité des grands axes amène forcément la destruction de certains termes qu'il est nécessaire de connaître à l'avance, parce que l'incertitude des dernières décimales et la petitesse des nombres sur lesquels on opère, ne permettent pas de se confier au calcul numérique pour en amener la disparition.

26.

Si l'on fait

$$T_1 = \frac{an}{r} T, \quad A_1 = \frac{\partial T_1}{\partial g}, \quad B_1 = \frac{an}{r} B, \quad C_1 = \frac{an}{r} C,$$

$$D_1 = \frac{an}{r} D, \quad E_1 = \frac{an}{r} E,$$

et qu'on ne tienne compte, pour le moment, que des termes dépendants du carré de la force perturbatrice, il vient

$$\frac{d\delta W}{dt} = A_1 n \delta z + B_1 \nu + C_1 \delta \frac{h}{h_0} + D_1 \frac{u}{\cos i} + E_1 \frac{u_1}{\cos i}. \tag{63}$$

27.

Première proposition. — Si l'on néglige les constantes arbitraires introduites par l'intégration dans la première approximation, le développement de $\frac{d\delta W}{dt}$, suivant les puissances de e^{gt}, n'a pas de terme indépendant.

Chacune des quantités T_1, A_1, B_1, etc., peut se mettre sous la forme

$$\Xi_1 + \Upsilon \cos \eta + \Psi \sin \eta ,$$

et comme on a

$$\cos \eta + \tfrac{1}{2} e = \Sigma_1^\infty a_j \cos j\gamma ,$$
$$\sin \eta = \Sigma_1^\infty b_j \sin j\gamma ,$$

où a_j, b_j sont des fonctions de e, et où γ joue, vis-à-vis de η, le même rôle que g vis-à-vis de ε, l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$\Xi + \Upsilon(\cos \eta + \tfrac{1}{2} e) + \Psi \sin \eta .$$

Les facteurs de Υ et de Ψ, dans cette expression, renfermant à chaque terme les puissances de e^{gt} en facteur, il n'y a donc que Ξ qui puisse posséder un terme constant. Il faut remarquer aussi que dans les seconds facteurs des termes de $\frac{d\delta W}{dt}$, il suffit de tenir compte des termes du premier ordre par rapport aux masses perturbatrices.

De l'expression (61), *Première partie*, on déduit

$$T_1 = M_1 a \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} + N_1 a r \frac{\partial \Omega}{\partial r} ,$$

où

$$M_1 = \frac{an}{r} M , \quad N_1 = \frac{an}{r} N ;$$

or, on peut écrire

$$M_1 = -\frac{3an}{r} - (\cos \eta + \tfrac{1}{2} e) \frac{an}{rf^2} (3e - 4\cos \varepsilon + e \cos 2\varepsilon)$$
$$+ \sin \eta \cdot \frac{an}{rf^2} [(4 - 2e^2) \sin \varepsilon - e \sin 2\varepsilon] ,$$

$$N_1 = (\cos \eta + \tfrac{1}{2} e) \cdot \frac{an}{rf^2} \cdot (2 \sin \varepsilon - e \sin 2\varepsilon)$$
$$- \sin \eta \cdot \frac{an}{rf^2} [e + 2(1 - e^2) \cos \varepsilon - e \cos 2\varepsilon] ,$$

et par suite,

$$T_1 = -\frac{3a^2n}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} - (\cos\eta + \tfrac{1}{2}e)\frac{a^2n}{rf^2}\Big[(3e - 4\cos\varepsilon + e\cos 2\varepsilon)\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} - (2\sin\varepsilon - e\sin 2\varepsilon)r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\Big]$$
$$+ \sin\eta\cdot\frac{a^2n}{rf^2}\Big\{[(4-2e)\sin\varepsilon - e\sin 2\varepsilon]\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} - (e + 2f^2\cos\varepsilon - e\cos 2\varepsilon)r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\Big\};$$

de plus,

$$(66)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} = \dfrac{r}{a}\dfrac{\partial\Omega}{\partial g}, \\ \dfrac{r}{a}\dfrac{\partial\Omega}{\partial g} = \dfrac{af}{r}\dfrac{\partial\Omega}{\partial w} + ae\sin\varepsilon\cdot\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}, \\ \dfrac{r}{a}\dfrac{\partial\Omega}{\partial e} = \dfrac{a}{rf}(2 - e^2 - e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\cdot\dfrac{\partial\Omega}{\partial w} - a(\cos\varepsilon - e)\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}; \end{cases}$$

alors on a, par substitution,

$$T_1 = -3an\frac{\partial\Omega}{\partial g} - (\cos\eta + \tfrac{1}{2}e)\frac{a^2n}{rf^2}\Big\{\frac{r}{a}\Big[3e - 4\cos\varepsilon + e\cos 2\varepsilon - \frac{2r}{ae}(1 - e\cos\varepsilon)\Big]\frac{\partial\Omega}{\partial g} + \frac{2f}{e}(1 - e\cos\varepsilon)\frac{\partial\Omega}{\partial w}\Big\}$$
$$+ \sin\eta\cdot\frac{a^2n}{rf^2}\Big\{[(4-2e)\sin\varepsilon - e\sin 2e]\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} - (e + 2f^2\cos\varepsilon - e\cos 2\varepsilon)r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\Big\}.$$

En éliminant $\frac{\partial\Omega}{\partial w}$, de la valeur de $\frac{\partial\Omega}{\partial e}$, on obtient

$$(67)\quad \frac{2f^2}{a}\frac{\partial\Omega}{\partial e} = \frac{1}{r}[(4 - 2e^2)\sin\varepsilon - e\sin 2\varepsilon]\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} - (e + 2f^2\cos\varepsilon - e\cos 2\varepsilon)\frac{\partial\Omega}{\partial r},$$

et la valeur de T_1 devient

$$(68)\quad T_1 = -3an\frac{\partial\Omega}{\partial g} + \frac{2an}{e}\Big(\frac{\partial\Omega}{\partial g} - \frac{1}{f}\frac{\partial\Omega}{\partial w}\Big)(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e) + 2an\frac{\partial\Omega}{\partial e}\sin\eta,$$

de sorte qu'en laissant de côté, ici et dans la suite, tous les termes qui dépendent de γ, j'ai

$$A_1 = -3an\frac{\partial^2\Omega}{\partial g^2}.$$

28.

En posant aussi $V_1 = \frac{an}{r} V$, on a

$$V_1 = M_1 \frac{\partial . ar \frac{\partial \Omega}{\partial r}}{\partial \varepsilon},$$

ou bien,

$$V_1 = -3anr \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial g} - \frac{3a^2 ne}{r} \sin \varepsilon . \frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

De plus, si l'on fait

$$X_1 = \frac{an}{r} X,$$

il vient

$$X_1 = \frac{3a^2 ne}{rf^2} \left[(\cos \varepsilon - e) \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} + \sin \varepsilon . r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right],$$

ou, en éliminant $\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}$ par l'équation (60), *Première partie,*

$$X_1 = \frac{3a^3(\cos \varepsilon - e)}{r^2 f} ne \frac{\partial \Omega}{\partial w} + \frac{3a^2 ne}{r} \sin \varepsilon . \frac{\partial \Omega}{\partial r},$$

et par suite,

$$B_1 = V_1 + X_1 = -3anr \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial g} + \frac{3a^3 ne(\cos \varepsilon - e)}{r^2 f} \frac{\partial \Omega}{\partial w}.$$

On trouve de plus

$$\overline{T}_1 = \frac{an}{f} \frac{\partial \Omega}{\partial w},$$

$$C_1 = 2(T_1 + X_1 + \overline{T}_1),$$

d'où

$$C_1 = \frac{2an}{f} \left(1 - \frac{3a}{r}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial w}.$$

Il résulte des équations (21), puisqu'il est inutile de tenir compte de N_1,

$$D_1 = -3a^2 n \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z \partial g},$$

$$E_1 = -\frac{3a^3 n}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial Z}.$$

L'expression (63) devient alors

$$(69)\left\{\begin{aligned}\frac{d\delta W}{dt}=&-3an\frac{\partial^2\Omega}{\partial g^2}n\delta z-3an\left[r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial g}-\frac{a^2e(\cos\epsilon-e)}{r^2f}\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right]v\\ &+\frac{2an}{f}\left(1-\frac{2a}{r}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial w}\delta\frac{h}{h_0}-3a^2n\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z\partial g}\frac{u}{\cos i}-3a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\frac{\overline{\frac{du}{dt}}}{\cos i},\end{aligned}\right.$$

où il faut remplacer les seconds facteurs $n\delta z, v, \delta\frac{h}{h_0}, u, \frac{du}{dt}$, par leurs expressions analytiques.

29.

On a trouvé $n\delta z = n\int \overline{W} dt$, et comme

$$T_1 = \frac{an}{r}\frac{\partial W}{\partial \epsilon} = \frac{dW}{dt},$$

il en résulte

$$W = \int T_1 dt,$$

et par suite

$$\overline{W} = \overline{\int T_1 dt},$$

$$(70)\qquad n\delta z = n\int\left(\overline{\int T_1 dt}\right)dt,$$

Des relations $\overline{T}_1 = \frac{an}{f}\frac{\partial\Omega}{\partial w}$ et $\delta\frac{h}{h_0} = -\int\frac{an}{f}\frac{\partial\Omega}{\partial w}dt$, on tire

$$\delta\frac{h}{h_0} = -\int \overline{T}_1 dt.$$

En différentiant l'équation (70), il vient

$$\frac{d\delta z}{dt} = -3an\int\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt + \frac{2an}{e}(\cos\epsilon + \tfrac{1}{2}e)\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g} - \frac{1}{f}\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right)dt$$
$$+ 2an\sin\epsilon\int\frac{\partial\Omega}{\partial e}dt.$$

Multipliant le premier membre de celle-ci par ndt, le second par $(1-e\cos\epsilon)d\epsilon$, et intégrant, il vient

$$n\delta z = -3an^2\iint\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt^2 + \frac{an}{e}\int(2\cos\epsilon+e)(1-e\cos\epsilon)\left[\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g} - \frac{1}{f}\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right)dt\right]d\epsilon$$
$$+ 2an\int\sin\epsilon(1-e\cos\epsilon)\left(\int\frac{\partial\Omega}{\partial e}dt\right)d\epsilon;$$

intégrant par parties, on a

$$n\delta z = -3an^2\iint\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt^2 + \frac{an}{e}[(2-e^2)\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}e\sin 2\varepsilon]\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g} - \frac{1}{f}\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right)dt$$
$$-\frac{an}{e}\int[(2-e^2)\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}e\sin 2\varepsilon]\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g} - \frac{1}{f}\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right)dt$$
$$-an(2\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}e\cos 2\varepsilon)\int\frac{\partial\Omega}{\partial e}dt$$
$$+\frac{an}{e}\int(2e\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2\varepsilon)\frac{\partial\Omega}{\partial e}dt.$$

Mais, à cause de la seconde des équations (66), l'équation (67) peut s'écrire

$$[(2-e^2)\sin\varepsilon - e\sin\varepsilon\cos\varepsilon]\frac{\partial\Omega}{\partial g} = a(e + f^2\cos\varepsilon - e\cos^2\varepsilon)\frac{\partial\Omega}{\partial r} + f^2\frac{\partial\Omega}{\partial e}:$$

la troisième des équations (66) donne

$$\frac{1}{f}[(2-e^2)\sin\varepsilon - e\sin\varepsilon\cos\varepsilon]\frac{\partial\Omega}{\partial w} = \frac{r^2}{a^2}\frac{\partial\Omega}{\partial e} + r(\cos\varepsilon - e)\frac{\partial\Omega}{\partial r},$$

et, si on la retranche de la précédente, il vient

$$[(2-e^2)\sin\varepsilon - e\sin\varepsilon\cos\varepsilon]\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g} - \frac{1}{f}\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right)$$
$$= (-e^2\cos^2\varepsilon - e^2 + 2e\cos\varepsilon)\frac{\partial\Omega}{\partial e} + 2er\frac{\partial\Omega}{\partial r},$$

que je substitue dans $n\delta z$, ce qui donne

$$n\delta z = -3an^2\iint\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt^2 - 2an\int r\frac{\partial\Omega}{\partial r}dt$$
$$+\frac{an}{e}(2 - e^2 - e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g} - \frac{1}{f}\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right)dt$$
$$+an(e - 2\cos\varepsilon + e\cos^2\varepsilon)\int\frac{\partial\Omega}{\partial e}dt.$$

30.

On a encore

$$\nu = -\tfrac{1}{2}\frac{d\delta z}{dt} - \tfrac{1}{2}\delta\frac{h}{h_0},$$
$$\delta\frac{h}{h_0} = -\frac{an}{f}\int\frac{\partial\Omega}{\partial w}dt,$$

par suite,

$$\nu = \tfrac{3}{2} an \int \frac{\partial \Omega}{\partial g} dt + \frac{an}{2f} \int \frac{\partial \Omega}{\partial w} dt$$
$$- \frac{an}{e} (\cos \varepsilon + \tfrac{1}{2} e) \int \left(\frac{\partial \Omega}{\partial g} - \frac{1}{f} \frac{\partial \Omega}{\partial w} \right) dt - an \sin \varepsilon . \int \frac{\partial \Omega}{\partial e} dt .$$

31.

Pour obtenir u, je remarque qu'on a $u = \overline{\int U_1 dt}$, et que

$$U_1 = \frac{an}{r} U = \frac{n}{f} \cos i (\rho \sin \omega . r \cos w - \rho \cos \omega . r \sin w) \frac{\partial \Omega}{\partial Z},$$

d'où

$$\int U_1 dt = \frac{n}{f} \cos i \left[\rho \sin \omega . \int r \cos w \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Z} dt - \rho \cos \omega . \int r \sin w \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Z} dt \right],$$

et enfin

$$\frac{u}{\cos i} = \frac{nr \sin w}{f} \int r \cos w \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Z} dt - \frac{nr \cos w}{f} \int r \sin w \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Z} dt .$$

En différentiant, on a de plus

$$\frac{1}{\cos i} \frac{du}{dt} = \frac{n^2}{f} \frac{\partial . r \sin w}{\partial g} \int r \cos w \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Z} dt - \frac{n^2}{f} \frac{\partial . r \cos w}{\partial g} \int r \sin w \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Z} dt .$$

32.

Substituant les résultats précédents dans la relation (69), on a

$$\frac{d \delta W}{dt} = 9 a^2 n^3 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial g^2} \iint \frac{\partial \Omega}{\partial g} dt^2 + 6 a^2 n^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial g^2} \int r \frac{\partial \Omega}{\partial r} dt$$
$$+ \frac{3 a^2 n^2}{e} A \int \frac{\partial \Omega}{\partial g} dt + \frac{3 a^2 n^2}{ef} B \int \frac{\partial \Omega}{\partial w} dt + 3 a^2 n^2 C \int \frac{\partial \Omega}{\partial e} dt$$
$$- \frac{3 a^2 n^2}{f} D \int r \cos w \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Z} dt + \frac{3 a^2 n^2}{f} E \int r \sin w \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Z} dt ,$$

en posant

$$A = -(2 - e^2 - e \cos \varepsilon) \sin \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial g^2} + (\cos \varepsilon - e) r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial g}$$
$$- \frac{a^2 (e^3 - 2 e^2 \cos \varepsilon + e \cos^2 \varepsilon)}{r^2 f} \frac{\partial \Omega}{\partial w},$$

$$B = (2 - e^2 - e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon \cdot \frac{\partial^2\Omega}{\partial g^2} - (\cos\varepsilon + e)\, r\, \frac{\partial^2\Omega}{\partial r \partial g}$$
$$+ \frac{a^2}{3r^2 f}[4e - 3e^3 + 2e^2\cos\varepsilon + (3e - 2e^3)\cos^2\varepsilon]\, \frac{\partial\Omega}{\partial w},$$

$$C = -(e - 2\cos\varepsilon + e\cos^2 e)\frac{\partial^2\Omega}{\partial g^2} + \sin\varepsilon . r\, \frac{\partial^2\Omega}{\partial r \partial g}$$
$$- \frac{ae}{r^2 f}(\cos\varepsilon - e)\sin\varepsilon \cdot \frac{\partial\Omega}{\partial w},$$

$$D = r\sin w \cdot \frac{\partial^2\Omega}{\partial Z \partial g} + \frac{\partial . r\sin w}{\partial g}\, \frac{\partial\Omega}{\partial Z},$$

$$E = r\cos w \cdot \frac{\partial^2\Omega}{\partial Z \partial g} + \frac{\partial . r\cos w}{\partial g}\, \frac{\partial\Omega}{\partial Z}.$$

Ces quantités sont susceptibles de transformations que je vais effectuer. Éliminant $\frac{\partial\Omega}{\partial w}$, entre la seconde et la troisième des équations (66), il vient

$$(2 - e^2 - e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon \cdot \frac{\partial\Omega}{\partial g} - f^2 \frac{\partial\Omega}{\partial e} - (e + \cos\varepsilon)\, r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = 0\,;$$

différentiant par rapport à g, on a

$$(71)\ \begin{cases} 0 = (2 - e^2 - e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon \cdot \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial g^2} - f^2 \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial e \partial g} - (e + \cos\varepsilon)\, r \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial r \partial g} + (2\cos\varepsilon + e)\dfrac{\partial\Omega}{\partial g} \\ \qquad + \dfrac{a^2}{r}\sin\varepsilon\,(1 - 2e\cos\varepsilon - e^2)\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}. \end{cases}$$

Les équations (66) donnent

$$(72) \qquad 0 = \frac{\partial\Omega}{\partial g} - \frac{af}{r^2}\frac{\partial\Omega}{\partial w} - \frac{a^2 e\sin\varepsilon}{r}\,.\,\frac{\partial\Omega}{\partial r} = 0,$$

$$(73) \qquad 0 = \frac{\partial\Omega}{\partial e} - \frac{a^2}{r^2 f}(2 - e^2 - e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon \cdot \frac{\partial\Omega}{\partial w} + \frac{a^2}{r}(\cos\varepsilon - e)\frac{\partial\Omega}{\partial r}.$$

Multipliant les deux membres de l'équation (72) par $\frac{1}{e}(1 + e^2 - 2e\cos\varepsilon)$, ajoutant le produit aux deux membres de l'équation (71), puis le résultat à la valeur de A, il vient,

$$A = -f^2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial e \partial g} + \frac{1 + 2e^2}{e}\, \frac{\partial\Omega}{\partial g} - 2e\, \frac{\partial . r\frac{\partial\Omega}{\partial r}}{\partial g} + \frac{1}{ef}\frac{\partial\Omega}{\partial w},$$

en observant que

$$\frac{a^2 e\sin\varepsilon}{r}\, \frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{\partial . r\frac{\partial\Omega}{\partial r}}{\partial g} - r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r \partial g}.$$

Multipliant maintenant les deux membres de l'équation (72) par $\frac{1}{e}(1-e^2-2e\cos\varepsilon)$, ajoutant le produit aux deux membres de l'équation (71), et retranchant le résultat de la valeur de B, il vient encore

$$B=\frac{1}{3ef}(3-2e^2)\frac{\partial\Omega}{\partial w}-f^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial e\partial g}-\frac{1}{e}\frac{\partial\Omega}{\partial g}.$$

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (72) par $\frac{r^2}{a^2e}$ et qu'on différentie le résultat par rapport à g, on a

$$(74)\quad\left\{\begin{aligned}0=&\frac{r^2}{a^2e}\frac{\partial^2\Omega}{\partial g^2}-\frac{f}{e}\frac{\partial^2\Omega}{\partial w\partial g}-r\sin\epsilon\cdot\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial g}+2\sin\epsilon\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial g}\\&-\frac{a^2}{r}(e+\cos\epsilon-2e\cos^2\epsilon)\frac{\partial\Omega}{\partial r};\end{aligned}\right.$$

ajoutant membre à membre les équations (74), (73) et (72), après avoir multiplié cette dernière par $-2\sin\epsilon$, puis ajoutant le résultat à la valeur de C, il vient

$$C=\frac{f^2}{e}\frac{\partial^2\Omega}{\partial g^2}-\frac{f}{e}\frac{\partial^2\Omega}{\partial w\partial g}+\frac{\partial\Omega}{\partial e}.$$

Posant, de plus,

$$P=r\cos w\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z},\qquad Q=r\sin w\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z},$$

on a

$$D=\frac{\partial Q}{\partial g},\qquad E=\frac{\partial P}{\partial g}.$$

En tenant compte de ces divers résultats, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d\delta W}{dt}=&\;9a^2n^3\frac{\partial^2\Omega}{\partial g^2}\iint\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt^2+3a^2n^2\frac{1+2e^2}{e^2}\frac{\partial\Omega}{\partial g}\int\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt\\&+a^2n^2\frac{3-2e^2}{e^2f^2}\frac{\partial\Omega}{\partial w}\int\frac{\partial\Omega}{\partial w}dt+3a^2n^2\frac{\partial\Omega}{\partial e}\int\frac{\partial\Omega}{\partial e}dt\\&-\frac{3a^2n^2}{e^2f}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial w}\int\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt+\frac{\partial\Omega}{\partial g}\int\frac{\partial\Omega}{\partial w}dt\right)\\&+6a^2n^2\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial g^2}\int r\frac{\partial\Omega}{\partial r}dt-\frac{\partial.r\frac{\partial\Omega}{\partial r}}{\partial g}\int\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt\right)\\&+\frac{3a^2n^2f}{e}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial e\partial g}\int\frac{\partial\Omega}{\partial w}dt-\frac{\partial^2\Omega}{\partial w\partial g}\int\frac{\partial\Omega}{\partial e}dt\right)\end{aligned}$$

$$+\frac{3a^2n^2f^2}{e}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial g^2}\int\frac{\partial\Omega}{\partial e}dt-\frac{\partial^2\Omega}{\partial e\partial g}\int\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt\right)$$

$$+\frac{3a^2n^2}{f}\left(\frac{\partial P}{\partial g}\int Q\,dt-\frac{\partial Q}{\partial g}\int P\,dt\right).$$

33.

La fonction Ω peut être mise sous la forme

$$\Omega = k\cos(jg+j'g'+K),$$

par suite,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial g} = -jk\sin(jg+j'g'+K),$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial g^2} = -j^2k\cos(jg+j'g'+K),$$

$$\int\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt = \frac{jk}{jn+j'n'}\cos(jg+j'g'+K),$$

$$\iint\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt^2 = -\frac{jk}{(jn+j'n')^2}\sin(jg+j'g'+K).$$

Le produit

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial g^2}\iint\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt^2$$

donne des termes de la forme

$$2\sin p\cos p' = \sin(p+p') - \sin(p-p'),$$

ce qui ne peut donner aucun terme d'argument 0; il en est de même du produit $\frac{d\Omega}{dg}\int\frac{d\Omega}{dg}dt$. La seconde ligne de $\frac{d\delta W}{dt}$, ayant des termes de même forme, conduit au même résultat.

On a vu que

$$\frac{\partial\Omega}{\partial w} = f\frac{\partial\Omega}{\partial g},$$

ainsi

$$\frac{\partial\Omega}{\partial w} = -l\sin(jg+j'g'+L),$$

$$\int\frac{\partial\Omega}{\partial w}dt = \frac{l}{jn+j'n'}\cos(jg+j'g'+L),$$

et, si l'on ne considère que les termes pouvant donner un produit constant, on a

$$\frac{\partial\Omega}{\partial w}\int\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt=\frac{jkl}{jn+j'n'}\sin(L-K),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial g}\int\frac{\partial\Omega}{\partial w}dt=\frac{jkl}{jn+j'n'}\sin(K-L),$$

dont la somme est nulle. La troisième ligne ne renferme donc pas de terme constant.

Les autres lignes ayant toutes la même forme, il suffit d'en considérer une, la dernière par exemple : on a

$$P=k'\cos(jg+j'g'+K'),$$

$$Q=l'\sin(jg+j'g'+L'),$$

$$\int Pdt=\frac{k'}{jn+j'n'}\sin(jg+j'g'+K'),$$

$$\int Qdt=-\frac{l'}{jn+j'n'}\cos(jg+j'g'+L'),$$

$$\frac{dQ}{dg}=jl'\cos(jg+j'g'+L'),$$

$$\frac{dP}{dg}=-jk'\sin(jg+j'g'+K');$$

en se bornant encore aux termes qui peuvent donner des produits constants, il vient

$$\frac{dP}{dg}\int Qdt=\frac{jk'l'}{jn+j'n'}\sin(K'-L'),$$

$$\frac{dQ}{dg}\int Pdt=\frac{jk'l'}{jn+j'n'}\sin(K'-L'),$$

dont la différence est nulle.

34.

Pour étendre cette démonstration aux produits des masses perturbatrices, il y a trois sortes de termes à considérer :

1° Ceux que peut amener une seconde planète perturbatrice. Celle-ci introduit dans Ω des termes ayant en facteur

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(jg+j'g'+K'\right),$$

par lesquels il faudra multiplier des termes ayant en facteur

$$\frac{\cos}{\sin}\left(jg + j'g' + K\right),$$

combinaison qui ne peut introduire des termes constants que si l'on a, à la fois, $j'=0$, $j''=0$; le cas de $j'=0$ étant contenu dans la démonstration précédente, on n'introduit pas ainsi de terme constant.

2° Ceux qui proviennent des perturbations que la planète troublante éprouve de la part de la planète troublée. Ils dépendent des mêmes arguments que ceux qui ont été examinés dans les articles précédents, mais les coefficients étant différents, il y a lieu de procéder à une nouvelle démonstration.

3° Ceux qui proviennent d'une planète troublant la planète perturbatrice et qui renferment en facteur

$$\frac{\cos}{\sin}\left(j'g' + j''g'' + K_1\right).$$

Ils ne peuvent amener de terme constant dans $\frac{d\delta W}{dt}$, que si $j=0$, $j''=0$, ce qui permet de démontrer avec facilité qu'ils n'en introduisent pas.

35.

Les termes introduits, par la considération du second cas, sont renfermés dans l'expression

$$\frac{d\delta W}{dt} = F_1 n'\delta z' + G_1 \nu' + H_1 \frac{u'}{\cos i'},$$

où

$$F_1 = \frac{an}{r} F, \quad G_1 = \frac{an}{r} G, \quad H_1 = \frac{an}{r} H.$$

On a évidemment

$$F_1 = \frac{\partial T_1}{\partial g'}, \quad G_1 = -V_1 - T_1,$$

et, en ne considérant que les termes de $\frac{d\delta W}{dt}$ indépendants de $\cos\eta + \frac{1}{2}e$ et de $\sin\eta$, on a

$$F_1 = -3an\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial g'}, \quad T_1 = -3an\frac{\partial\Omega}{\partial g}, \quad G_1 = 3an\frac{\partial . r\frac{\partial\Omega}{\partial g}}{\partial r}.$$

Le théorème des fonctions homogènes donne

$$r\frac{\partial\frac{\partial\Omega}{\partial g}}{\partial r}+r'\frac{\partial\frac{\partial\Omega}{\partial g}}{\partial r'}=-\frac{\partial\Omega}{\partial g},$$

d'où

$$r\frac{\partial\frac{\partial\Omega}{\partial g}}{\partial r}+\frac{\partial\Omega}{\partial g}=\frac{\partial . r\frac{\partial\Omega}{\partial g}}{\partial r}=-r'\frac{\partial\frac{\partial\Omega}{\partial g}}{\partial r'},$$

et

$$G_1=-3anr'\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial r'}\cdot$$

On a de même

$$H_1=M_1aa'\frac{r}{a}\frac{\partial\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}}{\partial g}=M_1a'r\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial Z'}=-3aa'n\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial Z'}\cdot$$

Finalement il vient

$$(75)\quad \frac{d\delta W}{dt}=-3an\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial g'}n'\delta z'-3anr'\frac{\partial^2\Omega}{\partial r'\partial g}\nu'-3aa'n\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial Z'}\frac{u'}{\cos i'}\cdot$$

36.

Désignant par Ω' la partie de la fonction perturbatrice d'où proviennent les actions exercées par m, on a

$$\Omega'=\frac{m}{\mu}\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r^3}\right),$$

et comme

$$\Omega=\frac{m'}{\mu}\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right),$$

il vient

$$\Omega'=\frac{m}{m'}\,\Omega+\frac{m}{\mu}(xx'+yy'+zz')\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r^3}\right)\cdot$$

En faisant dans l'équation (75) des substitutions analogues à celles qu'on a faites dans l'art. 32, on a

$$\begin{aligned}\frac{d\delta W}{dt}=&\,9ana'n'^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial g'}\iint\frac{\partial\Omega'}{\partial g'}dt^2+6ana'n'\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial g'}\int r'\frac{\partial\Omega'}{\partial r'}dt\\&+\frac{3ana'n'}{e'}A'\int\frac{\partial\Omega'}{\partial g'}dt+\frac{3ana'n'}{e'f'}B'\int\frac{\partial\Omega'}{\partial w'}dt+3ana'n'C'\int\frac{\partial\Omega'}{\partial e'}dt\\&-\frac{3ana'n'}{f'}D'\int r'\cos w'\cdot\frac{\partial\Omega'}{\partial Z'}dt-\frac{3ana'n'}{f'}E'\int r'\sin w'\cdot\frac{\partial\Omega'}{\partial Z'}dt,\end{aligned}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$A' = -(2-e'^2-e'\cos\varepsilon')\sin\varepsilon'\cdot\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial g'}+(\cos\varepsilon'-e')r'\frac{\partial^2\Omega}{\partial r'\partial g},$$

$$B' = (2-e'^2-e'\cos\varepsilon')\sin\varepsilon'\cdot\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial g'}-(\cos\varepsilon'+e')r'\frac{\partial^2\Omega}{\partial r'\partial g},$$

$$C' = -(e'-2\cos\varepsilon'+e'\cos^2\varepsilon')\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial g'}+\sin\varepsilon'.r'\frac{\partial^2\Omega}{\partial r'\partial g},$$

$$D' = r'\sin w'\cdot\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z'\partial g},$$

$$E' = r'\cos w'\cdot\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z'\partial g}.$$

En opérant comme on l'a fait à l'art. 32, on trouve

$$A' = -f'^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial e'\partial g}-2e'r'\frac{\partial^2\Omega}{\partial r'\partial g},$$

$$B' = f'^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial e'\partial g},$$

$$C' = \frac{f'^2}{e'}\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial g'}-\frac{f'}{e'}\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial w'};$$

de là résulte finalement

$$\begin{aligned}\frac{d\delta W}{dt} &= 9ana'n'^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial g'}\iint\frac{\partial\Omega'}{\partial g'}dt^2\\
&+6ana'n'\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial g'}\int r'\frac{\partial\Omega'}{\partial r'}dt-r'\frac{\partial^2\Omega}{\partial r'\partial g}\int\frac{\partial\Omega'}{\partial g'}dt\right)\\
&+\frac{3ana'n'f'}{e'}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial e'\partial g}\int\frac{\partial\Omega'}{\partial w'}dt-\frac{\partial^2\Omega}{\partial w'\partial g}\int\frac{\partial\Omega'}{\partial e'}dt\right)\\
&+\frac{3ana'n'f'^2}{e'}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial g'\partial g}\int\frac{\partial\Omega'}{\partial e'}dt-\frac{\partial^2\Omega}{\partial e'\partial g}\int\frac{\partial\Omega'}{\partial g'}dt\right)\\
&+\frac{3ana'n'}{f'}r'\cos w'\cdot\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z'\partial g}\int r'\sin w'\cdot\frac{\partial\Omega'}{\partial Z'}dt\\
&-\frac{3ana'n'}{f'}r'\sin w'\cdot\frac{\partial^2\Omega}{\partial Z'\partial g}\int r'\cos w'\cdot\frac{\partial\Omega'}{\partial Z'}dt.\end{aligned}$$

La forme de Ω' montre que notre but sera atteint, si, remplaçant cette fonction par $\frac{m}{\mu}(xx'+yy'+zz')\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r^3}\right)$ dans l'expression précédente, on fait voir que celle-ci ne renferme pas de terme constant.

37.

Ainsi qu'on l'a déjà remarqué, il suffit, dans les facteurs du second membre de $\frac{d\delta W}{dt}$, de tenir compte seulement de la première puissance de la force perturbatrice. Or, en supposant la planète troublante intérieure, ce que je fais ici pour simplifier l'écriture par la suppression de certains accents, on a

$$\Delta = r\left(1 - \frac{2r'}{r}H + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2}H + \frac{r'^2}{r^3}D_2 + \frac{r'^3}{r^4}D_3 + \cdots ;$$

ici, comme précédemment, $H = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}$; de plus, D_2, D_3, ... sont des quantités qui dépendent des puissances supérieures de la force perturbatrice. En désignant par $\frac{\mu}{m'}\Omega_1$ l'ensemble des termes qui suivent le second dans le développement de Δ^{-1}, on a

$$\Omega = \frac{m'}{\mu}\left[\frac{1}{r} + \left(\frac{r'}{r^2} - \frac{r}{r'^2}\right)H\right] + \Omega_1,$$

et, pour une première approximation,

$$\Omega = \frac{m'}{\mu}\left[\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(xx' + yy' + zz')\right].$$

Je rappelle ici, qu'après les différentiations, il faudra remplacer x, y, z, par X, Y, Z, et faire $Z = 0$.

38.

Pour le but que je me propose, je vais donner une forme différente aux équations du mouvement. Différentiant deux fois l'équation

$$1 + \nu = \frac{r}{r},$$

éliminant ensuite les différentielles de $\bar{r}$ du résultat, en se servant de l'équation

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{h_0^2}{\mu} + \frac{h_0^2 e_0 \cos \bar{w}}{\mu},$$

il vient

$$d^2\nu = \frac{1}{\bar{r}}(d^2 r - r\, dv^2) - \frac{h_0^2 e_0}{\mu r} \sin \bar{w} . d.r^2 dv + \frac{h_0^2}{\mu} r\, dv^2.$$

Or

$$\frac{d.r^2 dv}{dt^2} = \mu \frac{\partial \Omega}{\partial v}, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} - r \frac{dv^2}{dt^2} = \mu \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2},$$

ce qui donne, en intégrant la première,

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \text{const.} + \mu \int \frac{\partial \Omega}{\partial v} dt,$$

et comme

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu}{h_0} \frac{1}{r^2},$$

on a

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\mu}{h_0} \left(\frac{1}{r^2}\right)_{t=0},$$

et

$$\left(r^2 \frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\mu}{h_0} = \text{const.}$$

On conclut de là

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{\mu}{h_0} + \mu \int \frac{\partial \Omega}{\partial v} dt.$$

Substituant dans la valeur de $d^2\nu$, et posant

$$V_1 = \frac{\mu}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{h^2 e_0 \sin \bar{w}}{r^2} \frac{\partial \Omega}{\partial v},$$

$$S = h_0 \int \frac{\partial \Omega}{\partial v} dt,$$

il vient

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\nu + V_1 + 2\frac{\mu}{r^3} S + \frac{\mu}{r^3} S^2.$$

Négligeant les termes du second ordre par rapport à la force perturbatrice, on a

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\nu + V, \tag{76}$$

avec

$$V = \frac{2\mu}{r^3} h \int \frac{\partial\Omega}{\partial v} dt - \frac{h^2 e \sin w}{r} \frac{\partial\Omega}{\partial v} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial\Omega}{\partial r}.$$

39.

Cela posé, si l'on fait $\varpi = \frac{m'}{\mu}$, on obtient

$$\frac{\partial\Omega}{\partial X} = \varpi \left[-\frac{X}{r^3} - 2\frac{X}{r^5}(Xx' + Yy') + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) x' \right],$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial Y} = \varpi \left[-\frac{Y}{r^3} - 3\frac{Y}{r^5}(Xx' + Yy') + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) y' \right],$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial Z} = \varpi \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) z',$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial w} = X\frac{\partial\Omega}{\partial Y} - Y\frac{\partial\Omega}{\partial X} = \varpi \left(\frac{Xy' - Yx'}{r^3} - \frac{Xy' - Yx'}{r'^3} \right);$$

substituant dans cette dernière les valeurs elliptiques des coordonnées X, Y, x', y' z', il vient

$$\frac{\partial\Omega}{\partial w} = \varpi \frac{x' d^2Y - y' d^2X + X d^2y' - Y d^2x'}{\mu dt^2};$$

désignant par $\frac{6}{h}$ une constante arbitraire, on trouve

$$\int \frac{\partial\Omega}{\partial w} dt = \frac{6}{h} + \varpi \frac{x' dY - y' dX + X dy' - Y dx'}{\mu dt}.$$

On a aussi

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = X\frac{\partial\Omega}{\partial X} + Y\frac{\partial\Omega}{\partial Y} = -\frac{\varpi}{r} - \varpi\left(2\frac{Xx' + Yy'}{r^3} + \frac{Xx' + Yy'}{r'^3}\right),$$

et comme

$$1 = \frac{h}{\mu dt}(X dY - Y dX),$$

il vient

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = -\frac{\varpi}{r} + \frac{2\varpi h}{\mu r^3 dt}(x' XY dX - x' X^2 dY + y' Y^2 dX - y' XY dY)$$
$$+ \frac{\varpi h}{\mu r'^3 dt}(x' XY dX - x' X^2 dY + y' Y^2 dX - y' XY dY):$$

de plus,

$$he\sin w = \frac{dr}{dt}, \quad rdr = XdX + YdY,$$

d'où

$$\frac{h^2 e \sin w}{r} = h\frac{X}{r}\frac{dX}{dt} + h\frac{Y}{r}\frac{dY}{dt};$$

substituant plus haut, on trouve

$$V = (2\theta - \varpi)\frac{\mu}{r^3} + \frac{3\varpi h}{r^5 dt}(XdY + YdX)(Yx' - Xy') + \frac{2\varpi h}{r^3 dt}(Xdy' - Ydx')$$
$$+ \frac{\varpi h}{r'^3 dt}(y'dX - x'dY).$$

Multipliant par X, et éliminant r^3 et r'^3 par les équations du mouvement elliptique, on a

$$VX = (\varpi - 2\theta)\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{3\varpi h}{r^5 dt}(XdY + YdX)(Yx' - Xy')X$$
$$- \frac{2\varpi h}{\mu dt^3}(d^2Xdy' - d^2Ydx')X - \frac{h\varpi}{\mu dt^3}(d^2y'dX - d^2x'dY)X.$$

Le second terme de cette expression peut s'écrire

$$-\varpi h(Yx' - Xy')X\frac{d.r^{-3}}{dt};$$

par suite,

$$-\int \varpi h(Yx' - Xy')X\frac{d.r^{-3}dt}{dt}dt = -\frac{\varpi h}{r^3}(Yx' - Xy')X$$
$$-\frac{\varpi h}{\mu}\int\frac{(x'dY - y'dX)d^2X}{dt^2} - \frac{\varpi h}{\mu}\int\frac{(d^2Ydx' - d^2Xdy')X}{dt^2}$$
$$+ \frac{\varpi h}{\mu}\int\frac{(y'd^2X - x'd^2Y)dX}{dt^2}.$$

On conclut de là

$$\int VXdt = c + (\varpi - 2\theta)\frac{dX}{dt} + \frac{\varpi h}{r^3}(Xy' - Yx')X + \frac{\varpi h}{\mu}\frac{dX}{dt}\frac{y'dX - x'dY}{dt}$$
$$+ \frac{\varpi h}{\mu}X\frac{dYdx' - dXdy'}{dt^2}.$$

On aurait de même

$$\int VYdt = c' + (\varpi - 2\theta)\frac{dY}{dt} + \frac{\varpi h}{r^3}(Xy' - Yx')Y + \frac{\varpi h}{\mu}\frac{dY}{dt}\frac{y'dX - x'dY}{dt}$$
$$+ \frac{\varpi h}{\mu}Y\frac{dYdx' - dXdy'}{dt^2}.$$

Dans ces relations c et c' sont des constantes arbitraires.

40.

Multipliant maintenant les deux membres de l'équation (76) successivement par Xdt, Ydt, et intégrant, il vient

$$\frac{Xd\nu - \nu dX}{dt} = \int VXdt,$$

$$\frac{Yd\nu - \nu dY}{dt} = \int VYdt:$$

éliminant $d\nu$ entre ces deux équations, et tenant compte de la relation $X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt} = \frac{\mu}{h}$, on obtient

$$\nu = \frac{h}{\mu} Y\int VXdt - \frac{h}{\mu} X\int VYdt.$$

On a aussi

$$\frac{d\delta z}{dt} = h\int\frac{\partial\Omega}{\partial w}\,dt - 2\nu$$
$$= 2\varpi - 3\beta + h\varpi\,\frac{x'dY - y'dX + Xdy' - Ydx'}{\mu dt} - \frac{2ch}{\mu}Y + \frac{2c'h}{\mu}X,$$

et, en désignant par c' une constante arbitraire,

$$\delta z = c' + (2\varpi - 3\beta)t - 2\frac{ch}{\mu}\int Ydt + 2\frac{c'h}{\mu}\int Xdt + \frac{h\varpi}{\mu}(Xy' - Yx').$$

Comme on a vu, art. 41, *Première partie*, que $\nu = 0, \frac{d\nu}{dt} = 0$, pour $t = 0$, il résulte des deux premières équations de cet article que

$$\left(\int VXdt\right)_{t=0} = 0, \quad \left(\int VYdt\right)_{t=0} = 0:$$

alors $c = 0, c' = 0$. Mais $n\delta z$ ne renferme pas de terme proportionnel au temps dans la première approximation, et de plus, pour $t = 0$, $\delta z = 0$; donc encore

$$c' = 0, \qquad 2\varpi - 3\beta = 0.$$

On a donc

$$n\delta z = n\frac{h\varpi}{\mu}(Xy' - Yx'),$$

$$\nu = \tfrac{1}{2}\varpi + \frac{\varpi h}{\mu}\,\frac{x'dY - y'dX}{dt} = \tfrac{1}{2}\varpi - \frac{d.n\delta z}{dg}.$$

42.

Si l'on tenait compte seulement du premier terme $\varpi \frac{1}{r}$ de Ω, on aurait

$$\frac{\partial\Omega}{\partial v}=0, \quad r\frac{\partial\Omega}{\partial r}=-\frac{\mu}{r}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial Z}=0, \quad h\int\frac{\partial\Omega}{\partial v}dt=6,$$

$$\frac{d^2\nu}{dt^2}+\frac{\mu}{r^3}\nu=(26-\varpi)\frac{\mu}{r^3}.$$

Les intégrales déjà calculées deviennent, avec cette restriction,

$$\delta z=0, \quad \nu=\tfrac{1}{2}\varpi, \quad u=0,$$

de telle sorte que, en conservant seulement la partie de Ω désignée par

$$\varpi\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)(xx'+yy'+zz'),$$

il vient

$$n\delta z=n\frac{\varpi h}{\mu}(Xy'-Yx'),$$

$$\nu=\frac{\varpi h}{\mu}\left(\frac{x'dY-y'dX}{dt}\right),$$

$$au=\varpi\cos i.z'.$$

Lorsque la planète m' est intérieure, on peut aussi lui appliquer ces formules; elles deviennent dans ce cas

$$n'\delta z'=n'\frac{h'}{\mu}\frac{m}{\mu}(X'y-Y'x),$$

$$\nu'=\frac{h'}{\mu}\frac{m}{\mu}\left(\frac{xdY'-ydX'}{dt}\right),$$

$$\frac{a'u'}{\cos i}=\frac{m}{\mu}z,$$

où

$$z=r\sin I\sin(w+\Pi),$$

les coordonnées étant rapportées au plan idéal de l'orbite de la planète troublante. L'expression déjà donnée

$$\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}=\frac{m'}{\mu}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)r\sin I\sin(w+\Pi)$$

correspond aussi à ces coordonnées.

43.

Substituant maintenant ces résultats dans l'équation (75), on trouve

$$\frac{d\delta W}{dt} = -3ann'\frac{h'}{\mu}\frac{m}{\mu}\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial g'}(X'y - Y'x) - 3ann'\frac{h'}{\mu}\frac{m}{\mu}r'\frac{xdY' - ydX'}{dg'}\frac{\partial^2\Omega}{\partial r'\partial g}$$
$$-3an\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial Z'}\frac{m}{\mu}z.$$

Or

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial g'} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial X'}\frac{\partial X'}{\partial g'} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial g'},$$

$$r'\frac{\partial^2\Omega}{\partial r'\partial g} = r'\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial X'}\frac{\partial X'}{\partial r'} + r'\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial r'},$$

$$dX' = \frac{X'}{r'}dr' - Y'dv', \quad dY' = \frac{Y'}{r'}dr' + X'dv',$$

d'où

$$r'\frac{\partial Y'}{\partial r'} = Y', \quad r'\frac{\partial X'}{\partial r'} = X';$$

par suite

$$r'\frac{\partial^2\Omega}{\partial r'\partial g} = X'\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial X'} + Y'\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial Y'};$$

X', Y' entrant ici par leurs valeurs elliptiques, on a

$$\frac{\partial X'}{\partial g'} = \frac{dX'}{dg'}, \quad \frac{\partial Y'}{\partial g'} = \frac{dY'}{dg'},$$

et il vient

$$\frac{d\delta W}{dt} = -\frac{3amnn'}{\mu}\frac{h'}{\mu}\Big[(X'y - Y'x)\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial X'}\frac{dX'}{dg'} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial Y'}\frac{dY'}{dg'}\right)$$
$$+\left(X'\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial X'} + Y'\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial Y'}\right)\left(x\frac{dY'}{dg'} - y\frac{dX'}{dg'}\right)\Big] - \frac{3amn}{\mu}\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial Z'},$$

et comme

$$\frac{\mu}{n'h'} = X'\frac{dY'}{dg'} - Y'\frac{dX'}{dg'},$$

la partie entre crochets devient

$$\frac{\mu}{n'h'}\left(x\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial X'} + y\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\,\partial Y'}\right),$$

et par suite

$$\frac{d\delta W}{dt} = -\frac{3amn}{\mu}\left(x\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial X'} + y\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial Y'} + z\frac{\partial^2\Omega}{\partial g\partial Z'}\right)$$

$$= -\frac{3amn}{\mu}\,\frac{\partial\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial X'} + y\frac{\partial\Omega}{\partial Y'} + z\frac{\partial\Omega}{\partial Z'}\right)}{\partial g}$$

$$+\frac{3amn}{\mu}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial X'}\frac{\partial x}{\partial g} + \frac{\partial\Omega}{\partial Y'}\frac{\partial y}{\partial g} + \frac{\partial\Omega}{\partial Z'}\frac{\partial z}{\partial g}\right).$$

Le premier terme de cette expression étant une différentielle exacte par rapport à g, ne peut renfermer de terme constant. Pour démontrer qu'il en est de même du second, je pose

$$E = \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}, \qquad D = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-\frac{1}{2}},$$

ce qui donne

$$\Omega = \frac{m'}{\mu}D - \frac{m'}{\mu}E.$$

Il faudra, après les différentiations par rapport à x', y', z', remplacer ces lettres par X', Y', 0. On a ainsi

$$\frac{\partial D}{\partial X'} = -\frac{\partial D}{\partial x}, \quad \frac{\partial D}{\partial Y'} = -\frac{\partial D}{\partial y}, \quad \frac{\partial D}{\partial Z'} = -\frac{\partial D}{\partial z},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial D}{\partial X'}\frac{\partial x}{\partial g} + \frac{\partial D}{\partial Y'}\frac{\partial y}{\partial g} + \frac{\partial D}{\partial Z'}\frac{\partial z}{\partial g} = -\frac{\partial D}{\partial g};$$

de plus,

$$\frac{\partial E}{\partial X'} = \frac{x}{r'^3} - \frac{3X'}{r'^5}(X'x + Y'y),$$

$$\frac{\partial E}{\partial Y'} = \frac{y}{r'^3} - \frac{3Y'}{r'^5}(X'x + Y'y),$$

$$\frac{\partial E}{\partial Z'} = \frac{z}{r'^3}.$$

On a donc

$$\frac{\partial\Omega}{\partial X'}\frac{\partial x}{\partial g} + \frac{\partial\Omega}{\partial Y'}\frac{\partial y}{\partial g} + \frac{\partial\Omega}{\partial Z'}\frac{\partial z}{\partial g} = -\frac{m'}{\mu}\frac{\partial D}{\partial g} - \frac{m'}{\mu}\frac{x\partial x + y\partial y + z\partial z}{r'^3\partial g}$$

$$+\frac{3m'}{\mu r'^5}(X'x + Y'y)\left(X'\frac{\partial x}{\partial g} + Y'\frac{\partial y}{\partial g}\right)$$

$$= -\frac{m'}{\mu}\left(\frac{\partial D}{\partial g} + \frac{\frac{1}{2}\partial.r^2}{r'^3\partial g} - \frac{3}{r'^5}X'^2\frac{\partial.\frac{1}{2}x^2}{\partial g} - \frac{3X'Y'}{r'^5}\frac{\partial.xy}{\partial g} - \frac{3Y'^2}{r'^5}\frac{\partial.\frac{1}{2}y^2}{\partial g}\right),$$

ce qui est une différentielle exacte par rapport à g, puisque les coordonnées de m' ne contiennent pas g.

Ainsi, les perturbations que la planète troublée exerce sur la planète troublante n'introduisent aucun terme constant dans $\frac{d\delta W}{dt}$.

Les perturbations qu'une troisième planète exerce sur la planète troublante introduisent des facteurs de la forme

$$\frac{\cos}{\sin}\left(j'g' + j''g'' + K_1\right);$$

ces facteurs ne peuvent amener de terme constant dans $\frac{d\delta W}{dt}$ que si $j=0$, $j''=0$; il suffit donc de considérer les facteurs qui ont la forme

$$k_1 \cos(j'g' + K_1).$$

Mais, dans l'équation (75), toutes les dérivées sont prises par rapport à g; les termes qui résultent de l'expression précédente ne peuvent donc y introduire de terme constant.

44.

Seconde proposition. — Si l'on ne tient pas compte des constantes arbitraires introduites par l'intégration dans la première approximation, le terme multiplié par $\cos \eta$, dans $\frac{d\delta W}{d\varepsilon}$ développé suivant les sinus et cosinus des multiples des angles η et ε, est au coefficient du terme constant de ce développement comme 1 est à $\frac{1}{2}e$.

D'après ce qui vient d'être démontré, et en négligeant les termes dépendants de g', ainsi que les termes multipliés par les sinus, parce qu'ils ne peuvent introduire de terme constant dans la transformation suivante, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\frac{d\delta W}{dt} &= k_1 \cos g + k_2 \cos 2g + \cdots \\ &+ (\cos\eta + \tfrac{1}{2}e)(l_0 + 2l_1 \cos g + 2l_2 \cos 2g + \cdots).\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{n}\frac{d\delta W}{dt}(1 - e\cos\varepsilon) = \frac{d\delta W}{d\varepsilon},$$

et si l'on pose

$$y = e^{\varepsilon i}, \quad \frac{ie}{2} = s,$$

il vient

$$g = \varepsilon - \frac{e(y - y^{-1})}{2i};$$

mais on peut écrire

$$\frac{1}{n}\frac{d\delta W}{dt} = \Sigma K_j e^{jgi} + (\cos\eta + \tfrac{1}{2}e)\Sigma L_j e^{jgi}\,;$$

il vient donc

$$\frac{d\delta W}{d\epsilon} = \Sigma K_j y^j e^{-e(y-y^{-1})}[1 - \tfrac{1}{2}e(y+y^{-1})]$$
$$+ (\cos\eta + \tfrac{1}{2}e)\Sigma L_j y^j e^{-e(y-y^{-1})}[1 - \tfrac{1}{2}e(y+y^{-1})].$$

De plus,

$$e^{-e(y-y^{-1})} = I_0^e - I_1^e y + I_2^e y^2 - \cdots \pm I_n^e y^n \mp \cdots$$
$$+ I_1^e y^{-1} + I_2^e y^{-2} + \cdots + I_n^e y^{-n} + \cdots,$$

expression dans laquelle I_n^e désigne une intégrale de Bessel, et qui donne d'abord

$$e^{jgi} = y^j e^{-e(y-y^{-1})} = \cdots + I_3^e y^{j-3} + I_2^e y^{j-2} + I_1^e y^{j-1} + I_0^e y^j$$
$$- I_1^e y^{j+1} + I_2^e y^{j+2} - I_3^e y^{j+3} + \cdots,$$

puis

$$e^{jgi}[1 - \tfrac{1}{2}e(y+y^{-1})]$$
$$= \cdots \begin{array}{r|r|r|r|r|l} +I_2^e & y^{j-2} + I_1^e & y^{j-1} + I_0^e & y^j - I_1^e & y^{j+1} + I_2^e & y^{j+2} - \cdots; \\ -\tfrac{1}{2}eI_3^e & -\tfrac{1}{2}eI_2^e & -\tfrac{1}{2}eI_1^e & -\tfrac{1}{2}eI_0^e & +\tfrac{1}{2}eI_1^e & \\ -\tfrac{1}{2}eI_1^e & -\tfrac{1}{2}eI_0^e & +\tfrac{1}{2}eI_1^e & -\tfrac{1}{2}eI_2^e & +\tfrac{1}{2}eI_3^e & \end{array}$$

cette dernière relation peut s'écrire

$$e^{jgi}[1 - \tfrac{1}{2}e(y+y^{-1})] = \begin{array}{l|l|l} I_j^e \qquad + I_{j-1}^e & y + I_{j-2}^e & y^2 + \cdots, \\ -\tfrac{1}{2}eI_{j+1}^e - \tfrac{1}{2}eI_j^e & -\tfrac{1}{2}eI_{j-1}^e & \\ -\tfrac{1}{2}eI_{j-1}^e - \tfrac{1}{2}eI_{j-2}^e & -\tfrac{1}{2}eI_{j-3}^e & \end{array}$$

et il faut y faire varier j de $-\infty$ à $+\infty$, puis faire la somme des résultats obtenus. Mais, entre les transcendantes I_j^e, il existe la relation

$$I_j^e - \tfrac{1}{2}eI_{j+1}^e - \tfrac{1}{2}eI_{j-1}^e = 0,$$

pour toutes les valeurs de j différentes de 0 : on a donc

$$\frac{d\delta W}{d\epsilon} = (\tfrac{1}{2}e + \cos\eta)\, l_0\,,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

45.

Troisième proposition. — Les constantes arbitraires, que l'intégration introduit dans la première approximation, amènent dans le développement de $\frac{d\delta W}{dt}$ suivant les puissances des exponentielles $e^{\varepsilon\iota}$, $e^{\eta\iota}$ des termes constants et des termes de la forme knt et $k'nt\cos\eta$, dans lesquels les coefficients n'ont pas entre eux le rapport qu'on vient de trouver entre les autres constantes.

La fonction $\frac{\partial\Omega}{\partial g}$ n'a pas de terme constant; mais, en désignant par p une constante arbitraire, on a

$$n\int\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt = p.$$

Soit de plus

$$n\int\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt + \tfrac{2}{3}r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \varpi,$$

où ϖ est formé de p et du terme constant de $r\frac{\partial\Omega}{\partial r}$. Supposons encore que le développement des fonctions qui sont sous le signe $\int$ dans la valeur de $\frac{d\delta W}{dt}$ amène les constantes suivantes

$$\frac{\partial\Omega}{\partial v} = \alpha, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial e} = \beta, \quad P = \theta, \quad Q = \varphi.$$

En intégrant, il vient

$$n\int\left[n\int\frac{\partial\Omega}{\partial g}dt + \tfrac{2}{3}r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right]dt = \varpi nt + q,$$

$$n\int\frac{\partial\Omega}{\partial v}dt = \alpha nt + \mathit{6},$$

$$n\int\frac{\partial\Omega}{\partial e}dt = \beta nt + c,$$

$$n\int P dt = \theta nt + h,$$

$$n\int Q dt = \varphi nt + k,$$

où q, $\mathit{6}$, c, h, k sont des constantes arbitraires.

L'inspection du développement de $\frac{d\delta W}{dt}$, art. 32 et 36, montre que les termes renfermant les dérivées de Ω en facteur ne peuvent introduire de terme proportionnel au temps, puisque ces dérivées n'en renferment pas; les seuls termes de la seconde et de la troisième ligne, art. 32, peuvent en donner. La substitution des valeurs précédentes, dans ces lignes, donne

$$\frac{d\delta W}{dt}=a^2n\frac{3-2e^2}{e^2f^2}\alpha(\alpha nt+6)+3a^2n\beta(\beta nt+c)-\frac{3a^2n}{e^2f}\alpha p,$$

et, comme la présence dans $\frac{d\delta W}{d\varepsilon}$ d'un terme de la forme $A(\cos\eta+\frac{1}{2}e)$, est due à l'absence dans $\frac{d\delta W}{dt}$ de termes analogues à ceux de la ligne ci-dessus, cette ligne ne saurait en introduire de pareils.

46.

En intégrant l'expression précédente, on a

$$\delta W=\frac{a^2(3-2e^2)}{e^2f^2}(\tfrac{1}{2}\alpha^2n^2t^2+\alpha 6nt)+3a^2(\tfrac{1}{2}\beta^2n^2t^2+\beta cnt)-\frac{3a^2}{e^2f}\alpha pnt;$$

la constante d'intégration est nulle ici. Comme on a

$$\frac{d\delta z}{dt}=\overline{\delta W}+\frac{\overline{\partial W}}{\partial\gamma}n\delta z+\nu^2;$$

on pourrait croire que les termes de l'expression précédente de $\frac{d\delta W}{dt}$ doivent amener dans δz des termes proportionnels au carré du temps; mais on va voir qu'il n'en est pas ainsi.

Quatrième proposition. — Dans le développement de $\frac{d\delta z}{d\varepsilon}$ suivant les puissances de $e^{\varepsilon\iota}$, les termes proportionnels à t et à t^2 sont nuls.

L'expression $e^{j\eta\iota}\,[1-\frac{1}{2}e\,(y+y^{-1})]$ ne renfermant pas de terme constant, la proposition qui vient d'être énoncée exige que $\frac{d\delta z}{dt}$ n'en renferme pas non plus. On a

$$n\delta z=-3a(\varpi nt+q)+\frac{a}{e}(2-e^2-e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon.\left(p-\frac{\alpha nt+6}{f}\right)$$
$$+a(e-2\cos\varepsilon+e\cos^2\varepsilon)(\beta nt+c),$$

$$\nu=\tfrac{3}{2}ap+\frac{a}{2f}(\alpha nt+6)+\frac{a}{e}(\cos\varepsilon+\tfrac{1}{2}e)\left[p-\frac{1}{f}(\alpha nt+6)\right]-a\sin\varepsilon.(\beta nt+c).$$

La première approximation de $\frac{d\delta z}{dt}$ est $\overline{\partial W}$; pour avoir $\frac{\overline{\partial W}}{\partial \gamma}$, il faut donc différentier, par rapport à g, en dehors du signe $\int$, l'expression de $\frac{d\delta z}{dt}$, art. 29, ce qui donne

$$\frac{\overline{\partial W}}{\partial \gamma} = -\frac{2an}{e}\sin\varepsilon.\frac{d\varepsilon}{dg}\left(\frac{p}{n} - \frac{\alpha nt + 6}{nf}\right) + 2an\cos\varepsilon.\frac{d\varepsilon}{dg}\,\frac{\beta nt + c}{n},$$

et, comme $ndt = dg = \frac{r}{a}\,d\varepsilon$,

$$\frac{\overline{\partial W}}{\partial \gamma} = -\frac{2a^2}{er}\sin\varepsilon.\left(p - \frac{\alpha nt + 6}{f}\right) + \frac{2a^2\cos\varepsilon}{r}(\beta nt + c).$$

Multipliant cette expression par la valeur ci-dessus de $n\delta z$, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{\partial W}}{\partial \gamma} n\delta z = & \frac{6a^3}{er}\sin\varepsilon.\left(p - \frac{\alpha nt + 6}{f}\right)(\varpi nt + q) \\
& - \frac{2a^3}{e^2 r}\sin^2\varepsilon.(2 - e^2 - e\cos\varepsilon)\left(p - \frac{\alpha nt + 6}{f}\right)^2 \\
& + \frac{2a^3}{r}(e - 2\cos\varepsilon + e\cos^2\varepsilon)\cos\varepsilon.(\beta nt + c)^2 \\
& - \frac{2a^3}{er}\sin\varepsilon.(e - 2\cos\varepsilon + e\cos^2\varepsilon)(\beta nt + c)\left(p - \frac{\alpha nt + 6}{f}\right) \\
& + \frac{2a^3\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{r}(2 - e^2 - e\cos\varepsilon)(\beta nt + c)\left(p - \frac{\alpha nt + 6}{f}\right) \\
& - \frac{3a^3\cos\varepsilon}{r}(\varpi nt + q)(\beta nt + c);
\end{aligned}$$

mais

$$\frac{a}{r}\cos j\varepsilon = \frac{d\sin j\varepsilon}{jdg} = \text{des termes périodiques},$$

$$\frac{a}{r} = 1 + \text{des termes périodiques},$$

$$\frac{a}{r}\sin j\varepsilon = -\frac{d\cos j\varepsilon}{jdg} = \text{des termes périodiques}.$$

Alors la seconde ligne de l'expression précédente n'a en facteur d'autres termes constants que

$$-\frac{2a^2(2 - e^2)}{e^2},$$

et la troisième que

$$-2a^2\,;$$

les coefficients des autres lignes sont périodiques. Si donc on conserve les termes non périodiques, et proportionnels à t et à t^2, on a

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial \gamma}}\, n\delta z = -\frac{2a^2}{e^2}(2-e^2)\left(\frac{\alpha^2 n^2 t^2}{2f^2}+\frac{\alpha 6 n t}{f}\right)+\frac{2a^2(2-e^2)}{e^2 f}\alpha p n t$$
$$-2a^2(\beta^2 n^2 t^2 + 2\beta c n t).$$

Opérant d'une manière analogue pour ν, remarquant que $\cos\varepsilon + \frac{1}{2}e$ et $\sin\varepsilon$ ne contiennent pas de termes non périodiques, et que les termes constants de $(\cos\varepsilon + \frac{1}{2}e)^2$ et de $\sin^2\varepsilon$ sont respectivement $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^2$, $\frac{1}{2}$, il vient

$$\nu^2 = \frac{a^2}{e^2 f^2}(\tfrac{1}{2}\alpha^2 n^2 t^2 + \alpha 6 n t) + \frac{(2e^2-1)a^2}{e^2 f}\alpha p n t + a^2(\tfrac{1}{2}\beta^2 n^2 t^2 + \beta c n t).$$

En substituant dans la valeur de $\frac{d\delta z}{dt}$, on trouve

$$\overline{\delta W} + \overline{\frac{\partial W}{\partial \gamma}}\, n\delta z + \nu^2 = 0.$$

47.

Cinquième proposition. — Dans le développement de $\frac{d\delta z}{dt}$ suivant les puissances de $e^{\varepsilon i}$ les coefficients des termes proportionnels à t et à t^2 sont aux coefficients des termes proportionnels à $t e^{\varepsilon i}$ et à $t^2 e^{\varepsilon i}$ comme $\frac{1}{2}e$ est à 1.

On a

$$\frac{d\delta z}{d\varepsilon} = (1 - e\cos\varepsilon)\frac{d\delta z}{dt}\,;$$

or, en désignant par k et k' des coefficients numériques fournis par le calcul, il vient

$$\frac{d\delta z}{dt} = \tfrac{1}{2}ket + \tfrac{1}{2}k'et^2 + kt\cos\varepsilon + k't^2\cos\varepsilon + \cdots\,;$$

car cette expression, multipliée par $1 - e\cos\varepsilon$, donne un produit duquel ont disparu les termes proportionnels à t et à t^2; mais ce

produit est précisément $n\frac{d\delta z}{d\varepsilon}$, qui ne doit pas, en effet, contenir de termes proportionnels à t ou à t^2.

48.

Il est démontré, par ce qui précède, que les termes constants proportionnels à t, contenus dans $\frac{d\delta W}{d\varepsilon}$, de même que les termes proportionnels à t et à t^2, contenus dans $\frac{\partial W}{\partial \gamma}$ $n\delta z$ et ν^2, ne contribuent en rien à la variation séculaire de la longitude moyenne, mais se détruisent les uns les autres ; il faut donc, dans le calcul, négliger les termes de cette nature, que l'incertitude des dernières décimales pourrait amener. Il résulte de là que la variation séculaire de la longitude moyenne ne peut provenir que des termes où se trouve, comme argument, la différence $\eta - \varepsilon$. Les seuls termes, dans $\frac{d\delta W}{d\varepsilon}$, qui puissent en amener de proportionnels à t^2 dans $n\delta z$, sont donnés par

$$\frac{d\delta W}{d\varepsilon} = knt\sin(\eta - \varepsilon),$$

d'où

$$\delta W = knt\cos(\eta - \varepsilon),$$

$$\overline{\delta W} = knt,$$

$$n\delta z = \int \frac{r}{a}\overline{\delta W}\,d\varepsilon = \tfrac{1}{2}kn^2t^2 ;$$

k représente ici un coefficient introduit par le calcul et qui ne se compose que d'un petit nombre de termes. Ainsi, en négligeant les termes dépendants des puissances de la force perturbatrice supérieures à la seconde, on a, pour le terme principal de la variation séculaire de la longitude moyenne

$$\tfrac{1}{2}kn^2t^2.$$

49.

Sixième proposition. — Dans le calcul de la fonction

$$\frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial \eta^2}\frac{an\delta z}{r} - \frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta}\frac{an\delta z}{r}\frac{ae\sin\varepsilon}{r},$$

développée suivant les puissances de $e^{\varepsilon i}$, le terme proportionnel à ε^2 est nul.

Il ne peut provenir que du produit des termes ayant déjà ε en facteur; en ne conservant qu'eux et supprimant l'indice 0 de la lettre H, pour abréger l'écriture, il vient

$$\frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta} = -(H'' - iH')e^{\varepsilon i}\varepsilon,$$

$$n\delta z = [H'' - i(1 - \tfrac{1}{2}e^2)H']e^{\varepsilon i}\varepsilon - \tfrac{1}{4}e(H'' - iH')e^{2\varepsilon i}\varepsilon,$$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta}n\delta z = \varepsilon^2\Big\{&-2i[(1 - \tfrac{1}{2}e^2)H'^2 - H''^2] - \tfrac{1}{4}ei(H''^2 + H'^2)e^{\varepsilon i}\\ &-[2(1 - \tfrac{1}{2}e^2)H'H'' + i(1 - \tfrac{1}{2}e^2)H'^2 - iH''^2]e^{2\varepsilon i}\\ &+\tfrac{1}{4}e[2H'H'' - i(H'^2 - H''^2)]e^{3\varepsilon i}\Big\};\end{aligned}$$

multipliant par

$$f\frac{a^2 e\sin\varepsilon}{r^2} = -i[\beta(e^{\varepsilon i} - e^{-\varepsilon i}) + 2\beta^2(e^{2\varepsilon i} - e^{-2\varepsilon i}) + \cdots],$$

et ne conservant que les termes indépendants de l'exponentielle, on a

$$\frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta}n\delta z\frac{a^2 ef\sin\varepsilon}{r^2} = [-8(1 - \tfrac{1}{4}e^2)\beta^2 + 3e\beta^3]\varepsilon^2 H'H''.$$

De même

$$\frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial \eta^2} = -(H' + iH'')e^{\varepsilon i}\varepsilon.$$

Multipliant par $n\delta z$, il vient, avec la même restriction que précédemment,

$$\frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial \eta^2}n\delta z = -[e^2 + 2(1 - \tfrac{1}{4}e^2)e^{2\varepsilon i} - \tfrac{1}{2}e\,e^{3\varepsilon i}]\varepsilon^2 H'H'',$$

et comme

$$f\frac{a}{r} = 1 + \beta(e^{\varepsilon i} + e^{-\varepsilon i}) + \beta^2(e^{2\varepsilon i} + e^{-2\varepsilon i}) + \cdots,$$

il vient

$$\frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial \eta^2} n\delta z f \frac{a}{r} = [-e^2 - 4\beta^2(1-\tfrac{1}{4}e^2) + e\beta^2]\,\iota^2 H'H'';$$

par suite,

$$\frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial \eta^2} n\delta z \frac{a}{r} - \frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta} n\delta z \frac{a^2 e \sin \varepsilon}{r^2} = \frac{1}{f}[e^2 - 4(1-\tfrac{1}{4}e^2)\beta^2 + 2e\beta^3]H'H'';$$

mais $e = \dfrac{2\beta}{1+\beta^2}$, la partie entre crochets est donc nulle; la proposition énoncée se trouve ainsi démontrée.

Septième proposition. — Dans le développement de la fonction Γ, il n'existe pas de termes multipliés par ε.

En effet, on tire aisément de l'art. 9, *Première partie,*

$$d\Gamma = \frac{1}{2f\cos i} \frac{r}{a} \frac{u}{\cos i} a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z} d\varepsilon,$$

et comme $a^2 \dfrac{\partial \Omega}{\partial Z}$ ne renferme aucun terme proportionnel à ε, les termes de cette nature, s'ils existent, ne peuvent provenir que de $\dfrac{r}{a}\dfrac{u}{\cos i}$. Mais

$$\frac{u}{\cos i} = -2eV_0''\varepsilon + (V_0'' - iV_0')\mathrm{e}^{\varepsilon\iota}\varepsilon,$$

$$\frac{r}{a}\frac{u}{\cos i} = -3eV_0''\varepsilon + [(1+e^2)V_0'' - iV_0']\mathrm{e}^{\varepsilon\iota}\varepsilon - \tfrac{1}{2}e(V_0'' - iV_0')\mathrm{e}^{2\varepsilon\iota}\varepsilon;$$

de plus,

$$a^2\frac{\partial \Omega}{\partial Z} = D_0' + (D_1' + iD_1'')\mathrm{e}^{\varepsilon\iota} + (D_2' + iD_2'')\mathrm{e}^{2\varepsilon\iota} + \cdots,$$

d'où

$$\frac{r}{a}\frac{u}{\cos i}a^2\frac{\partial \Omega}{\partial Z} = \{V_0''[-3eD_0' + 2(1+e^2)D_1' - eD_2'] + V_0'(-2D_1'' + eD_2'')\}\varepsilon,$$

et comme, d'après les équations (75), *Première partie,* on a

$$-3eD_0' + 2(1+e^2)D_1' - eD_2' = V_0',$$
$$2D_1'' - eD_2'' = V_0'',$$

le coefficient de ε est nul, et, $d\Gamma$ n'ayant pas de terme en ε, Γ ne saurait en avoir en ε^2.

---

§ IV.

Intégration des expressions précédemment calculées et desquelles dépendent les perturbations du second ordre.

50.

Des développements précédemment exécutés il résulte qu'on a

$$\frac{d\delta W}{d\varepsilon} = (F)e^{\varphi i} + (G)e^{(\varphi-\eta)i} + (H)e^{(\varphi+\eta)i} + \varepsilon[(\mathrm{F})e^{\varphi i} + (\mathrm{G})e^{(\varphi-\eta)i} + (\mathrm{H})e^{(\varphi+\eta)i}],$$

d'où l'on exclut provisoirement le cas de $j' = 0$. Pour intégrer cette expression et les suivantes, je rappelle que

$$\int \varepsilon e^{\varphi i} d\varepsilon = -\frac{1}{j-j'\mu} i\varepsilon e^{\varphi i} + \frac{1}{(j-j'\mu)^2} e^{\varphi i}.$$

$$\int \varepsilon^2 e^{j\varepsilon i} d\varepsilon = -\frac{1}{j} i\varepsilon^2 e^{j\varepsilon i} + \frac{2}{j^2}\varepsilon e^{j\varepsilon i} + \frac{2i}{j^3} e^{j\varepsilon i}.$$

Posant, pour abréger, $j - j'\mu = \omega$, et négligeant, comme dans les intégrations suivantes, la constante arbitraire, il vient

$$\delta W = -\frac{1}{\omega}\left[i(G) - \frac{1}{\omega}(\mathrm{G})\right]e^{(\varphi-\eta)i} - \frac{1}{\omega}\left[i(F) - \frac{1}{\omega}(\mathrm{F})\right]e^{\varphi i}$$
$$- \frac{1}{\omega}\left[i(H) - \frac{1}{\omega}(\mathrm{H})\right]e^{(\varphi+\eta)i}$$
$$- \frac{1}{\omega} i\varepsilon[(\mathrm{F})e^{\varphi i} + (\mathrm{G})e^{(\varphi-\eta)i} + (\mathrm{H})e^{(\varphi+\eta)i}],$$

d'où

$$\overline{\delta W} = Pe^{\varphi i} + \varepsilon \mathrm{P} e^{\varphi i},$$

en posant

$$P_j = -\frac{1}{\omega} i[(F)_j + (G)_{j+1} + (H)_{j-1}] + \frac{1}{\omega^2}[(\mathrm{F})_j + (\mathrm{G})_{j+1} + (\mathrm{H})_{j-1}];$$

$$\mathrm{P}_j = -\frac{1}{\omega} i[(\mathrm{F})_j + (\mathrm{G})_{j+1} + (\mathrm{H})_{j-1}].$$

Des calculs de la première approximation on tire

$$\frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta}\frac{an\delta z}{r} + \nu^2 = Je^{\varphi i} + \varepsilon \mathrm{J} e^{\varphi i},$$

par suite

$$\frac{d\delta z}{dt} = M e^{\varphi\varepsilon} + \varepsilon \mathrm{M} e^{\varphi\varepsilon},$$

où l'on a posé

$$M = P + J, \qquad \mathrm{M} = \mathrm{P} + \mathrm{J}.$$

Multipliant cette équation par $\frac{r}{a} = 1 - e \cos \varepsilon$, il vient

$$n \frac{d\delta z}{d\varepsilon} = R_1 e^{\varphi\varepsilon} + \varepsilon \mathrm{R}_1 e^{\varphi\varepsilon},$$

en posant

$$R_1 = M_j - \tfrac{1}{2} e M_{j+1} - \tfrac{1}{2} e M_{j-1}, \qquad \mathrm{R}_1 = \mathrm{M}_j - \tfrac{1}{2} e \mathrm{M}_{j+1} - \tfrac{1}{2} e \mathrm{M}_{j-1}.$$

Intégrant, on obtient

$$n\delta z = -(R) e^{\varphi\varepsilon} - \varepsilon (\mathrm{R}) e^{\varphi\varepsilon},$$

où l'on a fait

$$(R) = \frac{1}{\omega} R_1 - \frac{1}{\omega^2} \mathrm{R}, \qquad (\mathrm{R}) = i . \frac{1}{\omega} \mathrm{R}_1 .$$

On aura aussi

$$\frac{\partial \delta W}{\partial \eta} = -\frac{1}{\omega}\left[(G) + i . \frac{1}{\omega}(\mathrm{G})\right] e^{(\varphi-\eta)\varepsilon} + \frac{1}{\omega}\left[(H) + i . \frac{1}{\omega}(\mathrm{H})\right] e^{(\varphi+\eta)\varepsilon}$$
$$- \frac{1}{\omega} \varepsilon \left[(\mathrm{G}) e^{(\varphi-\eta)\varepsilon} - (\mathrm{H}) e^{(\varphi+\eta)\varepsilon}\right],$$

d'où

$$\frac{\partial \overline{\delta W}}{\partial \eta} = -(Q) e^{\varphi\varepsilon} - \varepsilon (\mathrm{Q}) e^{\varphi\varepsilon},$$

en posant

$$(Q)_j = \frac{1}{\omega}\left[(G)_{j+1} - (H)_{j-1}\right] + i . \frac{1}{\omega^2}\left[(\mathrm{G})_{j+1} - (\mathrm{H})_{j-1}\right],$$

$$(\mathrm{Q})_j = \frac{1}{\omega}\left[(\mathrm{G})_{j+1} - (\mathrm{H})_{j-1}\right].$$

La première approximation donne aussi

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \frac{a n \delta z}{r} - \frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta} \frac{a n \delta z}{r} \frac{a e \sin \varepsilon}{r} = -(K) e^{\varphi\varepsilon} - \varepsilon (\mathrm{K}) e^{\varphi\varepsilon};$$

par suite,

$$2 \frac{d\delta\nu}{d\varepsilon} = (N) e^{\varphi\varepsilon} + \varepsilon (\mathrm{N}) e^{\varphi\varepsilon},$$

en posant

$$(N) = (Q) + (K), \quad (\text{N}) = (\text{Q}) + (\text{K}).$$

En intégrant, on a

$$2\delta\nu = Se^{\varphi i} + \iota\, \text{s} e^{\varphi i},$$

où

$$S = \frac{1}{\omega} i(N) - \frac{1}{\omega^2}(\text{N}), \quad \text{s} = \frac{1}{\omega} i(\text{N}).$$

Ainsi sont obtenues les perturbations de la longitude et du rayon vecteur.

51.

L'équation

$$\frac{h_0}{h} = (1 + \nu)^2 \frac{dz}{dt},$$

peut s'écrire, en tenant compte des perturbations,

$$1 + \delta \frac{h_0}{h} = (1 + \nu)^2 \left(1 + \frac{d\delta z}{dt}\right);$$

développant, et ne conservant que les termes du premier ordre, il vient

$$\frac{d\delta z}{dt} + 2\nu - \delta \frac{h_0}{h} = 0.$$

Pour tenir compte de l'introduction de (n) à la place de n_0, il faut prendre la variation du premier membre, ce qui donne

$$\Delta \frac{d\delta z}{dt} + 2 \Delta \nu - \Delta \delta \frac{h_0}{h}$$

à ajouter au premier membre.

On peut donner à cette expression une autre forme. Soit, en effet,

$$T = M e^{(l\eta + \varphi)i},$$

où l'on doit donner à l les valeurs $-1, 0, 1$, et faire la somme des termes qui en résultent. Multipliant par $d\varepsilon$ et intégrant, on a

$$W = 2k + (K_1' - iK_1'')e^{\eta i} - \frac{1}{\omega} iMe^{(l\eta + \varphi)i};$$

mais

$$\frac{d\delta z}{dt} = W,$$

$$2\nu = -\int \frac{\partial W}{\partial \eta} d\varepsilon,$$

$$\delta \frac{h_0}{h} = \int T d\varepsilon;$$

par suite,

$$\frac{d\delta z}{dt} = 2k + (K_1' - iK_1'') e^{\varepsilon i} - \frac{1}{\omega - l} i M_{j-l} e^{\varphi i},$$

$$2\nu = 2C - (K_1' - Ki_1'') e^{\varepsilon i} + \frac{li}{\omega(\omega - l)} M_{j-l} e^{\varphi i},$$

$$\delta \frac{h_0}{h} = -2K - \frac{1}{\omega} i M_{j-l} e^{\varphi i}.$$

Mettant en évidence le moyen mouvement, et le considérant comme variable dans les dénominateurs, où, par la différentiation, il apporte les modifications les plus importantes, on a

$$\frac{d\delta z}{dt} = 2k + (K_1' - iK_1'') e^{\varepsilon i} - \frac{n_0 i}{jn - j'n' - ln} M_{j-l} e^{\varphi i},$$

$$2\nu = \frac{2n_0}{n} C - \frac{n_0}{n} (K_1' - iK_1'') e^{\varepsilon i} + \frac{n_0^2 li}{(jn - j'n')(jn - j'n' - ln)} M_{j-l} e^{\varphi i},$$

$$\delta \frac{h_0}{h} = -2K - \frac{n_0 i}{jn - j'n'} M_{j-l} e^{\varphi i},$$

$$\frac{d\delta z}{dt} + 2\nu - \delta \frac{h_0}{h} = 2K + 2k + \frac{n - n_0}{n} (k_1 - ik_1') e^{\varphi i}$$
$$+ \frac{n_0 l (n_0 - n) i}{(jn - j'n')(jn - j'n' - ln)} M_{j-l} e^{\varphi i},$$

et, en prenant la différence par rapport à n,

$$\Delta \delta \frac{h_0}{h} - \Delta \frac{d\delta z}{dt} - 2\Delta\nu = \frac{\Delta n}{n} \left[2C - (K_1' - iK_1'') e^{\varepsilon i} + \frac{il}{(j - j'\mu)(j - j'\mu - l)} M_{j-l} e^{\varphi i} \right]$$
$$= 2\nu \frac{\Delta n}{n}.$$

Si l'on ne veut tenir compte que des perturbations du second ordre, on développe

$$\left(1 + \delta \frac{h_0}{h}\right) (1 + \nu)^{-2} = 1 + \frac{d\delta z}{dt},$$

ce qui donne

$$\delta\frac{h_0}{h}-\frac{d\delta z}{dt}-2\nu+3\nu^2-2\nu\delta\frac{h_0}{h}=0.$$

Prenant la variation de cette expression, en désignant par δ l'accroissement du second ordre, il vient

$$\frac{d\delta z}{dt}+2\delta\nu=\delta\frac{h_0}{h}+3\nu^2-2\nu\delta\frac{h_0}{h}+2\nu\frac{\Delta n}{n}. \tag{77}$$

Pour appliquer cette équation aux quantités déterminées art. 51, il faut remarquer que $\delta\frac{h_0}{h}=-\delta\frac{h}{h_0}$, en négligeant les quantités du second ordre ; elle devient ainsi

$$\frac{d\delta z}{dt}+2\delta\nu=\frac{h_0}{h}+3\nu^2+2\nu\delta\frac{h}{h_0}+2\nu\frac{\Delta n}{n}. \tag{78}$$

De l'expression précédemment calculée

$$\frac{d\delta\frac{h_0}{h}}{d\varepsilon}=(D)_1e^{\varphi i}+\iota(\mathrm{d})_1e^{\varphi i},$$

on tire

$$\delta\frac{h_0}{h}=De^{\varphi i}+\iota\mathrm{d}e^{\varphi i},$$

en posant

$$D=-\frac{1}{\omega}i(D)_1+\frac{1}{\omega^2}(\mathrm{d})_1,\qquad \mathrm{d}=\frac{1}{\omega}i(\mathrm{d})_1,$$

Soit de plus

$$\nu^2=Be^{\varphi i}+\iota\mathrm{B}e^{\varphi i},\qquad 2\nu\delta\frac{h}{h_0}=Ce^{\varphi i}+\iota\mathrm{c}e^{\varphi i},$$

et, en se bornant aux termes du premier ordre par rapport à la force perturbatrice,

$$2\nu=Ze^{\varphi i};$$

substituant dans l'équation (78), il vient

$$\left\{\begin{array}{l} M+S=D+3B+C+Z\dfrac{\Delta n}{n},\\ \mathrm{M}+\mathrm{S}=\mathrm{D}+3\mathrm{B}+\mathrm{C}.\end{array}\right. \tag{79}$$

52.

Si l'on désigne par $\delta_1 R$ la partie de δR obtenue en négligeant les termes ayant en facteur D'_2, E'_2, art. 12, on peut écrire

$$\frac{1}{\cos i}\frac{d\delta_1 R}{d\iota} = (T)_1 e^{\varphi\iota} + (U)_1 e^{(\varphi-\eta)\iota} + (V)_1 e^{(\varphi+\eta)\iota}$$
$$+ \iota\left[(\mathrm{T})_1 e^{\varphi\iota} + (\mathrm{U})_1 e^{(\varphi-\eta)\iota} + (\mathrm{V})_1 e^{(\varphi+\eta)\iota}\right],$$

d'où

$$\frac{1}{\cos i}\delta_1 R = T e^{\varphi\iota} + U e^{(\varphi-\eta)\iota} + V e^{(\varphi+\eta)\iota}$$
$$+ \iota\left[\mathrm{T} e^{\varphi\iota} + \mathrm{U}^{(\varphi-\eta)\iota} + \mathrm{V} e^{(\varphi+\eta)\iota}\right],$$

en posant

$$T = -\frac{1}{\omega} i(\dot{T})_1 + \frac{1}{\omega^2}(\mathrm{T})_1, \qquad \mathrm{T} = -\frac{1}{\omega} i(\mathrm{T})_1,$$

$$U = -\frac{1}{\omega} i(U)_1 + \frac{1}{\omega^2}(\mathrm{U})_1, \qquad \mathrm{U} = -\frac{1}{\omega} i(\mathrm{U})_1,$$

$$V = -\frac{1}{\omega} i(V)_1 + \frac{1}{\omega^2}(\mathrm{V})_1, \qquad \mathrm{V} = -\frac{1}{\omega} i(\mathrm{V})_1.$$

On a de plus

$$\frac{1}{\cos i}\frac{\overline{\partial R}}{\partial n}\frac{an\delta z}{r} = Y e^{\varphi\iota} + \iota \mathrm{Y} e^{\varphi\iota},$$

et comme

$$\delta_1 u = \overline{\delta_1 R} + \frac{\overline{\partial R}}{\partial n}\frac{an\delta z}{r},$$

il vient

$$\frac{1}{\cos i}\delta_1 u = W e^{\varphi\iota} + \iota \mathrm{W} e^{\varphi\iota},$$

en posant

$$W_j = T_j + U_{j+1} + V_{j-1} + Y_j, \qquad \mathrm{W}_j = \mathrm{T}_j + \mathrm{U}_{j+1} + \mathrm{V}_{j-1} + \mathrm{Y}_j.$$

On obtient ainsi la partie principale des perturbations du second ordre en latitude; l'autre partie s'obtient par une intégration directe.

Soit, en effet,

$$\frac{d\delta_2 R}{d\iota} = D'_2 \frac{u}{\cos i} + E'_2 \frac{u_1}{\cos i}:$$

de l'art. 12, en remarquant que $\frac{d\delta_2 R}{dt} = \frac{d\delta_2 R}{d\epsilon}\frac{an}{r}$, on déduit

$$(80)\left\{\begin{aligned}\frac{d\delta_2 R}{dt} = -\frac{nr}{f^2}\rho\sin(\omega - w)\sin i.\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\Big\{&[\sin(w+\varpi-\theta)+e\sin(\varpi-\theta)]\frac{u}{\cos i}\\ &+f\cos(w+\varpi-\theta)\frac{u_1}{\cos i}\Big\};\end{aligned}\right.$$

or, d'après l'art. 4,

$$u = \frac{r}{a}[q\sin(w+\varpi-\theta) - p\cos(w+\varpi-\theta)],$$

d'où l'on tire, à l'aide des équations (3)* et (4),

$$q = \frac{u}{f^2}[\sin(w+\varpi-\theta) + e\sin(\varpi-\theta)] + \frac{u_1}{f}\cos(w+\varpi-\theta),$$

et, par suite,

$$\frac{d\delta_2 R}{dt} = -\frac{nr}{f^2}\rho\sin(\omega - w)\sin i.\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\frac{q}{\cos i}.$$

D'ailleurs les équations (19), *Première partie,* donnent

$$\frac{an}{f}r\frac{\partial\Omega}{\partial Z} = \frac{1}{\cos i}\left[\frac{dp}{dt}\sin(w+\varpi-\theta) + \frac{dq}{dt}\cos(w+\varpi-\theta)\right];$$

on a donc

$$\frac{d\delta_2 R}{dt} = -\left[\frac{\rho}{a}q\frac{dp}{dt}\sin(w+\varpi-\theta) + \frac{\rho}{a}q\frac{dq}{dt}\cos(w+\varpi-\theta)\right]\frac{\sin i}{\cos^2 i}\sin(\omega - w);$$

développant, remplaçant les produits de lignes trigonométriques par des sommes, et tenant compte encore une fois des équations (19), *Première partie,* il vient enfin

$$\frac{d\delta_2 R}{dt} = -\frac{\rho}{a}\left[\sin(\omega+\varpi-\theta)q\frac{dq}{dt} - \cos(\omega+\varpi-\theta)q\frac{dp}{dt}\right]\frac{\sin i}{\cos^2 i}.$$

Le premier terme s'intègre immédiatement. Pour intégrer le dernier, on observe que

$$\int q\,dp = \tfrac{1}{2}pq - \tfrac{1}{2}\int(q\,dp - p\,dq) = \tfrac{1}{2}pq + \Gamma\cos^2 i;$$

donc

$$\delta_2 R = -\frac{\rho}{a}\left[\tfrac{1}{2}q^2\sin(\omega+\varpi-\theta) - (\tfrac{1}{2}pq + \Gamma\cos^2 i)\cos(\omega+\varpi-\theta)\right]\frac{\sin i}{\cos^2 i}.$$

Changeant maintenant τ en t, et désignant par $\delta_2 u$ ce qui devient alors $\delta_2 R$, on a

$$\delta_2 u = -\frac{r}{a}[q\sin(w+\varpi-\theta)-p\cos(w+\varpi-\theta)]\frac{q\sin i}{2\cos^2 i}$$
$$+\Gamma\frac{r}{a}\cos(w+\varpi-\theta)\cos i\sin i;$$

éliminant enfin p et q, à l'aide des valeurs de u et u_1, il vient finalement

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned} \delta_2 u = & -\frac{u^2}{2\cos^2 i}\,\frac{\sin(w+\varpi-\theta)+e\sin(\varpi-\theta)}{f^2}\sin i \\ & -\frac{uu_1}{2\cos^2 i}\,\frac{\cos(w+\varpi-\theta)}{f}\sin i \\ & +\Gamma\frac{r}{a}\cos(w+\varpi-\theta)\cos i\sin i, \end{aligned}\right.$$

où

$$\Gamma = \frac{1}{2f\cos i}\int\frac{r}{a}\,\frac{u}{\cos i}\,a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\,d\varepsilon.$$

53.

Je vais maintenant considérer le cas particulier dans lequel $j'=0$. En conservant la même notation que dans la première approximation, on a

$$\begin{aligned} \frac{d\delta W}{d\varepsilon} = & \; F'_0 \quad + (G)_1 e^{(-\eta+\varepsilon)\iota} + (H)_0 e^{\eta\iota} \\ & + (F)_1 e^{\varepsilon\iota} + (G)_2 e^{(-\eta+2\varepsilon)\iota} + (H)_1 e^{(\eta+\varepsilon)\iota} \\ & + (F)_2 e^{2\varepsilon\iota} + (G)_3 e^{(-\eta+3\varepsilon)\iota} + (H)_2 e^{(\eta+2\varepsilon)\iota} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \varepsilon\left\{\begin{array}{l} \quad \mathrm{F}'_0 \quad + (\mathrm{G})_1 e^{(-\eta+\varepsilon)\iota} + (\mathrm{H})_0 e^{\eta\iota} \\ + (\mathrm{F})_1 e^{\varepsilon\iota} + (\mathrm{G})_2 e^{(-\eta+2\varepsilon)\iota} + (\mathrm{H})_1 e^{(\eta+\varepsilon)\iota} \\ + (\mathrm{F})_2 e^{2\varepsilon\iota} + (\mathrm{G})_3 e^{(-\eta+3\varepsilon)\iota} + (\mathrm{H})_2 e^{(\eta+2\varepsilon)\iota} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}, \end{aligned}$$

et, en intégrant,

$$\begin{aligned} \delta W = & \; F'_0\varepsilon + \tfrac{1}{2}\mathrm{F}'_0\varepsilon^2 + (H)_0 e^{\eta\iota}\varepsilon + \tfrac{1}{2}(\mathrm{H})_0 e^{\eta\iota}\varepsilon^2 \\ & + [-i(G)_1 + (\mathrm{G})_1]e^{(-\eta+\varepsilon)\iota} + [-\tfrac{1}{2}i(G)_2 + \tfrac{1}{4}(\mathrm{G})_2]e^{(-\eta+2\varepsilon)\iota} \\ & \qquad\qquad + [-\tfrac{1}{3}i(G)_3 + \tfrac{1}{9}(\mathrm{G})_3]e^{(-\eta+3\varepsilon)\iota} + \cdots \\ & + [-i(F)_1 + (\mathrm{F})_1]e^{\varepsilon\iota} + [-\tfrac{1}{2}i(F)_2 + \tfrac{1}{4}(\mathrm{F})_2]e^{2\varepsilon\iota} + \cdots \\ & + [-\,i(H)_1 + \;(\mathrm{H})_1]e^{(\eta+\varepsilon)\iota} + \cdots \end{aligned}$$

$$
-i\varepsilon\left\{\begin{array}{llll}(\mathrm{G})_1 e^{(-\eta+\varepsilon)i} + \frac{1}{2}(\mathrm{G})_2 e^{(-\eta+2\varepsilon)i} & + \frac{1}{3}(\mathrm{G})_3 e^{(-\eta+3\varepsilon)i} & + \frac{1}{4}(\mathrm{G})_4 e^{(-\eta+4\varepsilon)i} & + \cdots \\ \qquad + (\mathrm{F})_1 e^{\varepsilon i} & + \frac{1}{2}(\mathrm{F})_2 e^{2\varepsilon i} & + \frac{1}{3}(\mathrm{F})_3 e^{3\varepsilon i} & + \cdots \\ & + (\mathrm{H})_1 e^{(\eta+\varepsilon)i} & + \frac{1}{2}(\mathrm{H})_1 e^{(\eta+2\varepsilon)i} & + \cdots \end{array}\right\}
$$

$$
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
$$

d'où l'on tire

$$
\begin{aligned}
\overline{\delta W} = 2(G_1'' + \mathrm{G}_1') & + \left\{(\mathrm{F})_1 + \tfrac{1}{4}(\mathrm{G})_2 - i[(F)_1 + \tfrac{1}{2}(G)_2]\right\} e^{\varepsilon i} \\
& + \left\{(\mathrm{H})_1 + \tfrac{1}{4}(\mathrm{F})_2 + \tfrac{1}{9}(\mathrm{G})_3 - i[(H)_1 + \tfrac{1}{2}(F)_2 + \tfrac{1}{3}(G)_3]\right\} e^{2\varepsilon i} \\
& + \left\{\tfrac{1}{4}(\mathrm{H})_2 + \tfrac{1}{9}(\mathrm{F})_3 + \tfrac{1}{16}(\mathrm{G})_4 - i[\tfrac{1}{2}(H)_2 + \tfrac{1}{3}(F)_3 + \tfrac{1}{4}(G)_4]\right\} e^{3\varepsilon i} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (F_0' + 2\mathrm{G}_1'')\varepsilon + \tfrac{1}{2}\mathrm{F}_0'\varepsilon^2 + \tfrac{1}{2}(\mathrm{H})_0 e^{\varepsilon i}\varepsilon^2 \\
& + \varepsilon \left\{\begin{array}{l} -i[(\mathrm{F})_1 + \frac{1}{2}(\mathrm{G})_2 + i(H)_0]\, e^{\varepsilon i} \\ -i[\frac{1}{2}(\mathrm{F})_2 + \frac{1}{3}(\mathrm{G})_3 + (\mathrm{H})_1]\, e^{2\varepsilon i} \\ -i[\frac{1}{3}(\mathrm{F})_3 + \frac{1}{4}(\mathrm{G})_4 + \frac{1}{2}(\mathrm{H})_2]\, e^{3\varepsilon i} \\ -\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}.
\end{aligned}
$$

Posant maintenant

$$P_0' = G_1'' + \mathrm{G}_1',$$

$$P_1' = \mathrm{F}_1' + \tfrac{1}{4}\mathrm{G}_2' + F_1'' + \tfrac{1}{2}G_1'', \qquad P_1'' = -\mathrm{F}_1'' - \tfrac{1}{4}\mathrm{G}_2'' + F_1' + \tfrac{1}{2}G_2',$$

$$P_2' = \tfrac{1}{4}\mathrm{F}_2' + \tfrac{1}{9}\mathrm{G}_3' + \mathrm{H}_1' + \tfrac{1}{2}F_1'' + \tfrac{1}{3}G_3'' + H_1'', \qquad P_2'' = -\tfrac{1}{4}\mathrm{F}_2'' - \tfrac{1}{9}\mathrm{G}_3'' - \mathrm{H}_1'' + \tfrac{1}{2}F_2' + \tfrac{1}{3}G_3' + H_1',$$

$$P_3' = \tfrac{1}{9}\mathrm{F}_3' + \tfrac{1}{16}\mathrm{G}_4' + \tfrac{1}{4}\mathrm{H}_2' + \tfrac{1}{3}F_3'' + \tfrac{1}{4}G_4'' + \tfrac{1}{2}H_2'', \qquad P_3'' = -\tfrac{1}{9}\mathrm{F}_3'' - \tfrac{1}{16}\mathrm{G}_4'' - \tfrac{1}{4}\mathrm{H}_2'' + \tfrac{1}{3}F_3' + \tfrac{1}{4}G_4' + \tfrac{1}{2}H_2',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{P}_0' = \mathrm{G}_1'' + \tfrac{1}{2}F_0',$$

$$\mathrm{P}_1' = \mathrm{F}_1'' + \tfrac{1}{2}\mathrm{G}_2'' + H_0', \qquad \mathrm{P}_1'' = \mathrm{F}_1' + \tfrac{1}{2}\mathrm{G}_2' + H_0'',$$

$$\mathrm{P}_2' = \tfrac{1}{2}\mathrm{F}_2'' + \tfrac{1}{3}\mathrm{G}_3'' + \mathrm{H}_1'', \qquad \mathrm{P}_2'' = \tfrac{1}{2}\mathrm{F}_2' + \tfrac{1}{3}\mathrm{G}_3' + \mathrm{H}_1',$$

$$\mathrm{P}_3' = \tfrac{1}{3}\mathrm{F}_3'' + \tfrac{1}{4}\mathrm{G}_4'' + \tfrac{1}{2}\mathrm{H}_2'', \qquad \mathrm{P}_3'' = \tfrac{1}{3}\mathrm{F}_3' + \tfrac{1}{4}\mathrm{G}_4' + \tfrac{1}{2}\mathrm{H}_2',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

il en résulte

$$
\begin{aligned}
\overline{\delta W} = 2P_0' + P_1 e^{\varepsilon i} + P_2 e^{2\varepsilon i} + P_3 e^{3\varepsilon i} + \cdots \\
+ \varepsilon(2\mathrm{P}_0' + \mathrm{P}_1 e^{\varepsilon i} + \mathrm{P}_2 e^{2\varepsilon i} + \mathrm{P}_3 e^{3\varepsilon i} + \cdots) \\
+ \tfrac{1}{2}\varepsilon^2(\mathrm{F}_0' + \mathrm{H}_0 e^{\varepsilon i}).
\end{aligned}
$$

Soit encore

$$
\begin{aligned}
\overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}}\,\frac{an\delta z}{r} + \nu^2 = 2J_0' + J_1 e^{\varepsilon i} + J_2 e^{2\varepsilon i} + \cdots \\
+ \varepsilon(2\mathrm{J}_0' + \mathrm{J}_1 e^{\varepsilon i} + \mathrm{J}_2 e^{2\varepsilon i} + \cdots) \\
+ \varepsilon^2(2\mathrm{j}_0' + \mathrm{j}_1 e^{\varepsilon i} + \mathrm{j}_2 e^{2\varepsilon i} + \cdots);
\end{aligned}
$$

de là résulte, d'après la première des équations (0),

$$\begin{aligned}\frac{d\delta z}{dt} = 2M'_0 + M_1 e^{\epsilon i} + M_2 e^{2\epsilon i} + \cdots \\ + \epsilon(2\mathrm{M}'_0 + \mathrm{M}_1 e^{\epsilon i} + \mathrm{M}_2 e^{2\epsilon i} + \cdots) \\ + \epsilon^2(2\mathbf{m}'_0 + \mathbf{m}_1 e^{\epsilon i} + \mathbf{m}_2 e^{2\epsilon i} + \cdots),\end{aligned}$$

où l'on a fait

$$\begin{array}{lll} M'_0 = P'_0 + J'_0, & \mathrm{M}'_0 = \mathrm{P}'_0 + \mathrm{J}'_0, & 2\mathbf{m}'_0 = \tfrac{1}{2}\mathrm{F}'_0 + 2\mathbf{j}'_0, \\ M_1 = P_1 + J_1, & \mathrm{M}_1 = \mathrm{P}_1 + \mathrm{J}_1, & 2\mathbf{m}_1 = \mathrm{H}_0 + \mathbf{j}_1, \\ \dots\dots, & \dots\dots, & \dots\dots, \\ M_j = P_j + J_j, & \mathrm{M}_j = \mathrm{P}_j + \mathrm{J}_j, & \mathbf{m}_j = \mathbf{j}_j. \end{array}$$

En différentiant la valeur de δW par rapport à η, on obtient, après avoir changé dans le résultat τ en t,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\partial \delta W}}{\partial \eta} = -2Q'_0 - (Q)_1 e^{\epsilon i} - (Q)_2 e^{2\epsilon i} - \cdots \\ - \epsilon\,[2\mathrm{Q}'_0 + (\mathrm{Q})_1 e^{\epsilon i} + (\mathrm{Q})_2 e^{2\epsilon i} + \cdots] \\ + \tfrac{1}{2} i\epsilon^2 (\mathrm{H})_0 e^{\epsilon i},\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{array}{ll} Q'_0 = G'_1 - \mathrm{G}''_1, & \\ Q'_1 = \tfrac{1}{2}G'_2 - \tfrac{1}{4}\mathrm{G}''_2, & Q''_1 = \tfrac{1}{2}G''_2 + \tfrac{1}{4}\mathrm{G}'_2, \\ Q'_2 = \tfrac{1}{3}G'_3 - \tfrac{1}{9}\mathrm{G}''_3 - H'_1 + \mathrm{H}''_1, & Q''_2 = \tfrac{1}{3}G''_3 + \tfrac{1}{9}\mathrm{G}'_3 - H''_1 - \mathrm{H}'_1, \\ Q'_3 = \tfrac{1}{4}G'_4 - \tfrac{1}{16}\mathrm{G}''_4 - \tfrac{1}{2}H'_2 + \tfrac{1}{4}\mathrm{H}''_2, & Q'_3 = \tfrac{1}{4}G''_4 + \tfrac{1}{16}\mathrm{G}'_4 - \tfrac{1}{2}H''_2 - \tfrac{1}{4}\mathrm{H}'_2, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \mathrm{Q}'_0 = \mathrm{G}'_1, & \\ \mathrm{Q}'_1 = \tfrac{1}{2}\mathrm{G}'_2 + H''_0, & \mathrm{Q}''_1 = \tfrac{1}{2}\mathrm{G}''_2 - H'_0, \\ \mathrm{Q}'_2 = \tfrac{1}{3}\mathrm{G}'_3 - \mathrm{H}'_1, & \mathrm{Q}''_2 = \tfrac{1}{3}\mathrm{G}''_3 - \mathrm{H}''_1, \\ \mathrm{Q}'_3 = \tfrac{1}{4}\mathrm{G}'_4 - \tfrac{1}{2}\mathrm{H}'_2, & \mathrm{Q}''_3 = \tfrac{1}{4}\mathrm{G}''_4 - \tfrac{1}{2}\mathrm{H}''_2, \\ \dots\dots & \dots\dots \end{array}$$

Soit de plus

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial \eta^2}\frac{an\delta z}{r} - \frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta}\frac{an\delta z}{r}\frac{ae\sin\epsilon}{r} = -2K'_0 + (K)_1 e^{\epsilon i} + (K)_2 e^{2\epsilon i} + \cdots \\ - \epsilon\,[-2\mathrm{K}'_0 - (\mathrm{K})_1 e^{\epsilon i} - (\mathrm{K})_2 e^{2\epsilon i} - \cdots] \\ + \epsilon^2\,[(\mathbf{k})_1 e^{\epsilon i} + (\mathbf{k})_2 e^{2\epsilon i} + \cdots],\end{aligned}$$

où j'ai supprimé le terme non périodique proportionnel à ϵ^2, à cause de la sixième proposition.

De ces deux relations, et à cause de la seconde des équations (0), on déduit

$$
\begin{aligned}
-\frac{2d\delta\nu}{d\epsilon} = & -2N'_0-(N)_1 e^{\epsilon i}-(N)_2 e^{2\epsilon i}-\cdots \\
& +\epsilon[-2\mathrm{N}'_0-(\mathrm{N})_1 e^{\epsilon i}-(\mathrm{N})_2 e^{2\epsilon i}-\cdots] \\
& +\epsilon^2[-(\mathbf{n})_1 e^{\epsilon i}-(\mathbf{n})_2 e^{2\epsilon i}-\cdots],
\end{aligned}
$$

où l'on a fait

$$
\begin{array}{lll}
N'_0 = Q'_0 - K'_0, & \mathrm{N}'_0 = \mathrm{Q}'_0 - \mathrm{K}'_0, & (\mathbf{n})_1 = -\tfrac{1}{2} i(\mathrm{H})_0 - (\mathbf{k})_1, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
(N)_j = (Q)_j - (K)_j, & (\mathrm{N})_j = (\mathrm{Q})_j - (\mathrm{K}), & (\mathbf{n})_j = -(\mathbf{k})_j .
\end{array}
$$

L'intégration donne

$$
\begin{aligned}
2\delta\nu = & S_1 e^{\epsilon i} + S_2 e^{2\epsilon i} + \cdots \\
& + \epsilon(2\mathrm{s}'_0 + \mathrm{s}_1 e^{\epsilon i} + \mathrm{s}_2 e^{2\epsilon i} + \cdots) \\
& + \epsilon^2(2\mathbf{s}'_0 + \mathbf{s}_1 e^{\epsilon i} + \mathbf{s}_2 e^{2\epsilon i} + \cdots),
\end{aligned}
$$

en posant

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{s}'_0 = N'_0, & \mathbf{s}'_0 = \tfrac{1}{2}\mathrm{N}'_0, \\
\mathrm{s}_j = -\dfrac{1}{j} i(\mathrm{N})_j + \dfrac{2}{j^2}(\mathbf{n})_j, & \mathbf{s}_j = -\dfrac{1}{j} i(\mathbf{n})_j, \\
S_j = -\dfrac{1}{j} i(N)_j + \dfrac{1}{j^2}(\mathrm{N})_j + \dfrac{2}{j^3} i(\mathbf{n})_j . &
\end{array}
$$

Il restera à éliminer ϵ hors des termes qui ne renferment pas d'exponentielles.

54.

Avant d'aller plus loin, il faut établir la relation qui existe entre les coefficients, en vertu de la proposition 5. On a vu qu'on peut écrire δW sous la forme

$$\Xi + \Upsilon(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e) + \Psi\sin\eta .$$

De plus, dans Ξ, le coefficient de nt est à celui de $nt\cos\epsilon$ comme $\frac{1}{2}e$ est à 1, et le même rapport existe entre le cofficient de n^2t^2 et celui de $n^2t^2\cos\epsilon$. En développant δW pour le mettre sous la forme ci-dessus, on obtient

$$\Xi = \varepsilon\Big[F'_0 - eH'_0 + 2(\text{F}''_1 - \tfrac{1}{2}e\text{G}'_1 - \tfrac{1}{2}e\text{H}''_1)\cos\varepsilon + 2(\tfrac{1}{2}\text{F}''_2 - \tfrac{1}{4}e\text{G}''_2 - \tfrac{1}{4}e\text{H}''_2)\cos 2\varepsilon + \cdots + 2\left(\frac{1}{j}\text{F}''_j - \frac{e}{2j}\text{G}''_j - \frac{e}{2j}\text{H}''_j\right)\cos j\varepsilon + \cdots\Big] + \varepsilon^2(\tfrac{1}{2}\text{F}'_0 - \tfrac{1}{2}e\text{H}'_0),$$

où il faut remplacer ε par nt. De plus, en ayant égard seulement aux termes indépendants de $\cos\varepsilon$ et de $\sin\varepsilon$, et à ceux qui, dépendant de $\cos\varepsilon$, renferment en facteur ε et ε^2, on a

$$\frac{\partial W}{\partial\eta}\frac{an\delta z}{r} + \nu^2 = 2(\text{J}'_0 + e\text{j}''_1)nt + 2(\text{J}'_1 + e\text{j}''_2)nt\cos\varepsilon + 2(\text{j}'_0 n^2t^2 + \text{j}'_1 n^2t^2\cos\varepsilon);$$

ajoutant maintenant la valeur de ∂W, représentée ici par Ξ, à cette dernière expression, il vient

$$\frac{d\delta z}{dt} = nt[F'_0 - eH'_0 + 2(\text{J}'_0 + e\text{j}''_1) + 2(\text{J}'_1 + e\text{J}''_1 + \text{F}''_1 - \tfrac{1}{2}e\text{G}''_1 - \tfrac{1}{2}e\text{H}''_1)\cos\varepsilon + \cdots] + n^2t^2(\tfrac{1}{2}\text{F}'_0 - \tfrac{1}{2}e\text{H}'_0 + 2\text{j}'_0 + 2\text{j}'_1\cos\varepsilon + \cdots).$$

Appliquant le théorème, on a

$$F'_0 - eH'_0 + 2\text{J}'_0 + 2e\text{j}''_0 = e[\text{F}''_1 + \text{J}'_1 + e(\text{J}''_2 - \tfrac{1}{2}\text{G}''_1 - \tfrac{1}{2}\text{H}''_1)],$$

$$\tfrac{1}{2}\text{F}'_0 - \tfrac{1}{2}e\text{H}'_0 + 2\text{j}'_0 = e\text{j}'_1,$$

qu'on peut écrire,

$$(82)\quad \begin{cases} F'_0 - eH'_0 + 2\text{J}'_0 + 2e\text{j}''_1 = e\text{F}''_1 - \tfrac{1}{2}e^2\text{G}''_1 - \tfrac{1}{2}e^2\text{H}''_1 + e^2\text{J}''_2 + e\text{J}'_1, \\ \tfrac{1}{4}\text{F}'_0 + \text{j}'_0 = \tfrac{1}{4}e\text{H}'_0 + \tfrac{1}{2}e\text{j}'_1. \end{cases}$$

On a trouvé, art. précédent,

$$\text{M}'_0 = \text{P}'_0 + \text{J}'_0,$$
$$\text{m}'_0 = \text{j}'_0 + \tfrac{1}{4}\text{F}'_0;$$

alors l'expression

$$\text{P}'_0 = \tfrac{1}{2}F'_0 + \text{G}''_1$$

donne

$$\text{M}'_0 = \tfrac{1}{2}F'_0 + \text{G}''_1 + \text{J}'_0.$$

Eliminant maintenant F'_0 et F'_0, à l'aide des équations (82), il vient

$$\text{M}'_0 = \text{G}''_1 + \tfrac{1}{2}eH'_0 + \tfrac{1}{2}e\text{F}''_1 - \tfrac{1}{4}e^2\text{G}''_1 - \tfrac{1}{4}e^2\text{H}''_1 + \tfrac{1}{2}e\text{J}'_1 - e\text{j}''_1 + \tfrac{1}{2}e^2\text{j}''_2,$$

$$\text{m}'_0 = \tfrac{1}{4}e\text{H}'_0 + \tfrac{1}{2}e\text{j}''_1;$$

ces équations permettent de calculer la valeur numérique des coefficients M'_0, m'_0, avec célérité,

55.

Je vais maintenant exécuter les développements nécessaires pour appliquer l'équation de condition (79) aux coefficients qu'on vient de rencontrer. Soit

$$\frac{d\delta\frac{h_0}{h}}{d\epsilon} = L'_0 + (L)_1 e^{\epsilon i} + (L)_2 e^{2\epsilon i} + \cdots$$
$$+ \epsilon\left[\text{L}'_0 + (\text{L})_1 e^{\epsilon i} + (\text{L})_2 e^{2\epsilon i} + \cdots\right];$$

il vient, en intégrant,

$$\delta\frac{h_0}{h} = D_1 e^{\epsilon i} + D_2 e^{2\epsilon i} + \cdots$$
$$+ \epsilon(D'_0 + \text{D}_1 e^{\epsilon i} + \text{D}_2 e^{2\epsilon i} + \cdots)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\epsilon^2 \text{D}'_0,$$

où l'on a fait

$$D'_0 = L'_0, \qquad \text{D}'_0 = \text{L}'_0,$$
$$D_j = \frac{1}{j^2}(\text{L})_j - \frac{1}{j}i(L)_j, \qquad \text{D}_j = -\frac{1}{j}i(\text{L})_j.$$

Soit encore

$$2\nu = Z_1 e^{\epsilon i} + Z_2 e^{2\epsilon i} + \cdots + \epsilon(\text{z}'_0 + \text{z}_1 e^{\epsilon i}),$$

$$2\nu\delta\frac{h}{h_0} = C e^{\varphi i} + \epsilon \text{c} e^{\varphi i}.$$

L'équation (79), appliquée au coefficient de ϵ, donne

$$\text{M} + \text{S} = \text{D} + 3\text{B} + \text{C} + \text{Z}\frac{\Delta n}{n},$$

d'où l'on doit exclure la valeur $j = 0$. De plus, en faisant successivement $j = 0$, $j = 1$, on trouve

$$\text{M}'_0 + \text{S}'_0 = \text{D}'_0 + 3\text{B}'_0 + \text{C}'_0 + \text{z}'_0\frac{\Delta n}{n},$$

$$\text{M}'_1 + \text{S}'_1 = \text{D}'_1 + 3\text{B}'_1 + \text{C}'_1 + \text{z}'_1\frac{\Delta n}{n},$$

$$\text{M}''_1 + \text{S}''_1 = \text{D}''_1 + 3\text{B}''_1 + \text{C}''_1 + \text{z}''_1\frac{\Delta n}{n},$$

et pour les valeurs supérieures de j, puisque le plus fort indice de z est 1,

$$\text{M} + \text{S} = \text{D} + 3\text{B} + \text{C}.$$

Appliquant l'équation de condition aux termes en ε^2, il vient

$$2\mathrm{m}'_0+\mathrm{N}'_0=\tfrac{1}{2}\mathrm{D}'_0+3\mathrm{b}'_0+\mathrm{c}'_0,$$

$$\mathrm{m}'_1+\mathrm{s}'_1=3\mathrm{b}'_1+\mathrm{c}'_1, \qquad \mathrm{m}''_1+\mathrm{s}''_1=3\mathrm{b}''_1+\mathrm{c}''_1,$$

$$\mathrm{m}'_2+\mathrm{s}'_2=3\mathrm{b}'_2, \qquad \mathrm{m}''_2+\mathrm{s}''_2=3\mathrm{b}''_2,$$

$$\mathrm{m}'_3+\mathrm{s}'_3=0, \qquad \mathrm{m}''_3+\mathrm{s}''_3=0,$$

. . . .

Je m'occuperai plus tard de l'équation de condition entre les termes constants.

56.

Ayant ainsi indiqué le moyen de vérifier les calculs numériques, il faut procéder à une intégration pour avoir $n\delta z$.

En multipliant la valeur de $\frac{d\delta z}{dt}$ par $\frac{r}{an}\,d\varepsilon$ et intégrant, il vient

$$\begin{aligned} n\delta z = &-(R)_1 e^{\varepsilon i}-\cdots-(R)_j e^{j\varepsilon i}-\cdots\\ &+\varepsilon[2\mathrm{R}'_0-(\mathrm{R})_1 e^{\varepsilon i}-\cdots-(\mathrm{R})_j e^{j\varepsilon i}-\cdots]\\ &+\varepsilon^2[2\mathrm{r}'_0-(\mathrm{r})_1 e^{\varepsilon i}-\cdots-(\mathrm{r})_j e^{j\varepsilon i}-\cdots], \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} (R)_1 = &-i(M_1-eM'_0-\tfrac{1}{2}eM_2)+\mathrm{M}_1-e\mathrm{M}'_0-\tfrac{1}{2}e\mathrm{M}_2\\ &+2i(\mathrm{m}_1-e\mathrm{m}'_0-\tfrac{1}{2}e\mathrm{m}_2), \end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned} (R)_j = &-\frac{1}{j}i(M_j-\tfrac{1}{2}eM_{j-1}-\tfrac{1}{2}eM_{j+1})+\frac{1}{j^2}(\mathrm{M}_j-\tfrac{1}{2}e\mathrm{M}_{j-1}-\tfrac{1}{2}e\mathrm{M}_{j+1})\\ &+\frac{2i}{j^2}(\mathrm{m}_j-\tfrac{1}{2}e\mathrm{m}_{j-1}-\tfrac{1}{2}e\mathrm{m}_{j+1}), \end{aligned}$$

$$\mathrm{R}'_0=M'_0-\tfrac{1}{2}eM'_1,$$

$$(\mathrm{R})_1=-i(\mathrm{M}_1-e\mathrm{M}'_0-\tfrac{1}{2}e\mathrm{M}_2)+2(\mathrm{m}_1-e\mathrm{m}'_0-\tfrac{1}{2}e\mathrm{m}_2),$$

. . . .

$$(\mathrm{R})_j=-\frac{1}{j}i(\mathrm{M}_j-\tfrac{1}{2}e\mathrm{M}_{j-1}-\tfrac{1}{2}e\mathrm{M}_{j+1})+\frac{2}{j^2}(\mathrm{m}_j-\tfrac{1}{2}e\mathrm{m}_{j-1}-\tfrac{1}{2}e\mathrm{m}_{j+1}),$$

$$\mathrm{r}'_0=\mathrm{M}'_0-\tfrac{1}{2}e\mathrm{M}'_1,$$

$$(\mathrm{r})_1=-i(\mathrm{M}_1-e\mathrm{m}'_0-\tfrac{1}{2}e\mathrm{m}_2),$$

. . . .

$$(\mathrm{r})_j=-\frac{1}{j}i(\mathrm{m}_j-\tfrac{1}{2}e\mathrm{m}_{j-1}-\tfrac{1}{2}e\mathrm{m}_{j+1}).$$

$2\mathrm{r}'_0$ est le coefficient de la variation séculaire de la longitude moyenne, puisque $2\mathrm{r}'_0\,\varepsilon^2$ est le seul terme de $n\delta z$ qui puisse donner un terme

proportionnel à t^2. Substituant dans ce coefficient les valeurs de M'_0 et M'_1, il vient

$$\mathrm{r}'_0 = \mathrm{G}''_1 - \tfrac{1}{4}e^2\mathrm{G}''_1 - \tfrac{1}{4}e\,\mathrm{G}''_2 - \tfrac{1}{4}e^2\mathrm{H}''_1 - e\,\mathrm{j}''_1 + \tfrac{1}{2}e^2\mathrm{j}''_2 .$$

Ce coefficient est ainsi ramené à ceux de $\frac{d\delta W}{d\varepsilon}$ et de $\frac{\overline{\partial W}}{\partial\eta}\frac{an\delta z}{r} + \nu^2$. Le terme principal est dans tous les cas G''_1; il est donc égal à la moitié du coefficient de $\varepsilon \sin(\eta - \varepsilon)$ dans l'expression de $\frac{d\delta W}{d\varepsilon}$.

57.

Pour le calcul des perturbations en latitude dépendant de $j' = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos i}\frac{d\delta R}{d\tau} = {} & T'_0 + (U)_1 e^{(-\eta+\varepsilon)\tau} + (V)_0 e^{\eta\tau} \\
& + (T)_1 e^{\varepsilon\tau} + (U)_2 e^{(-\eta+2\varepsilon)\tau} + (V)_1 e^{(\eta+\varepsilon)\tau} \\
& + (T)_2 e^{\varepsilon\tau} + (U)_3 e^{(-\eta+3\varepsilon)\tau} + (V)_2 e^{(\eta+2\varepsilon)\tau} \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + \varepsilon \left\{ \begin{array}{l}
\mathrm{T}'_0 + (\mathrm{u})_1 e^{(-\eta+\varepsilon)\tau} + (\mathrm{v})_0 e^{\eta\tau} \\
+ (\mathrm{t})_1 e^{\varepsilon\tau} + (\mathrm{u})_2 e^{(-\eta+2\varepsilon)\tau} + (\mathrm{v})_1 e^{(\eta+\varepsilon)\tau} \\
+ (\mathrm{t})_2 e^{2\varepsilon\tau} + (\mathrm{u})_3 e^{(-\eta+3\varepsilon)\tau} + (\mathrm{v})_2 e^{(\eta+2\varepsilon)\tau} \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

En intégrant, il vient, après avoir changé τ en t,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos i}\overline{\delta_1 R} = {} & 2(U''_1 + \mathrm{u}'_1) + \Bigl\{ -i\bigl[\tfrac{1}{2}(U)_2 + (T)_1\bigr] + \tfrac{1}{4}(\mathrm{u})_2 + (\mathrm{t})_1 \Bigr\} e^{\varepsilon t} \\
& + \Bigl\{ -i\bigl[\tfrac{1}{3}(U)_3 + \tfrac{1}{2}(T)_2 + (V)_1\bigr] + \tfrac{1}{9}(\mathrm{u})_3 + \tfrac{1}{4}(\mathrm{t})_2 + (\mathrm{v})_1 \Bigr\} e^{2\varepsilon t} \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + \Bigl\{ -i\Bigl[\frac{1}{j+1}(U)_{j+1} + \frac{1}{j}(T)_j + \frac{1}{j-1}(V)_{j-1} \Bigr] \\
& \qquad + \frac{1}{(j+1)^2}(\mathrm{u})_{j+1} + \frac{1}{j^2}(\mathrm{t})_j + \frac{1}{(j-1)^2}(\mathrm{v})_{j-1} \Bigr\} e^{j\varepsilon t} \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + \varepsilon(T'_0 + 2\mathrm{u}''_1) + \varepsilon \left\{ \begin{array}{l}
\bigl[-\tfrac{1}{2}i(\mathrm{u})_2 - i(\mathrm{t})_1 + (\mathrm{v})_0\bigr] e^{\varepsilon t} \\
+ \bigl[-\tfrac{1}{3}i(\mathrm{u})_3 - \tfrac{1}{2}i(\mathrm{t})_2 + (\mathrm{v})_1\bigr] e^{2\varepsilon t} \\
+ \dots\dots\dots\dots \\
+ \Bigl[-\frac{1}{j+1}i(\mathrm{u})_{j+1} - \frac{1}{j}i(\mathrm{t})_j + \frac{1}{j-1}(\mathrm{v})_{j-1}\Bigr] e^{j\varepsilon t} \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array} \right\} \\
& + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\bigl[\mathrm{T}'_0 + (\mathrm{v})_0 e^{\varepsilon t}\bigr].
\end{aligned}$$

Si l'on pose, de plus,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos i}\frac{\partial R}{\partial n}\frac{an\delta z}{r} &= 2Y'_0 + Y_1 e^{\epsilon i} + \cdots \\ &+ \epsilon(2\text{Y}'_0 + \text{Y}_1 e^{\epsilon i} + \cdots) \\ &+ \epsilon^2(2\mathbf{y}'_0 + \mathbf{y}_1 e^{\epsilon i} + \cdots),\end{aligned}$$

on obtient par addition

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos i}\delta_1 u &= 2W'_0 + W_1 e^{\epsilon i} + \cdots + W_j e^{j\epsilon i} + \cdots \\ &+ \epsilon(2\text{w}'_0 + \text{w}_1 e^{\epsilon i} + \cdots + \text{w}_j e^{j\epsilon i} + \cdots) \\ &+ \epsilon^2(2\mathbf{w}'_0 + \mathbf{w}_1 e^{\epsilon i} + \cdots + \mathbf{w}_j e^{j\epsilon i} + \cdots),\end{aligned}$$

après avoir posé

$$W'_0 = U'_1 + \text{U}'_1 + Y'_0,$$

$$W_1 = -i[\tfrac{1}{2}(U)_2 + (T)_1] + \tfrac{1}{4}(\text{U})_2 + (\text{T})_1 + Y_1,$$

. . . .

$$W_j = -i\left[\frac{1}{j+1}(U)_{j+1} + \frac{1}{j}(T)_j + \frac{1}{j-1}(V)_{j-1}\right] + \frac{1}{(j+1)^2}(\text{U})_{j+1} + \frac{1}{j^2}(\text{T})_j + Y_j,$$

$$\text{w}'_0 = \tfrac{1}{2}T'_0 + \text{U}'_1 + \text{Y}'_0,$$

$$\text{w}_1 = -\tfrac{1}{2}i(\text{U})_2 - i(\text{T})_1 + (V)_0 + \text{Y}_1,$$

. . . .

$$\text{w}_j = -\frac{1}{j+1}i(\text{U})_{j+1} - \frac{1}{j}i(\text{T})_j + \frac{1}{j-1}(\text{V})_{j-1} + \text{Y}_j,$$

$$\mathbf{w}'_0 = \tfrac{1}{2}\text{T}'_0 + \mathbf{y}'_0,$$

$$\mathbf{w}_1 = \tfrac{1}{2}(\text{V})_0 + \mathbf{y}_1,$$

. . . .

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{y}_j.$$

58.

Je vais maintenant éliminer ϵ hors des exponentielles dans les expressions de $\frac{d\delta z}{dt}$, $n\delta z$, $\delta\nu$ et $\delta_1 u$, à l'aide des relations

$$\epsilon = nt - \tfrac{1}{2}ie(e^{\epsilon i} - e^{-\epsilon i}),$$

$$\epsilon^2 = n^2t^2 + \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}e^2(e^{2\epsilon i} + e^{-2\epsilon i}) - ient(e^{\epsilon i} - e^{-\epsilon i}).$$

Considérant d'abord le cas où j' n'est pas nul, on a

$$\frac{d\delta z}{dt} = [M_j - \tfrac{1}{2}ie(\text{M}_{j-1} - \text{M}_{j+1})]e^{\varphi i} + nt\text{M}_j e^{\varphi i},$$

$$n\delta z = -\{(R)_j - \tfrac{1}{2}ie[(\text{R})_{j-1} - (\text{R})_{j+1}]\}e^{\varphi i} - nt(\text{R})_j e^{\varphi i},$$

$$2\delta v = [S_j - \tfrac{1}{2} ie(\mathrm{s}_{j-1} - \mathrm{s}_{j+1})]\,\mathrm{e}^{\varphi i} + nt\,\mathrm{s}_j \mathrm{e}^{\varphi i},$$

$$\frac{1}{\cos i}\delta_1 u = [W_j - \tfrac{1}{2} ie(\mathrm{w}_{j-1} - \mathrm{w}_{j+1})]\,\mathrm{e}^{\varphi i} + nt\,\mathrm{w}_j \mathrm{e}^{\varphi i}.$$

Pour le cas où $j' = 0$, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta z}{dt} = {} & 2M_0' + eM_1'' + e^2\mathbf{m}_0' - \tfrac{1}{2}e^2\mathbf{m}_2' \\
& + [M_1 - ie\mathrm{M}_0' + i.\tfrac{1}{2}e\mathrm{M}_2 - \tfrac{1}{4}e^2(\mathbf{m})_1 + \tfrac{1}{2}e^2\mathbf{m}_1 - \tfrac{1}{4}e^2\mathbf{m}_3]\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} \\
& + (M_2 - i.\tfrac{1}{2}e\mathrm{M}_1 + i.\tfrac{1}{2}e\mathrm{M}_3 - \tfrac{1}{2}e^2\mathbf{m}_0' + \tfrac{1}{2}e^2\mathbf{m}_2 - \tfrac{1}{4}e^2\mathbf{m}_4)\,\mathrm{e}^{2\varepsilon i} \\
& + (M_3 - i.\tfrac{1}{2}e\mathrm{M}_2 + i.\tfrac{1}{2}e\mathrm{M}_4 - \tfrac{1}{4}e^2\mathbf{m}_1 + \tfrac{1}{2}e^2\mathbf{m}_3 - \tfrac{1}{4}e^2\mathbf{m}_5)\,\mathrm{e}^{3\varepsilon i} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + 2(\mathrm{M}_0' + e\mathbf{m}_1'')nt \\
& + (-2ie\mathbf{m}_0' + ie\mathbf{m}_2 + \mathrm{M}_1)nt\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} \\
& + (-ie\mathbf{m}_1 + ie\mathbf{m}_3 + \mathrm{M}_2)nt\,\mathrm{e}^{2\varepsilon i} \\
& + (-ie\mathbf{m}_2 + ie\mathbf{m}_4 + \mathrm{M}_3)nt\,\mathrm{e}^{3\varepsilon i} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + 2\mathbf{m}_0' n^2 t^2 \\
& + \mathbf{m}_1 n^2 t^2 \mathrm{e}^{\varepsilon i} \\
& + \mathbf{m}_2 n^2 t^2 \mathrm{e}^{2\varepsilon i} \\
& + \mathbf{m}_3 n^2 t^2 \mathrm{e}^{3\varepsilon i} \\
& + \ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n\delta z = {} & -[(R)_1 + ie\mathrm{R}_0' + \tfrac{1}{2}ie(\mathrm{R})_2 - \tfrac{1}{4}e^2\mathbf{r}_1 + \tfrac{1}{2}e^2(\mathbf{r})_1 - \tfrac{1}{4}e^2(\mathbf{r})_3]\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} \\
& - [(R)_2 - \tfrac{1}{2}ie(\mathrm{R})_1 + \tfrac{1}{2}ie(\mathrm{R})_3 + \tfrac{1}{2}e^2\mathbf{r}_0' + \tfrac{1}{2}e^2(\mathbf{r})_2 - \tfrac{1}{4}e^2(\mathbf{r})_4]\,\mathrm{e}^{2\varepsilon i} \\
& - [(R)_3 - \tfrac{1}{2}ie(\mathrm{R})_2 + \tfrac{1}{2}ie(\mathrm{R})_4 - \tfrac{1}{4}e^2(\mathbf{r})_1 + \tfrac{1}{2}e^2(\mathbf{r})_3 - \tfrac{1}{4}e^2(\mathbf{r})_5]\,\mathrm{e}^{3\varepsilon i} \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + 2(\mathrm{R}_0' + e\mathbf{r}_1'')nt \\
& - [2ie\mathbf{r}_0' + ie(\mathbf{r})_2 + (\mathrm{R})_1]nt\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} \\
& - [-ie(\mathbf{r})_1 + ie(\mathbf{r})_3 + (\mathrm{R})_2]nt\,\mathrm{e}^{2\varepsilon i} \\
& - [-ie(\mathbf{r})_2 + ie(\mathbf{r})_4 + (\mathrm{R})_3]nt\,\mathrm{e}^{3\varepsilon i} \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + 2\mathbf{r}_0' n^2 t^2 \\
& - (\mathbf{r})_1 n^2 t^2 \mathrm{e}^{\varepsilon i} \\
& - (\mathbf{r})_2 n^2 t^2 \mathrm{e}^{2\varepsilon i} \\
& - (\mathbf{r})_3 n^2 t^2 \mathrm{e}^{3\varepsilon i} \\
& - \ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2\delta\nu = {} & [S_1 - ie\mathrm{s}'_0 + \tfrac{1}{2}ie\mathrm{s}_2 - \tfrac{1}{4}e^2(\mathbf{s})_1 + \tfrac{1}{2}e^2\mathbf{s}_1 - \tfrac{1}{4}e^2\mathbf{s}_3]\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} \\
& + (S_2 - \tfrac{1}{2}ie\mathrm{s}_1 + \tfrac{1}{2}ie\mathrm{s}_3 - \tfrac{1}{2}e^2\mathbf{s}'_0 + \tfrac{1}{2}e^2\mathbf{s}_2 - \tfrac{1}{4}e^2\mathbf{s}_4)\,\mathrm{e}^{2\varepsilon i} \\
& + (S_3 - \tfrac{1}{2}ie\mathrm{s}_2 + \tfrac{1}{2}ie\mathrm{s}_4 - \tfrac{1}{4}e^2\mathbf{s}_1 + \tfrac{1}{2}e^2\mathbf{s}_3 - \tfrac{1}{4}e^2\mathbf{s}_5)\,\mathrm{e}^{3\varepsilon i} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + 2(\mathrm{s}'_0 + e\mathbf{s}''_1)\,nt \\
& + (-2ie\mathbf{s}'_0 + ie\mathbf{s}_2 + \mathrm{s}_1)\,nt\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} \\
& + (-ie\mathbf{s}_1 + ie\mathbf{s}_3 + \mathrm{s}_2)\,nt\,\mathrm{e}^{2\varepsilon i} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + 2\mathbf{s}'_0\,n^2t^2 \\
& + \mathbf{s}_1\,n^2t^2\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} \\
& + \mathbf{s}_2\,n^2t^2\,\mathrm{e}^{2\varepsilon i} \\
& + \ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta_1 u}{\cos i} = {} & 2W'_0 + e\mathrm{w}''_1 + e\mathbf{w}'_0 - \tfrac{1}{2}e^2\mathbf{w}'_2 \\
& + [W_1 - ie\mathrm{w}'_0 + \tfrac{1}{2}ie\mathrm{w}_2 - \tfrac{1}{4}e^2(\mathbf{w})_1 + \tfrac{1}{2}e^2\mathbf{w}_1 - \tfrac{1}{4}e^2\mathbf{w}_3]\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + 2(\mathrm{w}'_0 + e\mathbf{w}''_1)\,nt \\
& + (-2ie\mathbf{w}'_0 + ie\mathbf{w}_2 + \mathrm{w}_1)\,nt\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + 2\mathbf{w}'_0\,n^2t^2 \\
& + \mathbf{w}_1\,n^2t^2\,\mathrm{e}^{\varepsilon i} \\
& + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Cette dernière expression se tire de $\dfrac{d\delta z}{dt}$ en y remplaçant la lettre M sous ses trois formes par la lettre W sous les formes correspondantes.

J'ai négligé ici les termes constants de $2\delta\nu$ et $n\delta z$, parce que les équations qui servent à déterminer les constantes C et c le supposent essentiellement.

Pour le plus grand nombre des arguments, il suffit de remplacer ε par nt; dans chaque cas particulier, on verra quels sont les termes des développements précédents que l'on peut négliger.

59

La seconde partie de la perturbation en latitude est insignifiante. Je ne considérerai que les termes en t^2, parce qu'ils peuvent croître plus vite que les autres dans le cours du temps; dès lors, dans l'expression (81), on peut négliger Γ qui ne contient pas t^2; il vient ainsi

$$\delta_2 u = -\left(\frac{u^2}{2\cos^2 i}\frac{\sin w}{f^2} + \frac{uu_1}{2\cos^2 i}\frac{\cos w}{f}\right)\sin i\cos(\varpi-\theta)$$
$$-\left(\frac{u^2}{2\cos^2 i}\frac{e+\cos w}{f^2} - \frac{uu_1}{2\cos^2 i}\frac{\sin w}{f}\right)\sin i\sin(\varpi-\theta),$$

ou, en introduisant les anomalies excentriques,

$$\delta_2 u = -\left(\frac{u^2}{2\cos^2 i}\frac{a\sin\varepsilon}{r} + \frac{uu_1}{2\cos^2 i}\frac{\cos\varepsilon-e}{r}\right)\frac{1}{f}\sin i\cos(\varpi-\theta)$$
$$-\left(\frac{u^2}{2\cos^2 i}\frac{a\cos\varepsilon}{r} - \frac{uu_1}{2\cos^2 i}\frac{a\sin\varepsilon}{r}\right)\sin i\sin(\varpi-\theta).$$

Dans la première approximation, on a trouvé, pour les termes renfermant t en facteur,

$$\frac{u}{\cos i} = -2eV_0'' nt + (V_0''+iV_0')_0 e'' nt,$$

et, en différentiant par rapport à ε,

$$\frac{u_1}{\cos i} = -(V_0'-iV_0'')e'' nt.$$

De là on tire

$$\frac{u}{\cos i}\frac{a\sin\varepsilon}{r} + \frac{u_1}{\cos i}\frac{a(\cos\varepsilon-e)}{r} = -2V_0' nt,$$
$$\frac{u}{\cos i}\frac{a\cos\varepsilon}{r} - \frac{u_1}{\cos i}\frac{a\sin\varepsilon}{r} = 2V_0'' nt,$$

d'où enfin

$$\delta_2 u = [2eV_0'V_0'' - V_0'(V_0''+iV_0')e''] \frac{1}{f}\sin i\cos(\varpi-\theta).n^2t^2$$
$$-[2eV_0'V_0'' - \tfrac{1}{2}V_0''(V_0''+iV_0')e''] \sin i\sin(\varpi-\theta).n^2t^2,$$

expression qui renferme tous les termes contenant le carré de t.

60.

Les constantes arbitraires qu'il faut ajouter aux intégrales dans les calculs précédents ont même forme que celles qui sont introduites par la première approximation, et sont déterminées par les mêmes équations, art. 39, *Première partie.* Comme il est impossible de faire confusion, je les désignerai ici par les mêmes lettres, et j'ai

$$\frac{d\delta z}{dt} = 2k + (K_1' - iK_1'')\,e^{\epsilon t},$$

$$n\delta z = c + (2k - eK_1')nt - [K_1'' + i(1 - \tfrac{1}{2}e^2)K_1']\,e^{\epsilon t} + (\tfrac{1}{4}eK_1'' + \tfrac{1}{4}ieK_1')\,e^{2\epsilon t},$$

$$2\delta\nu = 2C - (K_1' - iK_1'')\,e^{\epsilon t},$$

$$\frac{u}{\cos i} = -2el_1'' + (l_1' - il_1'')\,e^{\epsilon t};$$

le terme total proportionnel à t dans $n\delta z$ est donc

$$2(\text{R}_0' + e\text{r}_1'' + k - \tfrac{1}{2}eK_1')nt.$$

Le coefficient de nt dans ce terme contient les quantités du second ordre provenant de la différence entre la valeur vraie et la valeur osculatrice du moyen mouvement pendant l'unité de temps. La quantité désignée par Z_1, art. 39, *Première partie,* représentant la constante de $\frac{dz}{dt}$ dépendant du second ordre, est égale au coefficient de nt de l'expression de $\frac{d\delta z}{dt}$, et ainsi, en négligeant les petits termes résultant de la multiplication par ϵ^2 et qui ne sont jamais sensibles, on a

$$Z_1 = \text{M}_0' + e\text{m}_1''.$$

De même $2\,V_1$ est la partie constante de $\frac{dz}{dt}$, calculé avec $\frac{h_0}{h}$ et ν, article 39, *Première partie,* partie dépendante du second ordre; cette quantité est donc la constante de $\frac{d\delta z}{dt} + 2\delta\nu$.

Mais la somme $\nu^2 + 2\nu\,\delta\frac{h}{h_0}$, qui est la partie du second ordre contenue dans $\frac{dz}{dt}$, donne

$$[3(B_j + \epsilon\,\text{B}_j) + C_j + \epsilon\,\text{C}_j]\,e^{\varphi t},$$

ou, en remplaçant ε par $nt + e \sin \varepsilon$,

$$\left\{3\left[B_j - \tfrac{1}{2} ie(\mathrm{B}_{j-1} - \mathrm{B}_{j+1})\right] + C_j - \tfrac{1}{2} ie(\mathrm{C}_{j-1} - \mathrm{C}_{j+1})\right\} e^{\varphi i} + (3\,\mathrm{B}_j + \mathrm{C}_j)\,nt .$$

La partie constante s'obtient en faisant $j = 0$, $j' = 0$, ce qui donne, puisque $B''_{-1} = -B''_1$, $B'_1 = B'_{-1}$,

$$2V_1 = 6(B'_0 + \tfrac{1}{2} e\mathrm{B}''_1) + 2(C'_0 + \tfrac{1}{2} e\mathrm{C}''_1).$$

D'après le même art. 39, *Première partie*, $2H_1$ est une constante provenant de $\left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^2$ ou $\left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^2$; mais on a trouvé pour la première approximation, en négligeant la constante d'intégration,

$$\delta \frac{h_0}{h} = \Sigma (D'_j - iD''_j)\, e^{\varphi i};$$

de plus, $2K$ est la constante de $\delta \frac{h}{h_0} = -\delta \frac{h_0}{h}$; on a dès lors

$$2H_1 = 4K^2 + \Sigma(D'^2_j + D''^2_j) + \text{des termes variables.}$$

On aura ensuite

$$C = -\tfrac{1}{3}(4k + eK'_1 + 3Z_1) + \tfrac{1}{3}(H_1 + 3V_1).$$

Enfin les quantités c, k, K'_1, K''_1, seront déterminées par les équations de l'art. 41, *Première partie;* seulement, il faudra avoir soin d'augmenter $(\nu)_0$ de la valeur numérique de $\frac{1}{3}(H_1 + 3V_1)$, et remplacer Z par la valeur Z_1 calculée plus haut.

---

§ V.

Développement de l'équation de condition établie à l'art. 51.

61.

On a trouvé, art. 51, l'équation

$$\frac{d\delta z}{dt} + 2\delta\nu = \delta \frac{h_0}{h} + 3\nu^2 - 2\nu\delta\frac{h_0}{h} + 2\nu\frac{\Delta n}{n}, \tag{77}$$

où $\Delta n = (n) - n_0$, et comme on a

$$\frac{d\delta z}{dt} = \overline{\delta W} + \frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta}\frac{an\delta z}{r} + \nu^2,$$

$$2\nu = -\int \frac{\overline{\partial \delta W}}{\partial \eta} d\varepsilon - \int \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}\frac{a}{r} - \frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta}\frac{a^2 e \sin \varepsilon}{r^2} \right) n\delta z\, d\varepsilon,$$

l'équation de condition devient

$$\overline{\delta W} + \frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta}\frac{an\delta z}{r} + 2\delta\nu = \delta\frac{h_0}{h} + 2\nu^2 - 2\nu\delta\frac{h_0}{h} + 2\nu\frac{\Delta n}{n},$$

ou bien

$$(78) \qquad \overline{\delta W} - \int \frac{\overline{\partial \delta W}}{\partial \eta} d\varepsilon - \delta\frac{h_0}{h} - 2\nu\left(\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) + R,$$

en posant

$$(79) \qquad R = -\int \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}\frac{a}{r} - \frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta}\frac{a^2 e \sin \varepsilon}{r^2} \right) n\delta z\, d\varepsilon + \frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta}\frac{an\delta z}{r}.$$

Or, en négligeant les termes contenant les perturbations de la latitude et les produits des masses, on a

$$\frac{d\delta W}{d\varepsilon} = A\frac{an}{r}\delta z + B\nu + C\delta\frac{h}{h_0},$$

$$\frac{d\delta\frac{h_0}{h}}{d\varepsilon} = A\frac{an\delta z}{r} + B'\nu,$$

où

$$A = \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} - T\frac{ae \sin \varepsilon}{r},$$

$$B = V + X,$$

$$2C = (T + X + \overline{T}),$$

$$A' = \frac{\overline{\partial T}}{\partial \varepsilon} - \overline{T}\frac{ae \sin \varepsilon}{r},$$

$$B' = \overline{V}.$$

De ces notations et de l'équation (49), il résulte que

$$A' = \overline{A} + \frac{\overline{\partial T}}{\partial \eta}.$$

Après avoir substitué, on aura, en intégrant,

$$\delta\frac{h_0}{h}=\int\frac{\overline{\partial T}}{\partial \eta}\frac{an\delta z}{r}d\varepsilon+\int\left(\overline{A}\frac{an\delta z}{r}+\overline{V}\nu\right)d\varepsilon.$$

Substituant dans l'équation (78), il vient

$$\delta W-\int\frac{\overline{\partial\delta W}}{\partial\eta}d\varepsilon-\int\left(\overline{A}\frac{an\delta z}{r}+\overline{V}\nu\right)d\varepsilon-\int\frac{\overline{\partial T}}{\partial\eta}\frac{an\delta z}{r}d\varepsilon$$
$$-2\nu\left(\nu-\delta\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}\right)+R=0.$$

62.

Soit maintenant

$$\frac{\partial P}{\partial\varepsilon}=A\frac{an}{r}\delta z,\quad \frac{\partial Q}{\partial\varepsilon}=V\nu,\quad \frac{\partial M}{\partial\varepsilon}=C\delta\frac{h}{h_0},\quad \frac{\partial N}{\partial\varepsilon}=X\nu;$$

il en résulte

$$\delta W=P+Q+M+N.$$

Substituant dans l'équation précédente, on obtient les équations de condition

$$\overline{P}-\int\frac{\overline{\partial P}}{\partial\eta}d\varepsilon-\int\overline{A}\frac{an\delta z}{r}d\varepsilon=0,$$

$$\overline{Q}-\int\frac{\overline{\partial Q}}{\partial\eta}d\varepsilon-\int\overline{V}\nu d\varepsilon=0,$$

$$\overline{M}-\int\frac{\overline{\partial M}}{\partial\eta}d\varepsilon=0,$$

$$\overline{N}-\int\frac{\overline{\partial N}}{\partial\eta}d\varepsilon-\int\frac{\overline{\partial T}}{\partial\eta}\frac{an\delta z}{r}-2\nu\left(\nu-\delta\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}\right)+R=0, \tag{80}$$

dont je vais successivement donner la démonstration.

Le produit A $\frac{an\delta z}{r}$ donne une série renfermant des termes de la forme

$$\iota N e^{\iota(\eta+\varphi)\iota},$$

dont on fait la somme, après avoir donné à ι successivement les valeurs $-1, 0, 1$, précaution qu'il faudra toujours sous-entendre

dans la suite, quand elle ne sera pas indiquée par le signe Σ. On a ainsi

$$\frac{\partial P}{\partial \epsilon} = \epsilon N_j e^{(m+\varphi)\epsilon},$$

d'où l'on tire successivement

$$P = \frac{1}{\omega}\left(-i\epsilon + \frac{1}{\omega}\right) N_j e^{(m+\varphi)\epsilon},$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{1}{\omega} l \left(\epsilon + \frac{1}{\omega} i\right) N_j e^{(m+\varphi)\epsilon},$$

$$\overline{P} = \frac{1}{\omega - l}\left(-i\epsilon + \frac{1}{\omega - l}\right) N_{j-1} e^{\varphi\epsilon},$$

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial \eta} = \frac{1}{\omega - l} l \left(\epsilon + \frac{1}{\omega - l} i\right) N_{j-1} e^{\varphi\epsilon}.$$

De plus,

$$\int \frac{\partial \overline{P}}{\partial \eta} d\epsilon = \frac{1}{\omega(\omega - l)} l \left(-i\epsilon + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega - l}\right) N_{j-1} e^{\varphi\epsilon},$$

$$\overline{A} \frac{an\delta z}{r} = \epsilon N_{j-1} e^{\varphi\epsilon},$$

$$\int \overline{A} \frac{an\delta z}{r} d\epsilon = \frac{1}{\omega}\left(-i\epsilon + \frac{1}{\omega}\right) N_{j-1} e^{\varphi\epsilon};$$

la substitution de ces valeurs, dans la première des équations de condition, montre qu'elle est identiquement satisfaite.

Pour étendre la démonstration aux termes qui ne renferment pas ϵ en facteur, il faut supprimer, dans les intégrales précédentes, les termes qui ne contiennent pas ce facteur, et faire $\epsilon = 1$ dans ceux qui le renferment. Ainsi se trouve complètement établie la première des équations de condition. Il en est de même pour la seconde qui a la même forme.

La troisième s'établit aisément; en effet, on a trouvé, art. 31, *Première partie,*

$$T = \frac{r}{f} \frac{\partial \Omega}{\partial w},$$

et, de la valeur de X, art. 9, on tire

$$\overline{X} = -\frac{2}{f} r \frac{\partial \Omega}{\partial w},$$

par suite,

$$\overline{T} + \tfrac{1}{2}\overline{X} = 0,$$

et comme

$$2C = T + X + \overline{T},$$

on a

$$\overline{C} = 0.$$

Soit aussi

$$C\delta \frac{h}{h_0} = \Sigma \varepsilon N_j e^{(m+\varphi)i}:$$

il résulte de l'équation précédente qu'on a

$$\Sigma N_{j-i} = 0;$$

par suite, l'expression $\overline{M} - \int \frac{\overline{\partial M}}{\partial \eta} d\varepsilon$, qui renferme en facteur ΣN_{j-i}, est nulle.

La démonstration précédente subsiste encore pour $j' = 0$ et $j = -1, 0, 1$, auxquels cas les intégrales correspondantes ont une autre forme.

63.

Pour développer l'équation (80), avec plus de facilité, je vais lui donner une autre forme, de laquelle seront exclus les diviseurs r, r', qui introduiraient en coefficient des séries infinies. En différentiant l'équation (79), on a

$$\frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{d\frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta}}{d\varepsilon} \frac{a}{r} n\delta z + \frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta} \frac{a}{r} \frac{d\delta z}{d\varepsilon} - \frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial \eta^2} \frac{a}{r} n\delta z.$$

Si l'on pose

$$W = N_j e^{(m+\varphi)i},$$

il vient

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = ilN_j e^{(m+\varphi)i}, \qquad \frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta} = ilN_{j-i} e^{\varphi i},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = -l^2 N_j e^{(m+\varphi)i}, \qquad \frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial \eta^2} = -l^2 N_{j-i} e^{\varphi i},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \eta\, \partial \varepsilon} = -l\omega N_j e^{(m+\varphi)i}, \qquad \frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial \eta\, \partial \varepsilon} = -l(\omega - l) N_{j-i} e^{\varphi i},$$

$$\frac{d\frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta}}{d\varepsilon} = -l\omega N_{j-i} e^{\varphi i};$$

de là résulte

$$\frac{d\frac{\partial W}{\partial \eta}}{d\varepsilon} = \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta \partial \varepsilon}:$$

on a de plus

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \eta \partial \varepsilon} = \frac{\partial T}{\partial \eta}.$$

Substituant plus haut, en remarquant que $n\frac{d\delta z}{d\varepsilon} = \frac{d\delta z}{dt}\frac{r}{a}$, il vient

$$\frac{dR}{d\varepsilon} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{\partial T}{\partial \eta}\right)\frac{an}{r}\delta z + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{a}{r}\frac{d\delta z}{dt} - \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}\frac{a}{r}n\delta z,$$

$$R = \int \frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{an}{r}\delta z + \int \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{d\delta z}{dt}d\varepsilon.$$

L'introduction de ce résultat dans l'équation (80) donne à celle-ci la forme

$$\bar{N} - \int \frac{\partial \bar{N}}{\partial \eta}d\varepsilon + \int \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{d\delta z}{dt}d\varepsilon - 2\nu\left(\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) = 0. \tag{81}$$

Le premier membre de cette équation ne renferme de séries infinies dans aucun argument. Les développements suivants sont consacrés à établir cette relation.

64.

Soit, pour plus de simplicité,

$$T = \Sigma\omega D_j e^{(l\eta + \psi)\iota}, \tag{82}$$

dans laquelle ψ est une quantité analogue à celle qui a été désignée par φ; de plus, le signe Σ s'étend aux valeurs $-1, 0, 1$, de l. Multipliant par $d\varepsilon$ et intégrant, il vient successivement

$$W = -i\Sigma D_j e^{(l\eta+\psi)\iota},$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = \bar{W} = -i\Sigma D_{j-1} e^{\psi\iota},$$

$$2\frac{d\nu}{d\varepsilon} = -\frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} = -\Sigma l D_{j-1} e^{\psi\iota},$$

$$\nu = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{il}{\omega}D_{j-1}e^{\psi\iota},$$

$$\delta\frac{h_0}{h} = -\left(\frac{h_0}{h}\right)^2\delta\frac{h}{h_0},$$

ou, pour une première approximation,

$$\delta \frac{h_0}{h} = \int \frac{\partial W}{\partial t} dt = -i \frac{\Sigma(\omega - l)}{\omega} D_{j-l} e^{\psi t}.$$

65.

Pour calculer $\bar{N}$, je vais d'abord chercher le produit $X\nu$. Soient donc deux termes généraux du développement de X

$$X = A_p e^{(m+\psi)t} + A_q e^{(m+\chi)t}. \tag{83}$$

De même

$$2\nu = \Sigma \frac{il}{\omega'} D_{p-l} e^{\psi t} + \Sigma \frac{il}{\omega''} D_{q-l} e^{\chi t},$$

où

$$\omega' = p - p' \frac{n'}{n}, \qquad \omega'' = q - q' \frac{n'}{n};$$

par suite,

$$2X\nu = \frac{i}{\omega'} A_q \Sigma l [D_{p-l} e^{(m+\psi+\chi)t} + (D)_{p-l} e^{(m-\psi+\chi)t}]$$
$$+ \frac{i}{\omega''} A_p \Sigma l [D_{q-l} e^{(m+\psi+\chi)t} + (D)_{q-l} e^{(m+\psi-\chi)t}].$$

Posant maintenant

$$p \pm q = j, \quad p' \pm q' = j',$$

la relation précédente peut s'écrire

$$2X\nu = \frac{i}{\omega'} A_q \Sigma l D_{p-l} e^{(m+\varphi)t} + \frac{i}{\omega''} A_p \Sigma l D_{q-l} e^{(m+\varphi)t}:$$

en ne tenant compte que du signe $+$, on déduit de cette relation

$$2N = 2\int X\nu dt = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega'} A_q \Sigma l D_{p-l} + \frac{1}{\omega''} A_p \Sigma l D_{q-l}\right) e^{(m+\varphi)t};$$

on tire de là

$$2\bar{N} - 2\int \frac{\partial N}{\partial n} dt = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\Sigma A_{q-l}}{\omega'} \Sigma l D_{p-l} + \frac{\Sigma A_{p-l}}{\omega''} \Sigma l D_{q-l}\right) e^{\varphi t}.$$

De plus, les relations (82) et (83) donnent

$$\bar{T} = \Sigma(\omega - l) D_{j-l} e^{\varphi t},$$
$$\bar{X} = \Sigma A_{j-l} e^{\varphi t},$$

expressions qui, substituées dans l'équation $2\overline{T}+\overline{X}=0$, donnent

$$\Sigma A_{j-l}+2\Sigma(\omega-l)D_{j-l}=0. \tag{84}$$

On a, par suite,

$$\overline{N}-\int\frac{\partial N}{\partial \eta}dt=-\frac{1}{\omega}\left[\frac{\Sigma(\omega''-l)D_{q-l}\Sigma D_{p-l}}{\omega'}+\frac{\Sigma(\omega'-l)D_{p-l}\Sigma D_{q-l}}{\omega''}\right]\mathrm{e}^{\varphi t}.$$

66.

Pour développer le troisième terme de l'équation (81), je pose

$$\frac{\partial W}{\partial \eta}=\Sigma lD_{p}\mathrm{e}^{(tn+\psi)t}+\Sigma lD_{q}\mathrm{e}^{(tn+\chi)t},$$

$$\frac{d\delta z}{dt}=-i\Sigma lD_{p-l}\mathrm{e}^{\psi t}-i\Sigma D_{q-l}\mathrm{e}^{\chi t};$$

d'où l'on tire

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}}=\Sigma lD_{p-l}\mathrm{e}^{\psi t}+\Sigma lD_{q-l}\mathrm{e}^{\chi t},$$

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}}\cdot\frac{d\delta z}{dt}=-i\Sigma lD_{q-l}\Sigma D_{p-l}\mathrm{e}^{(\psi+\chi)t}-i\Sigma lD_{p-l}\Sigma D_{q-l}\mathrm{e}^{(\psi+\chi)t},$$

$$\int\overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}}\,\frac{d\delta z}{dt}\,dt=-\frac{1}{\omega}(\Sigma lD_{q-l}\Sigma D_{p-l}+\Sigma lD_{p-l}\Sigma D_{q-l})\,\mathrm{e}^{\varphi t}.$$

Négligeant $\frac{\Delta n}{n}$ qui ne saurait avoir ici d'influence sensible, on a

$$2\nu\left(\nu-\delta\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}\right)=-\left[\frac{\Sigma lD_{q-l}\Sigma(\omega'-\frac{1}{2}l)D_{p-l}}{\omega'\omega''}+\frac{\Sigma lD_{p-l}\Sigma(\omega''-\frac{1}{2}l)D_{q-l}}{\omega'\omega''}\right]\mathrm{e}^{\varphi t}.$$

Finalement, substituant ces divers résultats dans l'équation (81), en tenant compte de la relation $\omega'+\omega''=\omega$, on obtient

$$\begin{aligned}\omega'\omega''(\Sigma D_{q-l}\Sigma lD_{p-l}+\Sigma D_{p-l}\Sigma lD_{q-l}-\Sigma D_{q-l}\Sigma lD_{p-l}-\Sigma D_{p-l}\Sigma lD_{q-l})\\+(\omega''+\omega'-\omega)\Sigma lD_{p-l}\Sigma lD_{q-l}=0.\end{aligned}$$

67.

Je vais maintenant m'occuper d'un calcul analogue pour les termes du produit $X\nu$, dont les arguments sont la différence des arguments des facteurs. On a successivement

$$2X\nu=\frac{i}{\omega''}A_{p}\Sigma l(D)_{q-l}\mathrm{e}^{(\psi-\chi+tn)t}+\frac{i}{\omega'}A_{q}\Sigma l(D)_{p-l}\mathrm{e}^{(-\psi+\chi+tn)t},$$

$$2N = \frac{1}{\omega\omega''} A_p \Sigma l(D)_{q-l} e^{(\varphi+\eta)\iota} + \frac{1}{\omega\omega'} A_q \Sigma l(D)_{p-l} e^{-(\varphi-\eta)\iota},$$

$$2\bar{N} - 2\int \frac{\partial \bar{N}}{\partial \eta} d\varepsilon = \frac{1}{\omega}\left[\frac{\Sigma A_{p-l} \Sigma l(D)_{q-l}}{\omega''} - \frac{\Sigma (A)_{q-l} \Sigma l D_{p-l}}{\omega'}\right] e^{\varphi\iota}.$$

On a aussi

$$2\nu\left(\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) = \frac{1}{\omega'\omega''}\Big[\Sigma l(D)_{q-l} \Sigma(\omega' - \tfrac{1}{2} l) D_{p-l}$$
$$+ \Sigma l D_{p-l} \Sigma(\omega'' - \tfrac{1}{2} l)(D)_{q-l}\Big] e^{\varphi\iota}.$$

Substituant ces résultats dans l'équation (81), en remarquant que dans le terme indépendant de l'exponentielle, il faut négliger la partie imaginaire, et tenant compte de la relation (84), on trouve

$$i\Sigma(\omega' - l) D_{p-l} \Sigma l(D)_{p-l} = 0,$$

$$\omega'\omega''\left[\Sigma l D_{p-l} \Sigma (D)_{q-l} - \Sigma l(D)_{q-l} \Sigma D_{p-l} + \Sigma l(D)_{q-l} \Sigma D_{p-l} - \Sigma l D_{p-l} \Sigma (D)_{q-l}\right]$$
$$+ (\omega' + \omega'' - \omega) \Sigma l(D)_{q-l} \Sigma l D_{p-l} = 0.$$

Les résultats obtenus dans cet article et le précédent font voir que l'équation (81) est satisfaite pour les termes qu'on vient de considérer.

68.

L'équation (81) est aussi vérifiée pour les termes particuliers provenant de termes de la forme générale. En effet, on a

$$X = A_{0,p} e^{p\iota} + A_{-1,p+1} e^{[-\eta+(p+1)]\iota} + A_{1,p-1} e^{[\eta+(p-1)]\iota}$$
$$+ A_{0,p+1} e^{(p+1)\iota} + A_{-1,p+2} e^{[-\eta+(p+2)]\iota} + A_{1,p} e^{(\eta+p)\iota},$$

$$2\nu = \frac{i}{\omega'} \Sigma l D_{p-l} e^{p\iota} + \frac{i}{\omega'+1} \Sigma l D_{p+1-l} e^{(p+1)\iota},$$

$$2X\nu = \frac{i}{\omega'}(A)_{0,p} \Sigma l D_{p-l} + \frac{i}{\omega'}\left[A_{-1,p+1} \Sigma l(D)_{p-l} e^{(-\eta+\varepsilon)\iota} + A_{1,p-1} \Sigma l(D)_{p-l} e^{(\eta-\varepsilon)\iota}\right]$$
$$+ i\left[\frac{A_{0,p}}{\omega'+1} \Sigma l D_{p+1-l} e^{-\varepsilon\iota} + \frac{A_{0,p+1}}{\omega'} \Sigma l(D)_{p-l} e^{\varepsilon\iota}\right]$$
$$+ i\left[\frac{A_{-1,p+2}}{\omega'} \Sigma l(D)_{p-l} e^{(-\eta+2\varepsilon)\iota} + \frac{A_{1,p-1}}{\omega'+1} \Sigma l(D)_{p+1-l} e^{(\eta-2\varepsilon)\iota}\right]$$
$$+ i\left[\frac{A_{1,p}}{\omega'} \Sigma l(D)_{p-l} e^{\eta\iota} + \frac{A_{1,p+1}}{\omega'+1} \Sigma l(D)_{p+1-l} e^{-\eta\iota}\right],$$

$$
\begin{aligned}
2N = i\varepsilon \frac{(A)_{0,p}}{\omega'} \Sigma l D_{p-l} + i\varepsilon \left[\frac{A_{1,p}}{\omega'} \Sigma l (D)_{p-l} e^{\eta\varepsilon} + \frac{A_{-1,p+1}}{\omega'+1} \Sigma l (D)_{p+1-l} e^{-\eta\varepsilon} \right] \\
+ \frac{1}{\omega'} \left[A_{-1,p+1} \Sigma l (D)_{p-l} e^{(-\eta+\varepsilon)\varepsilon} - A_{1,p-1} \Sigma l (D)_{p-l} e^{(\eta-\varepsilon)\varepsilon} \right] \\
+ \left[\frac{A_{0,p+1}}{\omega'} \Sigma l (D)_{p-l} e^{\varepsilon\varepsilon} - \frac{A_{0p}}{\omega'+1} \Sigma l (D)_{p+1-l} e^{-\varepsilon\varepsilon} \right] \\
+ \frac{1}{2} \left[\frac{A_{-1,p+2}}{\omega'} \Sigma l (D)_{p-l} e^{(-\eta+2\varepsilon)\varepsilon} - \frac{A_{1,p-1}}{\omega'+1} \Sigma l (D)_{p+1-l} e^{(\eta-2\varepsilon)\varepsilon} \right].
\end{aligned}
$$

De là on tire, en tenant compte de l'équation (84),

$$
\begin{aligned}
2\overline{N} - 2\int \overline{\frac{\partial N}{\partial \eta}} d\varepsilon = -\frac{i\varepsilon}{\omega'} \Sigma (\omega' - l) D_{p-l} \Sigma l (D)_{p-l} \\
- \left[\frac{1}{\omega'} \Sigma (\omega' - l + 1) D_{p+1-l} \Sigma l (D)_{p-l} \right. \\
\left. - \frac{1}{\omega'+1} \Sigma (\omega' - l) (D)_{p-l} \Sigma l D_{p+1-l} \right] e^{\varepsilon\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

On doit négliger les termes constants des produits et des intégrales, parce qu'ils sont ici sans influence. En effet, des termes constants de la première relation de l'art. 60, on a déduit la constante C de ν, et en tenant compte des termes négligés ici, on pourrait obtenir tout au plus les termes du second ordre de cette constante. Cela même ne peut avoir lieu, sans quoi il existerait, en vertu de l'équation de condition, une relation entre ces quantités du second ordre et C, d'où l'on devrait déduire pour cette dernière une valeur différant, par le fait de ces termes du second ordre, de la valeur obtenue.

69.

Soient maintenant

$$
\begin{aligned}
\overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}} &= \Sigma l D_{p-l} e^{p\varepsilon} + \Sigma l D_{p+1-l} e^{(p+1)\varepsilon}, \\
\frac{d\delta z}{dt} &= -i\Sigma D_{p-l} e^{p\varepsilon} - i\Sigma D_{p+1-l} e^{(p+1)\varepsilon},
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\int \overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}} \frac{d\delta z}{dt} d\varepsilon = -i\varepsilon \Sigma l D_{p-l} \Sigma (D)_{p-l} + \Sigma (D)_{p+1-l} \Sigma l D_{p-l} e^{-\varepsilon\varepsilon} - \Sigma (D)_{p-l} \Sigma l D_{p+1-l} e^{\varepsilon\varepsilon};
$$

soient encore

$$\nu = \tfrac{1}{2} i \frac{\Sigma l D_{p-l}}{\omega'} e^{pt} + \tfrac{1}{2} i \frac{\Sigma l D_{p+1-l}}{\omega'+1} e^{(p+1)t},$$

$$\delta \frac{h}{h_0} = -\frac{i\Sigma(\omega'-l) D_{p-l}}{\omega'} e^{pt} - \frac{i\Sigma(\omega'+1-l) D_{p+1-l} e^{(p+1)t}}{\omega'+i},$$

d'où

$$2\nu\left(\nu - \delta\frac{h}{h_0} + \frac{\Delta n}{n}\right) = -\left[\frac{\Sigma l D_{p+1-l} \Sigma(\omega' - \frac{1}{2} l)(D)_{p-l}}{(\omega'+1)\omega'} + \frac{\Sigma l (D)_{p-l} \Sigma(\omega'+1-\frac{1}{2} l) D_{p+1-l}}{\omega'(\omega'+1)}\right] e^{\varepsilon t}.$$

Substituant dans l'équation (81), le premier membre devient

$$-(\omega'+1)\Sigma l(D)_{p-l}\Sigma l D_{p+1-l} + \omega' \Sigma l D_{p+1-l} \Sigma l (D)_{p-l} + \Sigma l (D)_{p-l} \Sigma l D_{p+1-l};$$

ce qui est identiquement nul. L'équation (81) est donc aussi satisfaite pour l'ensemble des termes qu'on vient de considérer.

70.

Je vais maintenant considérer les termes provenant des termes exceptionnels du premier ordre donnant des termes en partie de la forme générale et en partie d'une forme particulière. Pour obtenir ces termes, on prend T sous la forme

$$T = eH'_0 + (H)_0 e^{\eta t} + (F)_1 e^{\varepsilon t} + (G)_1 e^{(-\eta+\varepsilon)t} + (G)_2 e^{(-\eta+2\varepsilon)t} + \cdots,$$

où

$$G'_1 = -eH'_0 = -F'_0.$$

Multipliant par $d\varepsilon$ et intégrant, il vient

$$W = 2k + eH'_0\varepsilon + (H)_0 e^{\eta t}\varepsilon - i(G)_1 e^{(-\eta+\varepsilon)t} + K_1 e^{\eta t} - i(F)_1 e^{\varepsilon t} - \tfrac{1}{2} i (G)_2 e^{(-\eta+2\varepsilon)t} - \cdots,$$

$$\overline{W} = 2k + 2G'_1 + eH'_0\varepsilon + (H)_0 e^{\varepsilon t}\varepsilon + [K_1 - i(F)_1 - \tfrac{1}{2} i (G)_2] e^{\varepsilon t} + \cdots,$$

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}} = 2eH'_0 + i(H)_0 e^{\eta t}\varepsilon + [iK_1 - \tfrac{1}{2}(G)_2] e^{\varepsilon t} + \cdots,$$

$$\nu = -\tfrac{1}{2}\int \overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}} d\varepsilon = C - eH'_0\varepsilon - \tfrac{1}{2}[K_1 + \tfrac{1}{2}(G)_2 + i(H)_0] e^{\varepsilon t} - \tfrac{1}{2}(H)_0 e^{\varepsilon t}\varepsilon - \cdots,$$

$$\delta\frac{h_0}{h} = \int \overline{\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}} d\varepsilon = -2K - eH'_0\varepsilon - i[(F)_1 + (G)_2 + (H)_0] e^{\varepsilon t} - \cdots.$$

La quantité désignée par Z_0 à l'art. 39, *Première partie*, se réduit ici à G_1', en sorte que l'on a

$$(85)\qquad \begin{cases} C = -\frac{1}{3}(4k + eK_1' + 3G_1'), \\ K = \frac{1}{3}(k + eK_1'). \end{cases}$$

71.

Si l'on pose

$$(P)_1 = -i[(F)_1 + \tfrac{1}{2}(G)_2],$$
$$(\Pi)_1 = (F)_1 + (G)_2 + (H)_0,$$
$$\Lambda = K_1 + (P)_1,$$

il vient

$$\overline{W} = 2k + 2G_1' + \Lambda e^{\epsilon i} + eH_0'\epsilon + (H)_0 e^{\epsilon i}\epsilon,$$
$$\frac{\overline{\partial W}}{\partial\eta} = 2eH_0' - i\Lambda e^{\epsilon i} - i[(\Pi)_1 - (H)_0]e^{\epsilon i} + i(H_0)e^{\epsilon i}\epsilon,$$
$$\nu = C - eH_0'\epsilon - \tfrac{1}{2}\Lambda e^{\epsilon i} - \tfrac{1}{2}i(\Pi)_1 e^{\epsilon i} - \tfrac{1}{2}(H)_0 e^{\epsilon i}\epsilon,$$
$$\delta\frac{h_0}{h} = -2K - eH_0'\epsilon - i(\Pi)_1 e^{\epsilon i}.$$

Multipliant l'expression précédente de $\overline{W}$ par $ndt = (1 - e\cos\epsilon)\,d\epsilon$, intégrant et éliminant ϵ du premier terme par la relation $\epsilon = nt + e\sin\epsilon$, on a

$$\begin{aligned} n\delta z = {} & 2(k + G_1' - \tfrac{1}{2}e\Lambda')nt \\ & - \{\Lambda' - (1 - \tfrac{1}{2}e^2)H_0' + i[(1 - \tfrac{1}{2}e^2)\Lambda' - H_0']\}e^{\epsilon i} \\ & + \tfrac{1}{4}e[\Lambda' + \tfrac{1}{2}H_0' + i(\Lambda' - \tfrac{1}{2}H_0')]e^{2\epsilon i} \\ & + [H_0' - i(1 - \tfrac{1}{2}e^2)H_0']e^{\epsilon i}\epsilon - \tfrac{1}{4}e(H_0' - iH_0')e^{2\epsilon i}\epsilon + \cdots. \end{aligned}$$

Comme le coefficient de t dans cette expression est la différence entre la vraie valeur du moyen mouvement et celle du moyen mouvement pris pour base du calcul, on a

$$(86)\qquad \frac{\Delta n}{n} = 2(k + G_1' - \tfrac{1}{2}e\Lambda').$$

Différentiant l'autre partie par rapport à ϵ, puis divisant le résultat par $1 - e\cos\epsilon$, après avoir remarqué que

$$\frac{d\delta z}{dt} = \frac{nd\delta z}{d\epsilon} \times \frac{1}{1 - e\cos\epsilon},$$

il vient

$$\frac{d\delta z}{dt} = e\lambda' + \lambda\, e^{\varepsilon i} + (H)_0 e^{\varepsilon i} \varepsilon + eH'_0 \varepsilon .$$

Telle est l'expression qui va servir dans les développements suivants.

72.

Pour éviter une trop grande complication de termes, je vais prendre d'abord les termes indépendants du facteur ε et des constantes arbitraires, et les combiner avec les termes généraux. Négligeant le second terme général qui amènerait des termes de même forme que ceux provenant du premier, il vient

$$\nu = -\tfrac{1}{2} i (\Pi)_1 e^{\varepsilon i} + \tfrac{1}{2} i \frac{\Sigma l D_{j-l}}{\omega} e^{\varphi i},$$

$$\begin{aligned} X = {} & (B)_1 e^{(-\eta+\varepsilon) i} + (B)_2 e^{(-\eta+2\varepsilon) i} + \cdots \\ & + 2A'_0 \quad + (A)_1 e^{\varepsilon i} + \cdots + A_j e^{(k\eta+\gamma) i} \\ & \quad + (C)_0 e^{\gamma i}, \end{aligned}$$

$$\overline{X} = 2(A'_0 + B'_1) + [(A)_1 + (B)_2 + (C)_0] e^{\varepsilon i} + \cdots,$$

de plus

$$T = -eH'_0 + (\Pi)_1 e^{\varepsilon i},$$

et comme $2\overline{T} + X = 0$, on a les équations de condition

$$(87) \qquad \begin{cases} A'_0 + B'_1 + eH'_0 = 0, \\ (A)_1 + (B)_2 + (C)_0 + 2(\Pi)_1 = 0. \end{cases}$$

73.

En ne conservant, dans le produit $X\nu$, que les termes provenant du produit des termes particuliers par les termes généraux, on a

$$\begin{aligned} 2X\nu = {} & i\left[(A)_1 \frac{\Sigma l D_{j-l-1}}{\omega - 1} + 2A'_0 \frac{\Sigma l D_{j-l}}{\omega} + A_1 \frac{\Sigma l D_{j+1-l}}{\omega + 1}\right] e^{\varphi i} \\ & + i\left[(B)_2 \frac{\Sigma l D_{j-l-1}}{\omega - 1} + (B)_1 \frac{\Sigma l D_{j-l}}{\omega} + C_0 \frac{\Sigma l D_{j+1-l}}{\omega + 1}\right] e^{(-\eta+\varphi+\varepsilon) i} \\ & + i\left[(C)_0 \frac{\Sigma l D_{j-l-1}}{\omega - 1} + B_1 \frac{\Sigma l D_{j-l}}{\omega} + B_2 \frac{\Sigma l D_{j+1-l}}{\omega + 1}\right] e^{(\eta+\varphi-\varepsilon) i} \\ & - i\left[(\Pi)_1 A_{j-1} + \Pi_1 A_{j+1}\right] e^{(k\eta+\varphi) i}, \end{aligned}$$

$$2N=\left[\frac{(A)_1\Sigma lD_{j-1-l}}{\omega-1}+\frac{2A'_0\Sigma lD_{j-l}}{\omega}+\frac{A_1\Sigma lD_{j+1-l}}{\omega+1}\right]\frac{e^{\varphi\iota}}{\omega}$$
$$+\left[\frac{(B)_2\Sigma lD_{j-1-l}}{\omega-1}+\frac{(B)_1\Sigma lD_{j-l}}{\omega}+\frac{C_0\Sigma lD_{j+1-l}}{\omega+1}\right]\frac{e^{(-\eta+\varphi+\varepsilon)\iota}}{\omega+1}$$
$$+\left[\frac{(C)_0\Sigma lD_{j-1-l}}{\omega-1}+\frac{B_1\Sigma lD_{j-l}}{\omega}+\frac{B_2\Sigma lD_{j+1-l}}{\omega+1}\right]\frac{e^{(\eta+\varphi-\varepsilon)\iota}}{\omega-1}$$
$$-[(\Pi)_1A_{j-1}+\Pi_1A_{j+1}]\frac{e^{(\eta+\varphi)\iota}}{\omega}.$$

De là on tire, en tenant compte des équations (87),

$$N-\int\frac{\partial N}{\partial\eta}d\iota=\left\{\begin{matrix} eH'_0\dfrac{\Sigma lD_{j-l}}{\omega}-(\Pi)_1\dfrac{\Sigma lD_{j-1-l}}{\omega-1}-\Pi_1\dfrac{\Sigma lD_{j+1-l}}{\omega+1}\\ +(\Pi)_1\Sigma(\omega-1-l)D_{j-1-l}+\Pi_1\Sigma(\omega+1-l)D_{j+1-l}\end{matrix}\right\}\frac{e^{\varphi\iota}}{\omega}.$$

74.

Pour développer les autres termes, on a

$$\frac{\partial W}{\partial\eta}=2eH'_0-[\Pi_1-(H)_0]e^{\varepsilon\iota}+\Sigma lD_{j-l}e^{\varphi\iota},$$
$$\frac{d\delta z}{dt}=-i\Sigma D_{j-l}e^{\varphi\iota},$$
$$\nu-\delta\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}=\tfrac{1}{2}i(\Pi)_1e^{\varepsilon\iota}+\frac{i\Sigma(\omega-\frac{1}{2}l)D_{j-l}}{\omega}e^{\varphi\iota},$$
$$2\nu=-i(\Pi)_1e^{\varepsilon\iota}+\frac{i\Sigma lD_{j-l}}{\omega}e^{\varphi\iota},$$

d'où l'on tire

$$\int\frac{\partial W}{\partial\eta}\frac{d\delta z}{dt}d\iota=\left\{-2eH'_0\Sigma D_{j-l}+[(\Pi)_1-(H)_0]\Sigma D_{j-1-l}+(\Pi_1-H_0)\Sigma D_{j+1-l}\right\}\frac{e^{\varphi\iota}}{\omega},$$
$$2\nu\left(\nu-\delta\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}\right)=\left[\frac{(\Pi)_1\Sigma(\omega-1-l)D_{j-1-l}}{\omega-1}+\frac{\Pi_1\Sigma(\omega+1-l)D_{j+1-l}}{\omega+1}\right]e^{\varphi\iota}.$$

La substitution de ces diverses valeurs dans l'équation (81) donne

$$s=-\left[\frac{2H'_0e}{\omega}\Sigma(\omega-\tfrac{1}{2}l)D_{j-l}+(H)_0\Sigma D_{j-1-l}+H_0\Sigma D_{j+1-l}\right]\frac{e^{\varphi\iota}}{\omega}.$$

$$2N = \frac{1}{\omega\omega''} A_p \Sigma l(D)_{q-l} e^{(\varphi+h\eta)t} + \frac{1}{\omega\omega'} A_q \Sigma l(D)_{p-l} e^{-(\varphi-h\eta)t},$$

$$2\bar{N} - 2\int \frac{\partial N}{\partial \eta} d\epsilon = \frac{1}{\omega}\left[\frac{\Sigma A_{p-l}\Sigma l(D)_{q-l}}{\omega''} - \frac{\Sigma (A)_{q-l}\Sigma l D_{p-l}}{\omega'}\right] e^{\varphi t}.$$

On a aussi

$$2\nu\left(\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) = \frac{1}{\omega'\omega''}\Big[\Sigma l(D)_{q-l}\Sigma(\omega' - \tfrac{1}{2}l) D_{p-l}$$

$$+ \Sigma l D_{p-l}\Sigma(\omega'' - \tfrac{1}{2}l)(D)_{q-l}\Big] e^{\varphi t}.$$

Substituant ces résultats dans l'équation (81), en remarquant que dans le terme indépendant de l'exponentielle, il faut négliger la partie imaginaire, et tenant compte de la relation (84), on trouve

$$i\Sigma(\omega' - l) D_{p-l}\Sigma l(D)_{p-l} = 0\ ,$$

$$\omega'\omega''\left[\Sigma l D_{p-l}\Sigma(D)_{q-l} - \Sigma l(D)_{q-l}\Sigma D_{p-l} + \Sigma l(D)_{q-l}\Sigma D_{p-l} - \Sigma l D_{p-l}\Sigma(D)_{q-l}\right]$$

$$+ (\omega' + \omega'' - \omega)\Sigma l(D)_{q-l}\Sigma l D_{p-l} = 0\,.$$

Les résultats obtenus dans cet article et le précédent font voir que l'équation (81) est satisfaite pour les termes qu'on vient de considérer.

68.

L'équation (81) est aussi vérifiée pour les termes particuliers provenant de termes de la forme générale. En effet, on a

$$X = A_{0,p} e^{pt} + A_{-1,p+1} e^{[-\eta+(p+1)]t} + A_{1,p-1} e^{[\eta+(p-1)]t}$$

$$+ A_{0,p+1} e^{(p+1)t} + A_{-1,p+2} e^{[-\eta+(p+2)]t} + A_{1,p} e^{(\eta+p)t},$$

$$2\nu = \frac{i}{\omega'}\Sigma l D_{p-l} e^{pt} + \frac{i}{\omega'+1}\Sigma l D_{p+1-l} e^{(p+1)t},$$

$$2X\nu = \frac{i}{\omega'}(A)_{0,p}\Sigma l D_{p-l} + \frac{i}{\omega'}\left[A_{-1,p+1}\Sigma l(D)_{p-l} e^{(-\eta+\epsilon)t} + A_{1,p-1}\Sigma l(D)_{p-l} e^{(\eta-\epsilon)t}\right]$$

$$+ i\left[\frac{A_{0,p}}{\omega'+1}\Sigma l D_{p+1-l} e^{-\epsilon t} + \frac{A_{0,p+1}}{\omega'}\Sigma l(D)_{p-l} e^{\epsilon t}\right]$$

$$+ i\left[\frac{A_{-1,p+2}}{\omega'}\Sigma l(D)_{p-l} e^{(-\eta+2\epsilon)t} + \frac{A_{1,p-1}}{\omega'+1}\Sigma l(D)_{p+1-l} e^{(\eta-2\epsilon)t}\right]$$

$$+ i\left[\frac{A_{1,p}}{\omega'}\Sigma l(D)_{p-l} e^{\eta t} + \frac{A_{1,p+1}}{\omega'+1}\Sigma l(D)_{p+1-l} e^{-\eta t}\right],$$

$$
\begin{aligned}
2N = i\varepsilon \frac{(A)_{0,p}}{\omega'} \Sigma l D_{p-l} + i\varepsilon &\left[\frac{A_{1,p}}{\omega'} \Sigma l (D)_{p-l} e^{\eta\iota} + \frac{A_{-1,p+1}}{\omega'+1} \Sigma l (D)_{p+1-l} e^{-\eta\iota} \right] \\
&+ \frac{1}{\omega'} [A_{-1,p+1} \Sigma l (D)_{p-l} e^{(-\eta+\varepsilon)\iota} - A_{1,p-1} \Sigma l (D)_{p-l} e^{(\eta-\varepsilon)\iota}] \\
&+ \left[\frac{A_{0,p+1}}{\omega'} \Sigma l (D)_{p-l} e^{\varepsilon\iota} - \frac{A_{0p}}{\omega'+1} \Sigma l (D)_{p+1-l} e^{-\varepsilon\iota} \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{A_{-1,p+2}}{\omega'} \Sigma l (D)_{p-l} e^{(-\eta+2\varepsilon)\iota} - \frac{A_{1,p-1}}{\omega'+1} \Sigma l (D)_{p+1-l} e^{(\eta-2\varepsilon)\iota} \right].
\end{aligned}
$$

De là on tire, en tenant compte de l'équation (84),

$$
\begin{aligned}
2\overline{N} - 2\int \frac{\overline{\partial N}}{\partial \eta} d\varepsilon = &-\frac{i\varepsilon}{\omega'} \Sigma (\omega' - l) D_{p-l} \Sigma l (D)_{p-l} \\
&- \left[\frac{1}{\omega'} \Sigma (\omega' - l + 1) D_{p+1-l} \Sigma l (D)_{p-l} \right. \\
&\left. - \frac{1}{\omega'+1} \Sigma (\omega' - l) (D)_{p-l} \Sigma l D_{p+1-l} \right] e^{\varepsilon\iota}.
\end{aligned}
$$

On doit négliger les termes constants des produits et des intégrales, parce qu'ils sont ici sans influence. En effet, des termes constants de la première relation de l'art. 60, on a déduit la constante C de ν, et en tenant compte des termes négligés ici, on pourrait obtenir tout au plus les termes du second ordre de cette constante. Cela même ne peut avoir lieu, sans quoi il existerait, en vertu de l'équation de condition, une relation entre ces quantités du second ordre et C, d'où l'on devrait déduire pour cette dernière une valeur différant, par le fait de ces termes du second ordre, de la valeur obtenue.

69.

Soient maintenant

$$
\frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta} = \Sigma l D_{p-l} e^{p\iota} + \Sigma l D_{p+1-l} e^{(p+1)\iota},
$$

$$
\frac{d\delta z}{dt} = - i \Sigma D_{p-l} e^{p\iota} - i \Sigma D_{p+1-l} e^{(p+1)\iota},
$$

d'où

$$
\int \frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta} \frac{d\delta z}{dt} d\varepsilon = -i\varepsilon \Sigma l D_{p-l} \Sigma (D)_{p-l} + \Sigma (D)_{p+1-l} \Sigma l D_{p-l} e^{-\varepsilon\iota} - \Sigma (D)_{p-l} \Sigma l D_{p+1-l} e^{\varepsilon\iota};
$$

$$N = \left\{ \begin{array}{l} -2iA_1(\Pi)_1 + 2i[eH'_0(B)_1 + \frac{1}{2}(H)_0 C_0 + \frac{1}{2}H_0(B)_2]\,e^{(-\eta+\varepsilon)t} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -iB_1(\Pi)_1 e^{\eta t} \\ + i[eH'_0(B)_2 + \frac{1}{2}(H)_0(B)_1]\,e^{(-\eta+2\varepsilon)t} + 2i[eH'_0(A)_1 + A'_0(H)_0]\,e^{\varepsilon t} \\ + \frac{1}{3}i(H)_0(B)_1 e^{(-\eta+3\varepsilon)t} + i(C)_0(H)_0 e^{(\eta+\varepsilon)t} + \frac{1}{2}i(A)_1(H)_0 e^{2\varepsilon t} \end{array} \right\} \varepsilon$$

$$+ \left\{ -(2eH'_0A'_0 + H'_0A'_1 + H''_0A''_1) - [eH'_0(C)_0 + \frac{1}{2}(H)_0 B_1]\,e^{\eta t} \right\} \varepsilon^2$$

$$+ \left\{ \Pi_1(B)_2 - (\Pi)_1 C_0 - 2[eH'_0(B)_1 + \frac{1}{2}(H)_0 C_0 + \frac{1}{2}H_0(B)_2] \right\} e^{(-\eta+\varepsilon)t}$$

$$- [2A'_0(\Pi)_1 + 2eH'_0(A)_1 + 2A'_0(H)_0]\,e^{\varepsilon t}$$

$$- [\tfrac{1}{2}(\Pi)_1(B)_1 + \tfrac{1}{2}eH'_0(B)_2 + \tfrac{1}{4}(H)_0(B)_1]\,e^{(-\eta+2\varepsilon)t}$$

$$- [\tfrac{1}{4}(A)_1(H)_0 + \tfrac{1}{2}(A)_1(\Pi)_1]\,e^{2\varepsilon t} - [\tfrac{1}{9}(H)_0(B)_2 + \tfrac{1}{3}(\Pi)_1(B)_2]\,e^{(-\eta+3\varepsilon)t}$$

$$- [(H)_0(C)_0 + (\Pi)_1(C)_0]\,e^{(\eta+\varepsilon)t},$$

d'où l'on tire

$$\overline{N} - \int \frac{\partial \overline{N}}{\partial \eta}\, d\varepsilon = i\left\{ -eH'_0[2(\Pi)_1 - (H)_0]\,e^{\varepsilon t} - \tfrac{1}{2}i(\Pi)_1(H)_0 e^{2\varepsilon t} \right\} \varepsilon$$
$$+ [-e^2H'^2_0 + \Pi_1(H)_0]\,\varepsilon^2$$
$$+ [eH'_0(\Pi)_1 + A'_0(H)_0 + H'_0(B)_1]\,e^{\varepsilon t} + \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(H)_0(\Pi)_1 + (\Pi)^2_1]\,e^{2\varepsilon t}.$$

On a ensuite

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial \eta} = 2eH'_0 + [(H)_0 - (\Pi)_1]\,e^{\varepsilon t} + iH_0 e^{\varepsilon t}\varepsilon,$$

$$\overline{W} = \frac{d\delta z}{dt} = [eH'_0 + (H)_0 e^{\varepsilon t}]\,\varepsilon,$$

$$\int \frac{\partial \overline{W}}{\partial \eta} \frac{d\delta z}{dt}\, d\varepsilon = \left\{ -ieH'_0[(H)_0 - (\Pi)_1]\,e^{\varepsilon t} + \tfrac{1}{2}i(H)_0(\Pi)_1 e^{2\varepsilon t} \right\} \varepsilon$$
$$+ [e^2H'^2_0 + H_0(H)_0 - \Pi_1(H)_0 + eH'_0(H)_0 e^{\varepsilon t} + \tfrac{1}{2}(H)^2_0 e^{2\varepsilon t}]\,\varepsilon^2$$
$$+ eH'_0[(H)_0 - (\Pi)_1]\,e^{\varepsilon t} - \tfrac{1}{4}(H)_0(\Pi)_1 e^{2\varepsilon t}.$$

De plus,

$$\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n} = \tfrac{1}{2}i(\Pi)_1 e^{\varepsilon t} - \tfrac{1}{2}(H)_0 e^{\varepsilon t}\varepsilon,$$

$$2\nu = -[2eH'_0 + (H)_0 e^{\varepsilon t}]\,\varepsilon - i(\Pi)_1 e^{\varepsilon t},$$

$$2\nu\left(\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) = \Pi_1(\Pi)_1 - ieH'_0(\Pi)_1 e^{\varepsilon t}\varepsilon$$
$$+ [H_0(H)_0 + eH'_0(H)_0 e^{\varepsilon t} + \tfrac{1}{2}(H)^2_0 e^{2\varepsilon t}]\,\varepsilon^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\Pi)^2_1 e^{2\varepsilon t}.$$

Substituant ces résultats dans l'équation (81), remarquant que dans sa partie réelle le produit $\Pi_1(H)_0 = (\Pi)_1 H_0$, et négligeant la partie constante $\Pi_1(\Pi)_1$, ainsi que les constantes d'intégration, on trouve un résultat identiquement nul.

77.

Je vais m'occuper des termes qui dépendent des constantes arbitraires, combinées successivement avec les termes généraux, puis avec les termes irréguliers et ceux qui dépendent des constantes arbitraires.

Je pose

$$2\nu = 2C - (\Lambda)e^{\epsilon\iota},$$
$$X = A_j e^{(b\eta+\varphi)\iota},$$

ce qui donne

$$2X\nu = [2CA_j - (\Lambda)A_{j-1} - \Lambda A_{j+1}]\, e^{(b\eta+\varphi)\iota},$$
$$2N = -i[2CA_j - (\Lambda)A_{j-1} - \Lambda A_{j+1}]\frac{e^{(b\eta+\varphi)\iota}}{\omega},$$

d'où l'on tire

$$2\overline{N} - 2\int\frac{\overline{\partial N}}{\partial\eta}d\iota = i[4C\Sigma(\omega - l)D_{j-l} - (\Lambda)\Sigma(\omega - 1 - l)D_{j-1-l}$$
$$-\Lambda\Sigma(\omega + 1 - l)D_{j+1-l}]\frac{e^{\varphi\iota}}{\omega}.$$

On a ensuite

$$\frac{\overline{\partial W}}{\partial\eta} = i(\Lambda)e^{\epsilon\iota} + \Sigma lD_{j-l}e^{\varphi\iota},$$
$$\overline{W} = \frac{d\delta z}{dt} = e\Lambda' + (\Lambda)e^{\epsilon\iota} - i\Sigma D_{j-l}e^{\varphi\iota},$$
$$\int\frac{\overline{\partial W}}{\partial\eta}\frac{d\delta z}{dt}d\iota = e\Lambda'(\Lambda)e^{\epsilon\iota} + \tfrac{1}{2}\Lambda^2 e^{2\epsilon\iota}$$
$$-i[e\Lambda'\Sigma lD_{j-l} + (\Lambda)\Sigma(l+1)D_{j-1-l} + \Lambda\Sigma(l-1)D_{j+1-l}]\frac{e^{\varphi\iota}}{\omega},$$
$$2\nu = 2C - (\Lambda)e^{\epsilon\iota} + i\Sigma lD_{j-l}\frac{e^{\varphi\iota}}{\omega},$$
$$\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n} = -\tfrac{1}{2}(\Lambda)e^{\epsilon\iota} + i\Sigma(\omega - \tfrac{1}{2}l)D_{j-l}\frac{e^{\varphi\iota}}{\omega} + C + 2K + \frac{\Delta n}{n},$$
$$2\nu\left(\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) = i\Big\{2C\Sigma D_{j-l} + \left(2K + \frac{\Delta n}{n}\right)\frac{\Sigma lD_{j-l}}{\omega}$$
$$-[\Lambda\Sigma D'_{j+1-l} + (\Lambda)\Sigma D_{j-1-l}]\Big\}e^{\varphi\iota}$$

Substituant dans l'équation (81), il vient, en ne conservant que le terme général,

$$i\left(2C + e\Lambda' + 2K + \frac{\Delta n}{n}\right)\Sigma lD_{j-l}\frac{e^{\varphi\iota}}{\omega};$$

or, on a trouvé, (85), (86),

$$C = -\tfrac{1}{3}(4k + eK_1' + 3G_1''),$$

$$K = \tfrac{1}{3}(k + eK_1'),$$

$$\frac{\Delta n}{n} = 2(k + G_1'' - \tfrac{1}{2}e\Lambda'),$$

d'où l'on tire

$$2C + e\Lambda' + 2K + \frac{\Delta n}{n} = 0. \tag{88}$$

La substitution précédente donne donc un résultat identiquement nul.

78.

Il faut combiner actuellement les termes dépendant des constantes arbitraires avec les termes irréguliers et ceux qui dépendent de ces mêmes constantes.

Je pose

$$2\nu = 2C - (\Lambda)e^{\varepsilon i},$$

$$X = 2A_0' + (C)_0 e^{\eta i} + (A)_1 e^{\varepsilon i} + (B)_1 e^{(-\eta+\varepsilon)i} + (B)_2 e^{(-\eta+2\varepsilon)i},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} 2X\nu = {} & 4A_0'C - 2(A)_1\Lambda + 2[(B)_1 C - (\Lambda)C - \Lambda(B)_2]\,e^{(-\eta+\varepsilon)i} \\ & + [2C(C)_0 - (\Lambda)B_1]\,e^{\eta i} + [2C(B)_2 - (\Lambda)(B)_1]\,e^{(-\eta+2\varepsilon)i} \\ & + [2C(A)_1 - 2A_0'(\Lambda)]\,e^{\varepsilon i} + [2C(C)_0 - (\Lambda)B_1]\,e^{\eta i} \\ & - (B)_2(\Lambda)\,e^{(-\eta+3\varepsilon)i} - (A)_1(\Lambda)\,e^{2\varepsilon i} - (\Lambda)(C)_0\,e^{(\eta+\varepsilon)i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2N = {} & 2[2A_0'C - (A)_1\Lambda]\,\varepsilon + [2C(C)_0 - (\Lambda)B_1]\,e^{\eta i}\,\varepsilon \\ & \qquad - i[2(B)_1 C - (\Lambda)C_0 - \Lambda(B)_2]\,e^{(-\eta+\varepsilon)i} \\ & - 2i[(A)_1 C - A_0'(\Lambda)]\,e^{\varepsilon i} - \tfrac{1}{2}i[2C(B)_2 - (\Lambda)(B)_1]\,e^{(-\eta+2\varepsilon)i} \\ & + \tfrac{1}{2}i(A)_1(\Lambda)\,e^{2\varepsilon i} + i(\Lambda)(C)_0\,e^{(\eta+\varepsilon)i} + \tfrac{1}{3}i(\Lambda)(B)_2\,e^{(-\eta+3\varepsilon)i}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} 2\overline{N} - 2\int \overline{\frac{\partial N}{\partial \eta}}\,d\varepsilon = {} & 4[eH_0'C + \Lambda(\Pi)_1]\,\varepsilon + 2i[eH_0'(\Lambda) - 2(\Pi)_1 C]\,e^{\varepsilon i} \\ & - i(\Lambda)(\Pi)_1\,e^{2\varepsilon i}, \end{aligned}$$

en supprimant la constante d'intégration, qu'il faut négliger ici, comme plus haut.

On a ensuite

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}} = 2eH'_0 + i(H)_0 e^{\epsilon\iota}\varepsilon + i(\Lambda)e^{\epsilon\iota} + [(H)_0 - (\Pi)_1]e^{\epsilon\iota},$$

$$\overline{W} = \frac{d\delta z}{dt} = e\Lambda' + eH'_0\varepsilon + (H)_0 e^{\epsilon\iota}\varepsilon + (\Lambda)e^{\epsilon\iota},$$

$$\begin{aligned}\int \overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}}\frac{d\delta z}{dt}d\varepsilon = \Big\{&2e^2H'_0\Lambda' + 2\Lambda[(H)_0 - (\Pi)_1] \\ &+ [e\Lambda'(H)_0 + eH'_0(\Lambda)]e^{\epsilon\iota} + (H)_0(\Lambda)e^{\epsilon\iota}\Big\}\varepsilon \\ &+ i[e\Lambda'(\Pi)_1 - eH'_0(\Lambda)]e^{\epsilon\iota} + \tfrac{1}{2}i(\Lambda)(\Pi)_1 e^{2\epsilon\iota},\end{aligned}$$

$$\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n} = C + 2K + \frac{\Delta n}{n} - \tfrac{1}{2}[(\Lambda) - i(\Pi)_1]e^{\epsilon\iota} - \tfrac{1}{2}(H)_0 e^{\epsilon\iota}\varepsilon,$$

$$2\nu = 2C - 2eH'_0\varepsilon - (H)_0 e^{\epsilon\iota}\varepsilon - [(\Lambda) + i(\Pi)_1]e^{\epsilon\iota},$$

$$\begin{aligned}2\nu\left(\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) = \Big\{&-2eH'_0\left(C + 2K + \frac{\Delta n}{n}\right) + 2(H)_0\Lambda \\ &+ \big\{eH'_0[(\Lambda) - i(\Pi)_1] + e\Lambda'(H)_0\big\}e^{\epsilon\iota} + (H)_0(\Lambda)e^{2\epsilon\iota}\Big\}\varepsilon \\ &- i(\Pi)_1\left(2K + \frac{\Delta n}{n}\right)e^{\epsilon\iota},\end{aligned}$$

en négligeant les termes de la nature de ceux qui sont omis partout dans cette question.

La substitution de ces résultats dans l'équation (81) donne

$$2eH'_0\left(e\Lambda' + 2C + 2K + \frac{\Delta n}{n}\right)\varepsilon - i(\Pi)_1\left(e\Lambda' + 2C + 2K + \frac{\Delta n}{n}\right)e^{\epsilon\iota},$$

ce qui est identiquement nul à cause de l'équation (88).

79.

Pour terminer, il ne reste qu'à traiter le cas de la combinaison des termes dépendant des constantes arbitraires analogues.

X ne contenant pas de constante arbitraire, la quantité $\overline{N} - \int \overline{\frac{\partial N}{\partial \eta}}\, d\varepsilon$ est nulle d'elle-même. Pour les autres, on a

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}} = i(\Lambda)e^{\epsilon\iota},$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = e\Lambda' + (\Lambda)e^{\epsilon\iota},$$

$$\int \overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}}\frac{d\delta z}{dt}d\varepsilon = e\Lambda'(\Lambda)e^{\epsilon\iota} + \tfrac{1}{2}(\Lambda)^2 e^{2\epsilon\iota},$$

il vient

$$\frac{d\delta z}{dt} = e\Lambda' + \Lambda e^{\varepsilon t} + (H)_0 e^{\varepsilon t} \varepsilon + eH'_0 \varepsilon \,.$$

Telle est l'expression qui va servir dans les développements suivants.

72.

Pour éviter une trop grande complication de termes, je vais prendre d'abord les termes indépendants du facteur ε et des constantes arbitraires, et les combiner avec les termes généraux. Négligeant le second terme général qui amènerait des termes de même forme que ceux provenant du premier, il vient

$$\begin{aligned}
\nu &= -\tfrac{1}{2} i (\Pi)_1 e^{\varepsilon t} + \tfrac{1}{2} i \frac{\Sigma l D_{j-l}}{\omega} e^{\varphi t}, \\
X &= (B)_1 e^{(-\eta+\varepsilon)t} + (B)_2 e^{(-\eta+2\varepsilon)t} + \cdots \\
&\quad + 2A'_0 \quad + (A)_1 e^{\varepsilon t} + \cdots + A_j e^{(l\eta+\varphi)t} \\
&\qquad\qquad + (C)_0 e^{\gamma t}, \\
\overline{X} &= 2(A'_0 + B'_1) + [(A)_1 + (B)_2 + (C)_0] e^{\varepsilon t} + \cdots .
\end{aligned}$$

de plus

$$T = -eH'_0 + (\Pi)_1 e^{\varepsilon t},$$

et comme $2\overline{T} + X = 0$, on a les équations de condition

$$(87) \qquad \begin{cases} A'_0 + B'_1 + eH'_0 = 0, \\ (A)_1 + (B)_2 + (C)_0 + 2(\Pi)_1 = 0. \end{cases}$$

73.

En ne conservant, dans le produit $X\nu$, que les termes provenant du produit des termes particuliers par les termes généraux, on a

$$\begin{aligned}
2X\nu &= i\left[(A)_1 \frac{\Sigma l D_{j-l-1}}{\omega - 1} + 2A'_0 \frac{\Sigma l D_{j-l}}{\omega} + A_1 \frac{\Sigma l D_{j+1-l}}{\omega + 1}\right] e^{\varphi t} \\
&+ i\left[(B)_2 \frac{\Sigma l D_{j-l-1}}{\omega - 1} + (B)_1 \frac{\Sigma l D_{j-l}}{\omega} + C_0 \frac{\Sigma l D_{j+1-l}}{\omega + 1}\right] e^{(-\eta+\varphi+\varepsilon)t} \\
&+ i\left[(C)_0 \frac{\Sigma l D_{j-l-1}}{\omega - 1} + B_1 \frac{\Sigma l D_{j-l}}{\omega} + B_2 \frac{\Sigma l D_{j+1-l}}{\omega + 1}\right] e^{(\eta+\varphi-\varepsilon)t} \\
&- i\left[(\Pi)_1 A_{j-1} + \Pi_1 A_{j+1}\right] e^{(l\eta+\varphi)t},
\end{aligned}$$

$$2N = \left[\frac{(A)_1 \Sigma l D_{j-1-l}}{\omega - 1} + \frac{2A'_0 \Sigma l D_{j-l}}{\omega} + \frac{A_1 \Sigma l D_{j+1-l}}{\omega + 1}\right] \frac{e^{\varphi\iota}}{\omega}$$
$$+ \left[\frac{(B)_2 \Sigma l D_{j-1-l}}{\omega - 1} + \frac{(B)_1 \Sigma l D_{j-l}}{\omega} + \frac{C_0 \Sigma l D_{j+1-l}}{\omega + 1}\right] \frac{e^{(-\eta+\varphi+\varepsilon)\iota}}{\omega + 1}$$
$$+ \left[\frac{(C)_0 \Sigma l D_{j-1-l}}{\omega - 1} + \frac{B_1 \Sigma l D_{j-l}}{\omega} + \frac{B_2 \Sigma l D_{j+1-l}}{\omega + 1}\right] \frac{e^{(\eta+\varphi-\varepsilon)\iota}}{\omega - 1}$$
$$- [(\Pi)_1 A_{j-1} + \Pi_1 A_{j+1}] \frac{e^{(\eta+\varphi)\iota}}{\omega}.$$

De là on tire, en tenant compte des équations (87),

$$N - \int \frac{\partial N}{\partial \eta} d\iota = \left\{ \begin{array}{l} eH'_0 \dfrac{\Sigma l D_{j-l}}{\omega} - (\Pi)_1 \dfrac{\Sigma l D_{j-1-l}}{\omega - 1} - \Pi_1 \dfrac{\Sigma l D_{j+1-l}}{\omega + 1} \\ + (\Pi)_1 \Sigma(\omega - 1 - l) D_{j-1-l} + \Pi_1 \Sigma(\omega + 1 - l) D_{j+1-l} \end{array} \right\} \frac{e^{\varphi\iota}}{\omega}.$$

74.

Pour développer les autres termes, on a

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = 2eH'_0 - [\Pi_1 - (H)_0]\, e^{\varepsilon\iota} + \Sigma l D_{j-l} e^{\varphi\iota},$$
$$\frac{d\delta z}{dt} = -i\Sigma D_{j-l} e^{\varphi\iota},$$
$$\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n} = \tfrac{1}{2} i (\Pi)_1 e^{\varepsilon\iota} + \frac{i\Sigma(\omega - \frac{1}{2}l) D_{j-l}}{\omega} e^{\varphi\iota},$$
$$2\nu = -i(\Pi)_1 e^{\varepsilon\iota} + \frac{i\Sigma l D_{j-l}}{\omega} e^{\varphi\iota},$$

d'où l'on tire

$$\int \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{d\delta z}{dt} d\iota = \left\{-2eH'_0 \Sigma D_{j-l} + [(\Pi)_1 - (H)_0]\, \Sigma D_{j-1-l} + (\Pi_1 - H_0)\, \Sigma D_{j+1-l}\right\} \frac{e^{\varphi\iota}}{\omega},$$
$$2\nu\left(\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) = \left[\frac{(\Pi)_1 \Sigma(\omega - 1 - l) D_{j-1-l}}{\omega - 1} + \frac{\Pi_1 \Sigma(\omega + 1 - l) D_{j+1-l}}{\omega + 1}\right] e^{\varphi\iota}.$$

La substitution de ces diverses valeurs dans l'équation (81) donne

$$s = -\left[\frac{2H'_0 e}{\omega} \Sigma(\omega - \tfrac{1}{2}l) D_{j-l} + (H)_0 \Sigma D_{j-1-l} + H_0 \Sigma D_{j+1-l}\right] \frac{e^{\varphi\iota}}{\omega}.$$

qui facilite le calcul. Si l'on cherche, en effet, par substitution, art. 30, *Première partie,* la valeur de $R_{j,j'}$ en fonction des $A_{j,j'}$ et des $B_{j,j'}$, on trouve qu'elle ne possède qu'un seul terme renfermant le carré du petit diviseur, savoir $-\frac{3}{\omega^2}A_{j,j'}$; ce résultat fait voir que si l'on veut tenir compte seulement des termes ayant cette particularité, il suffit de prendre

$$Ma\frac{\partial\Omega}{\partial\epsilon}=-3A_{j,j'}e^{\varphi t},$$

donc, d'après la première équation de l'art. 27, *Première partie,* $M=-3$; de sorte que

$$T=-3a\frac{\partial\Omega}{\partial\epsilon}.$$

Il résulte de là, d'après l'art. 9,

$$F=-3a\frac{\partial^2\Omega}{\partial\epsilon\,\partial c'},\quad G=3a\frac{\partial\Omega}{\partial\epsilon}+3\frac{\partial.ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}}{\partial\epsilon};$$

de sorte qu'en négligeant les petites perturbations en latitude de Jupiter et de Saturne, on a

$$n\delta z=-3\iint\left[a\frac{\partial^2\Omega}{\partial\epsilon\,\partial c'}n'\delta z'-\left(\frac{\partial.ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}}{\partial\epsilon}+a\frac{\partial\Omega}{\partial\epsilon}\right)\nu'\right]d\epsilon^2$$

$$-3\iint\left[a\frac{\partial^2\Omega'}{\partial\epsilon\,\partial c''}n''\delta z''-\left(\frac{\partial.ar\frac{\partial\Omega'}{\partial r}}{\partial\epsilon}+a\frac{\partial\Omega'}{\partial\epsilon}\right)\nu''\right]d\epsilon^2,$$

Ω, Ω' représentant respectivement les fonctions perturbatrices relatives à Jupiter et à Saturne. Toutes deux donnent ici des quantités de l'ordre $m'm''$. Les termes provenant des perturbations de Saturne sont en général les plus faibles, à cause du plus grand éloignement de cette planète.

81.

Les perturbations de Jupiter et de Saturne sont développées en séries ordonnées suivant les puissances des exponentielles $e^{\epsilon' t}$, $e^{\epsilon'' t}$; dans le but que je me propose ici, il faut d'abord les mettre sous la

forme que ce travail a donnée à celles des petites planètes, c'est-à-dire éliminer g' et g'' à l'aide des relations

$$g' = N\varepsilon - Ne\sin\varepsilon + \gamma\,,$$
$$g'' = N'\varepsilon - N'e\sin\varepsilon + \gamma'\,,$$

où $\gamma' = c'' - N'c$. Alors on a, comme plus haut,

$$\begin{aligned} e^{j'g'i} = {} & I_0^{s}\,e^{(j'N\varepsilon+j'\gamma)i} - I_1^{s}\,e^{[(j'N+1)\varepsilon+j'\gamma]i} + I_2^{s}\,e^{[(j'N+2)\varepsilon+j'\gamma]i} - \cdots \\ & + I_1^{s}\,e^{[(j'N-1)\varepsilon+j'\gamma]i} + I_2^{s}\,e^{[(j'N-2)\varepsilon+j'\gamma]i} + \cdots\,, \\ e^{-j''g''i} = {} & I_0^{s'}\,e^{(j''N'\varepsilon+j''\gamma')i} + I_1^{s'}\,e^{[(j''N'+1)\varepsilon+j''\gamma']i} + I_2^{s'}\,e^{[(j''N'+2)\varepsilon+j''\gamma']i} + \cdots \\ & - I_1^{s'}\,e^{[(j''N'-1)\varepsilon+j''\gamma']i} + I_2^{s'}\,e^{[(j''N'-2)\varepsilon+j''\gamma']i} - \cdots\,, \end{aligned}$$

où $N' = \frac{n''}{n}$ et $s' = \frac{j''N'e}{2}$. Multipliant maintenant le produit de ces deux séries par $e^{j\varepsilon i}$, on obtient

$$e^{j\varepsilon i}\,.\,e^{(j'g'-j''g'')i} = \Sigma A_{j,j',j''}\,e^{[(j+j'N-j''N')\varepsilon+j'(c'-cN)-j''(c''-cN')]i}\,.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} n'\delta z' &= \beta_0\,e^{(0,k',k'')i} + \beta_1\,e^{(1,k',k'')i} + \beta_2\,e^{(2,k',k'')i} + \cdots \\ &\quad + \beta_{-1}\,e^{(-1,k',k'')i} + \beta_{-2}\,e^{(-2,k',k'')i} + \cdots\,, \\ \nu' &= \gamma_0\,e^{(0,k',k'')i} + \gamma_1\,e^{(1,k',k'')i} + \gamma_2\,e^{(2,k',k'')i} + \cdots \\ &\quad + \gamma_{-1}\,e^{(-1,k',k'')i} + \gamma_{-2}\,e^{(-2,k',k'')i} + \cdots\,, \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$(k,k',k'') = (k+k'N-k''N')\varepsilon + k'(c'-cN) - k''(c''-cN')\,.$$

Des valeurs déjà développées pour $a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$ et $ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$ on déduit

$$a\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon\,\partial c'} = E_j\,e^{(j,j')i}\,,\qquad \frac{\partial.ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}}{\partial\varepsilon} + a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} = F_j\,e^{(j,j')i}\,,$$

par suite,

$$a\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon\,\partial c'}\,n'\delta z' = (\beta_0E_j+\beta_1E_{j-1}+\beta_{-1}E_{j+1}+\beta_2E_{j-2}+\beta_{-2}E_{j+2}+\cdots)\,e^{(j,j'+k',k'')i}\,,$$

$$\frac{\partial.ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}}{\partial\varepsilon} + a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} = (\gamma_0F_j+\gamma_1F_{j-1}+\gamma_{-1}F_{j+1}+\gamma_2F_{j-2}+\gamma_{-2}F_{j+2}+\cdots)\,e^{(j,j'+k',k'')i}\,;$$

alors, en ne tenant compte que des perturbations de Jupiter, il vient

$$n\delta z = -3\iint(\beta_0E_j-\gamma_0F_j+\beta_1E_{j-1}-\gamma_1F_{j-1}+\beta_{-1}E_{j+1}-\gamma_{-1}F_{j+1}+\cdots)\,e^{(j,j'+k',k'')i}\,d\varepsilon^2,$$

et, par une double intégration,

$$n\delta z = -\frac{3}{[j+(j'+k')N-k''N']^2}(\beta_0 E_j - \gamma_0 F_j + \beta_1 E_{j-1} - \gamma_1 F_{j-1}$$
$$+\beta_{-1}E_{j+1} - \gamma_{-1}F_{j+1} + \cdots)\,e^{(j,j'+k',k''),i}.$$

Pour des valeurs j'_1 et k'_1, telles que $j'_1+k'_1=j'+k'$, j et k'' ne changeant pas, on a, dans la même inégalité, des termes tout pareils au précédent.

Les perturbations de Saturne donnent aussi des expressions semblables aux précédentes; seulement il faut alors donner à l'argument de l'inégalité à longue période la forme $j+k'N-(j''+k'')N'$, parce que les arguments des perturbations que la planète troublée éprouve de la part de Saturne sont de la forme $(j-j''N')\varepsilon - j''(c'-cN')$. Dans les divers termes des perturbations de Saturne que l'on doit employer ici, k' reste invariable, tandis que k'' prend diverses valeurs, telles qu'on ait toujours

$$j''_1+k''_1=j''+k''.$$

Dans le cas où ces perturbations de Jupiter et de Saturne sont sensibles, il n'y a qu'un petit nombre de termes qui puissent donner un résultat appréciable; le calcul est donc facile à exécuter.

82.

Pour trouver les arguments à longue période, il faut former les valeurs de $j'N \pm j''N'$ correspondantes aux valeurs 0, 1, 2, ... de j', prises successivement avec les valeurs 0, 1, 2, ... de j''; alors, désignant par l un nombre entier, l'argument de la longue période a pour multiplicateur de ε

$$l - j'N \mp j''N'.$$

La valeur numérique de n, qui sert de base à ces calculs, ayant une grande influence sur les valeurs numériques des arguments à obtenir, il ne faut entreprendre ces calculs qu'après avoir déterminé exactement le vrai moyen mouvement.

L'expression établie plus haut,

$$j+(j'+k')N-k''N',$$

n'exclut pas la valeur $j=0$; mais pour cette valeur l'inégalité correspondante est nulle.

En effet, supposons que l'expression de $n\delta z$, art. 81, soit développée suivant les puissances de e^{gi}, $e^{g'i}$, la première partie pourra s'écrire

$$n\delta z = -3n^2\iint\left[a\frac{\partial\Omega}{\partial g\,\partial g'}n'\delta z' - \left(\frac{\partial.ar\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}}{\partial g} + a\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right)\nu'\right]dg^2,$$

et la seconde prendra une forme analogue. Or, $n'\delta z'$ et ν' ne contenant pas g, il ne peut y avoir, dans les dérivées qui se trouvent ici, que les termes indépendants de g qui soient susceptibles d'exercer une influence sur l'inégalité dans laquelle $j = 0$. Soit donc

$$a\Omega = Be^{j'g'i}$$

l'un de ces termes; on a par rapport à lui

$$a\frac{\partial\Omega}{\partial g} = 0\,;$$

par suite, l'inégalité en question est nulle.

La manière la plus simple de tenir compte de l'influence de la grande inégalité à longue période de Jupiter et de Saturne sur la planète troublée, consiste à ajouter chaque fois sa valeur, dans toutes les inégalités, aux longitudes des époques c' et c''. Toutefois, s'il se trouvait dans le mouvement de la planète une inégalité dont la période fût presque la même que celle de la grande inégalité de Jupiter, il ne faudrait pas agir de la sorte. En effet, si le coefficient de ε dans cette inégalité est désigné par $l - l'N$, il en résulte deux inégalités à longue période dont les arguments ont comme coefficients de ε

$$l-(l'-2)N-5N',$$
$$l-(l'+2)N+5N',$$

et que l'on calculera comme il a été expliqué plus haut.

83.

Pour calculer la partie des constantes arbitraires qui dépend du carré de la force perturbatrice, il faut d'abord obtenir les valeurs de $(n\delta z)_0$, $(\nu)_0$, $\left(\frac{u}{\cos i}\right)_0$, $\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0$, $\left(\frac{du}{\cos i\, d\varepsilon}\right)_0$, $\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0$ correspondantes à

ce carré. Les trois premières s'obtiennent immédiatement par la substitution des valeurs des arguments pour l'époque adoptée et en faisant $t=0$ en dehors des exponentielles. La quatrième et la cinquième se déduisent de la seconde et de la troisième, en multipliant les coefficients par les diviseurs d'intégration et changeant ensuite $A'+iA'$ en $A'-iA'$. La quantité $\left(\frac{d\delta z}{d\epsilon}\right)_0$ se déduira de la même façon de $(n\delta z)_0$, et on a

$$\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 = n\left(\frac{d\delta z}{d\epsilon}\right)_0 \frac{a_0}{r_0}.$$

Si les variations séculaires sont sensibles, il faut y avoir égard dans les dérivées. Désignant par $(k, -k'N)$ l'argument correspondant à ce cas, on a

$$n\delta z \text{ ou } \delta\nu \text{ ou } \delta u = A e^{(k,-k'N)\epsilon} + ntB e^{(k,-k'N)\epsilon},$$

d'où l'on tire avec une suffisante exactitude

$$\frac{nd\delta z}{d\epsilon} \text{ ou } \frac{d\delta\nu}{d\epsilon} \text{ ou } \frac{d\delta u}{d\epsilon} = [i(k,-k'N)A + B]\, e^{(k,-k'N)\epsilon} + i(k,-k'N)Bnt\, e^{(k,-k'N)\epsilon};$$

on en conclura les quantités affectées de l'indice 0, en négligeant les termes multipliés par nt.

Ces quantités devront être d'abord calculées avec la valeur ϵ_0 de la première approximation; il faudra ensuite faire la correction dépendant de la différence entre la valeur de c et cette valeur corrigée. La somme de ces deux parties donnera la valeur totale de celle qui dépend du carré de la force perturbatrice.

Ajoutant enfin les perturbations du second ordre à celles de la première approximation, on forme le tableau des valeurs complètes de $n\delta z$, ν, $\frac{u}{\cos i}$, auxquelles il faudra joindre celui des valeurs de Γ et de $\delta_1 u$. Il est bien entendu qu'il faut tenir compte des perturbations exercées par toutes les planètes dont l'action est sensible.

TROISIÈME PARTIE.

—

§ I.

Transformation des éléments elliptiques.

1.

Soient, comme précédemment, a_0, n_0, e_0, ... les éléments osculateurs correspondants à l'époque $t=0$, et a_1, n_1, e_1, ... les éléments osculateurs correspondants à l'époque t_1 : les autres quantités relatives à cette époque seront désignées par l'indice 1. Après avoir substitué, dans $n_0 z$, ν, i, θ, σ, les valeurs de ε et c' correspondantes à t_1, on obtiendra les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
(n_0 z)_1 &= \bar{\varepsilon} - e_0 \sin\bar{\varepsilon}\,, \\
\bar{r}\cos\bar{w} &= a_0(\cos\bar{\varepsilon} - e_0)\,, \\
\bar{r}\sin\bar{w} &= a_0 f_0 \sin\bar{\varepsilon}\,, \\
v &= \bar{w} + \varpi_0\,, \\
r &= \bar{r}(1+\nu)\,, \\
a_0^3 n_0^2 &= \mu\,, \\
\cos b_1 \sin(l_1 - \theta_1) &= \cos i_1 \sin(v - \sigma_1)\,, \\
\cos b_1 \cos(l_1 - \theta_1) &= \cos(v - \sigma_1)\,, \\
\sin b_1 &= \sin i_1 \sin(v - \sigma_1)\,.
\end{aligned}\right.$$

Dans ce qui précède, on a calculé les expressions de u, $\frac{du}{d\varepsilon}$, Γ, au lieu de i, θ, σ; mais comme on peut toujours passer des premières à cellès-ci, on peut les considérer comme données. Le problème qu'on se propose est rendu plus simple par cette considération.

On a aussi, en tenant compte de la remarque de l'art. 6, *Première partie,* relative à la valeur initiale de σ,

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
n_1 t_1 + c_1 &= \varepsilon - e_1 \sin\varepsilon, \\
r\cos w &= a_1(\cos\varepsilon - e_1), \\
r\sin w &= a_1 f_1 \sin\varepsilon, \\
v_1 &= w + \varpi_1, \\
a_1^3 n_1^2 &= \mu, \\
\cos b_1 \sin(l_1 - \theta_1) &= \cos i_1 \sin(v_1 - \theta_1), \\
\cos b_1 \cos(l_1 - \theta_1) &= \cos(v_1 - \theta_1), \\
\sin b_1 &= \sin i_1 \sin(v_1 - \theta_1).
\end{aligned}
\right.
$$

Pour identifier les trois dernières équations de ce système avec les trois dernières du précédent, il faut que l'on ait la relation

$$v_1 - \theta_1 = v - \sigma_1,$$

qui devient facilement

$$w + \varpi_1 - \theta_1 = \overline{w} + \varpi_0 - \sigma_1.$$

Or, en désignant par χ_1 l'angle que fait, à l'instant t_1, l'axe des X positives avec le rayon vecteur du périhélie, on a, comme à l'art. 13, *Première partie,*

$$w - \overline{w} + \varpi_0 = -\chi_1,$$

par suite, l'équation précédente devient

$$(3)\qquad \chi_1 - \sigma_1 = \varpi_1 - \theta_1.$$

Comme r et v sont des coordonnées idéales, on tire des équations (1)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a_0^2 f_0}{\overline{r}^2} \frac{d(n_0 z)_1}{dt},$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a_0 e_0}{f_0} \sin\overline{w} . \frac{d(n_0 z)_1}{dt}(1 + \nu_1) + \overline{r}\frac{d\nu_1}{dt},$$

et des équations (2)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a_1^2 n_1 f_1}{r^2},$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a_1 n_1 e_1 \sin w}{f_1};$$

de là résultent les équations

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{a_1^2 n_1 f_1}{r^2} = \dfrac{a_0^2 f_0^2}{\bar{r}^2} \dfrac{d(n_0 z)_1}{dt}, \\ \dfrac{a_1 n_1}{f_1} \sin w = \dfrac{a_0 e_0}{f_0} \sin \bar{w} . \dfrac{d(n_0 z)_1}{dt} (1+\nu_1) + \bar{r} \dfrac{d\nu_1}{dt}; \end{cases}$$

la première devient

$$(5)\quad h_1 = \frac{h_0}{\dfrac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}(1+\nu_1)^2},$$

en se souvenant que

$$(6)\quad h_0 = \frac{a_0 n_0}{f_0}, \quad h_1 = \frac{a_1 n_1}{f_1}, \quad a_0^3 n_0^2 = a_1^3 n_1^2 = \mu, \quad r = \bar{r}(1+\nu_1).$$

Éliminant $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{\bar{r}}$ des équations (4), à l'aide des équations

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e_1 \cos w}{a_1 f_1^2}, \quad \frac{1}{\bar{r}} = \frac{1+e_0 \cos \bar{w}}{a_0 f_0^2},$$

et h_1 par l'équation (5), il vient

$$1 + e_1 \cos w = (1 + e_0 \cos \bar{w}) \left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right)^2 (1+\nu_1)^2,$$

$$e_1 \sin w = e_0 \sin \bar{w} \left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right)^2 (1+\nu_1)^2 + \frac{\bar{r}}{h_0} \frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} \frac{d\nu_1}{dt} (1+\nu_1)^2.$$

Si, pour simplifier l'écriture, on pose

$$\alpha = \left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right)^2 (1+\nu_1)^2 - 1, \quad \beta = \frac{\bar{r}}{h_0} \frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} \frac{d\nu_1}{dt} (1+\nu_1)^2,$$

les équations précédentes deviennent

$$e_1 \cos w = e_0 \cos \bar{w} + \alpha(1 + e_0 \cos \bar{w}),$$
$$e_1 \sin w = e_0 \sin \bar{w} + \alpha e_0 \sin \bar{w} + \beta,$$

où α et β sont des quantités de l'ordre de la force perturbatrice. Or, les équations

$$v = \bar{w} + \varpi_0, \quad v = w + \chi$$

donnent

$$\chi_1 - \varpi_0 = \bar{w} - w;$$

alors on peut mettre les équations précédentes sous la forme

$$(7)\qquad \begin{cases} e_1\sin(\chi_1-\varpi_0)=\alpha\sin\bar{w}-\beta\cos\bar{w}\,,\\ e_1\cos(\chi_1-\varpi_0)=e_0+\alpha(\cos\bar{w}+e_0)+\beta\sin\bar{w}\,.\end{cases}$$

De là on déduira les valeurs exactes de e_1, χ_1.

2.

Éliminant a_1 et a_0 des trois premières équations (6), il vient

$$(8)\qquad n_1=n_0\left(\frac{h_1f_1}{h_0f_0}\right)^3,$$

et, si l'on élimine n_1, n_0 entre les mêmes équations, on a

$$(9)\qquad a_1=a_0\left(\frac{h_0f_0}{h_1f_1}\right)^2.$$

Posant maintenant, pour abréger,

$$\eta=\alpha\sin\bar{w}-\beta\cos\bar{w}\,,$$
$$\xi=\alpha(\cos\bar{w}+e_0)+\beta\sin\bar{w}\,,$$

on tire des équations (7)

$$f_1^2=f_0^2\left(1-\frac{2e_0\xi}{f_0^2}-\frac{\eta^2+\xi^2}{f_0^2}\right).$$

Alors les équations (8) et (9) donnent

$$(10)\qquad n_1=n_0\frac{\left(1-\frac{2e_0\xi}{f_0^2}-\frac{\eta^2+\xi^2}{f_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left[\frac{d(n_0z)_1}{n_0dt}\right]^3(1+\nu_1)^2},$$

$$(11)\qquad a_1=a_0\frac{\left[\frac{d(n_0z)_1}{n_0dt}\right]^2(1+\nu_1)^4}{1-\frac{2e_0\xi}{f_0^2}-\frac{\eta^2+\xi^2}{f_0^2}}.$$

Il suffit de calculer, à l'aide de l'une de ces expressions, soit a_1, soit n_1, car on a

$$a_1=\left(\frac{\mu}{n_1^2}\right)^{\frac{1}{3}},\qquad n_1=\left(\frac{\mu}{a_1^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.

Après avoir calculé χ_1 par le système (7), on a

$$w = \bar{w} - \chi_1 + \varpi_0,$$

et ensuite

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{f_1 \sin w}{\cos w + e_1},$$

puis enfin

$$c_1 = \varepsilon - e_1 \sin \varepsilon.$$

4.

Si l'on rapporte u, p, q au temps t_1, on peut poser, d'après l'art. 18, *Première partie,*

$$u_1 = \frac{\bar{r}}{a_0} q_1 \sin(\bar{w} + \varpi_0 - \theta_0) - \frac{\bar{r}}{a_0} p_1 \cos(\bar{w} + \varpi_0 - \theta_0),$$

d'où l'on tire, comme à l'art. 4, *Deuxième partie,* et en observant que $\frac{d\bar{\varepsilon}}{dz} = \frac{a_0 n_0}{\bar{r}}$,

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} = {} & \frac{h_0}{a_0} q_1 [\cos(\bar{w} + \varpi_0 - \theta_0) + e_0 \cos(\varpi_0 - \theta)] \frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} \\ & + \frac{h_0}{a_0} p_1 [\sin(\bar{w} + \varpi_0 - \theta_1) + e_0 \sin(\varpi_0 - \theta_0)] \frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}. \end{aligned}$$

Ces deux équations donnent

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} p_1 = {} & - \frac{u_1}{f_0^2} [\cos(\bar{w} + \varpi_0 - \theta_0) + e_0 \cos(\varpi_0 - \theta_0)] \\ & + \frac{\bar{r} \frac{du_1}{dt}}{\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} h_0 f_0^2} \sin(\bar{w} + \varpi_0 - \theta_0), \\ q_1 = {} & \frac{u_1}{f_0^2} [\sin(\bar{w} + \varpi_0 - \theta_0) + e_0 \sin(\varpi_0 - \theta_0)] \\ & + \frac{\bar{r} \frac{du_1}{dt}}{\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} h_0 f_0^2} \cos(\bar{w} + \varpi_0 - \theta_0). \end{aligned} \right.$$

On a d'ailleurs, art. 8, *Première partie,*

$$\sin i_1 \sin(\sigma_1 - \theta_0) = p_1,$$
$$\sin i_1 \cos(\sigma_1 - \theta_0) = \sin i_0 + q_1;$$

de sorte qu'en posant

$$(13)\qquad \begin{cases} \lambda \sin l = \sin \overline{w}, \\ \lambda \cos l = \cos \overline{w} + e_0, \end{cases}$$

les équations (12) deviennent

$$(14)\qquad \begin{cases} \sin i_1 \sin(\sigma_1 - \theta_0) = -\dfrac{u_1}{f_0^2}\lambda \cos(l + \varpi_0 - \theta_0) \\ \qquad + \dfrac{\bar{r}\dfrac{du_1}{dt}}{\dfrac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} h_0 f_0^2} \sin(\overline{w} + \varpi_0 - \theta_0), \\ \sin i_1 \cos(\sigma_1 - \theta_0) = \sin i_0 + \dfrac{u_1}{f_0^2}\lambda \sin(l + \varpi_0 - \theta_0) \\ \qquad + \dfrac{\bar{r}\dfrac{du_1}{dt}}{\dfrac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} h_0 f_0^2}. \end{cases}$$

Ce système donne les valeurs de i_1 et de σ_1. Les deux dernières équations de l'art. 7, *Première partie,* donnent ici

$$(15)\qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_0 - \Gamma) = \frac{\cos\frac{1}{2}(i_1 - i_0)}{\cos\frac{1}{2}(i_1 + i_0)} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \theta_0),$$

équation qui détermine θ_1. Enfin l'équation (3) donne

$$(16)\qquad \varpi_1 = \chi_1 - \sigma_1 + \theta_1.$$

Le problème est ainsi complètement et rigoureusement résolu.

5.

Pour obtenir une solution approchée aux quantités près de l'ordre du carré de la force perturbatrice, on tire des équations (7)

$$\eta = e_1 \sin(\chi_1 - \varpi_0),$$
$$\xi = -e_0 + e_1 \cos(\chi_1 - \varpi_0),$$

par suite

$$\operatorname{tang}(\chi_1 - \varpi_0) = \frac{\eta}{e_0 + \xi},$$

d'où

$$\sin(\chi_1 - \varpi_0) = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (e_0 + \xi)^2}},$$

$$(17) \qquad e_1 = e_0 + \xi + \frac{\eta}{2e_0}.$$

De même

$$\chi_1 - \varpi_0 = \arcsin \frac{\eta}{e_1},$$

et, par suite,

$$(18) \qquad \chi_1 = \varpi_0 + \rho \frac{\eta}{e_0} - \frac{\rho\eta\xi}{e_0^2},$$

où $\rho = 206265''$.

On a aussi, avec la même exactitude,

$$(19) \qquad \frac{f_1}{f_0} = 1 - \frac{e_0}{f_0^2}\xi - \frac{\eta^2}{2f_0^2} - \frac{\xi^2}{2f_0^4}.$$

6.

De la relation

$$\frac{a_1}{a_0} = \left(\frac{h_0 f_0}{h_1 f_1}\right)^2,$$

on tire

$$\frac{a_1}{a_0} = \left[1 + \frac{(h_1 - h_0) f_0 + h_1(f_1 - f_0)}{h_0 f_0}\right]^{-2},$$

et, en négligeant les termes d'ordres supérieurs au second,

$$(20) \quad \frac{a_1}{a_0} = 1 - 2\left(\frac{h_1 - h_0}{h_0} - \frac{h_1}{h_0}\frac{f_1 - f_0}{f_0}\right) + 3\left(\frac{h_1 - h_0}{h_0} + \frac{h_1}{h_0}\frac{f_1 - f_0}{f_0}\right)^2.$$

De même, de la relation

$$\frac{n_1}{n_0} = \left(\frac{h_0 f_0}{h_1 f_1}\right)^3,$$

on tire

$$(21) \quad \frac{n_1}{n_0} = 1 - 3\left(\frac{h_1 - h_0}{h_0} - \frac{h_1}{h_0}\frac{f_1 - f_0}{f_0}\right) + 6\left(\frac{h_1 - h_0}{h_0} + \frac{h_1}{h_0}\frac{f_1 - f_0}{f_0}\right)^2.$$

$f_1 - f_0$ est donné par l'équation (19), et $h_1 - h_0$ par l'équation (5), qui peut s'écrire

$$\frac{h_1 - h_0}{h_0} = -1 + \frac{1}{(1+\nu_1)^2 \frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}}.$$

7.

Pour avoir une valeur approchée de c_1, je différentie logarithmiquement l'équation

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \varepsilon,$$

ce qui donne

$$\frac{dw}{\sin w} = \frac{de}{f^2} + \frac{d\varepsilon}{\sin \varepsilon},$$

par suite,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial w} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin w} = \frac{r}{af}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial e} = -\frac{\sin \varepsilon}{f^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial w^2} = \frac{er \sin \varepsilon}{af^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial w \partial e} = -\frac{r \cos \varepsilon}{af^3}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial e^2} = \frac{\cos \varepsilon - 2e}{f^4} \sin \varepsilon.$$

Or,

$$\delta \bar{\varepsilon} = \varepsilon - \bar{\varepsilon} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{w}} \delta \bar{w} + \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial e_0} \delta e_0 + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \bar{w}^2} \delta \bar{w}^2 + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \bar{w} \partial e_0} \delta \bar{w} \delta e_0 + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial e_0^2} \delta e_0^2$$

et, par la substitution des valeurs précédentes des dérivées,

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} - \rho \xi \frac{\sin \bar{\varepsilon}}{f_0^2} - \rho \eta \frac{1 - e_0 \cos \bar{\varepsilon}}{e_0 f_0} + \rho \xi^2 \frac{\sin \bar{\varepsilon} (\cos \bar{\varepsilon} - 2e_0)}{2 f_0^4} - \rho \eta^2 \frac{\sin 2\bar{\varepsilon}}{4 f_0^2}$$
$$+ \rho \eta \xi \frac{(1 - e_0 \cos \bar{\varepsilon})(f_0^2 + e_0 \cos \bar{\varepsilon})}{e_0^2 f_0^3},$$

et, comme $\bar{\varepsilon}$ est donné par

$$(n_0 z)_1 = \bar{\varepsilon} - \rho e_0 \sin \bar{\varepsilon},$$

on peut tirer la valeur de ε de l'équation précédente.

On a ensuite

$$c_1 = \varepsilon - \rho e_1 \sin \varepsilon.$$

Les formules rigoureuses ne donnent guère plus de travail; on a en effet

$$w = \bar{w} + \varpi_0 - \chi_1,$$

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{f_1 \sin w}{\cos w + e_1},$$

$$c_1 = \varepsilon - \rho e_1 \sin \varepsilon.$$

8.

Pour calculer les éléments dont dépend la position de l'orbite, on tire des équations (12) et (13), et en remarquant que

$$\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} = 1 + \frac{d\delta z_1}{dt},$$

$$p_1 = -\frac{u_1 \lambda}{f_0^2} \cos(l + \varpi_0 - \theta_0) + \frac{\frac{du_1}{dt}}{f_0\left(1 + \frac{d\delta z_1}{dt}\right)} \sin(w + \varpi_0 - \theta_0),$$

$$q_1 = \frac{u_1 \lambda}{f_0^2} \sin(l + \varpi_0 - \theta_0) + \frac{\frac{du_1}{dt}}{f_0\left(1 + \frac{d\delta z_1}{dt}\right)} \cos(\bar{w} + \varpi_0 - \theta_0),$$

et comme

$$\left(1 + \frac{d\delta z_1}{dt}\right)^{-1} = 1 - \frac{d\delta z_1}{dt},$$

ces équations deviennent

$$p_1 = -\frac{u_1 \lambda}{f_0^2} \cos(l + \varpi_0 - \theta_0) + \frac{\frac{du_1}{dt} - \frac{du_1}{dt}\frac{d\delta z_1}{dt}}{f_0} \sin(\bar{w} + \varpi_0 - \theta_0),$$

$$q_1 = \frac{u_1 \lambda}{f_0^2} \sin(l + \varpi_0 - \theta_0) + \frac{\frac{du_1}{dt} - \frac{du_1}{dt}\frac{d\delta z_1}{dt}}{f_0} \cos(\bar{w} + \varpi_0 - \theta_0).$$

De plus, des équations

$$\sin i_1 \sin(\sigma_1 - \theta_0) = p_1,$$

$$\sin i_1 \cos(\sigma_1 - \theta_0) = \sin i_0 + q_1,$$

on tire

$$i_1 = i_0 + \rho \frac{q_1}{\cos i_0} + \rho \frac{p_1^2}{\sin 2i_0} + \rho \frac{q_1^2 \sin i_0}{2\cos^2 i_0},$$

$$\sigma_1 = \theta_0 + \rho \frac{p_1}{\sin i_0} - \rho \frac{p_1 q_1}{\sin^2 i_0}.$$

Le développement de l'équation (15) donne

$$\theta_1 = \theta_0 + \Gamma_1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\cos i_0} + \frac{\sin i_0}{2\cos^2 i_0}(\sigma_1 - \sigma_0)(i_1 - i_0),$$

ou bien, en éliminant σ_1 et i_1,

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{2\rho p_1}{\sin 2i_0} + \frac{2\rho p_1 q_1 (3\sin^2 i_0 - 2)}{\cos i_0 \sin^2 2i_0} + \Gamma_1.$$

De l'équation $\varpi_1 = \chi_1 - \sigma_1 + \theta_1$, on tire maintenant

$$\varpi_1 = \chi_1 + \rho \frac{p_1}{\cos i_0} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} i_0 + \rho p_1 q_1 \frac{(1 + 2\cos i_0) \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} i_0}{2\cos^2 i_0} + \Gamma_1,$$

ce qui achève la détermination de tous les éléments.

9.

On peut calculer aisément $\frac{d\delta z_1}{dt}$ de la manière suivante. Soit (n) la valeur moyenne du moyen mouvement, c la longitude moyenne de l'époque; on a

$$n_0 z_1 = (n)t + c + n_0 \delta z,$$

où $n_0 \delta z$ est une fonction explicite de ε_0 : on tire de là successivement

$$\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} = \frac{(n)}{n_0} + \frac{d(n_0 \delta z)_1}{d\varepsilon_0} \frac{d\varepsilon_0}{dt},$$

$$\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} - 1 = \frac{(n) - n_0}{n_0} + \frac{(n)}{n_0} \frac{d(n_0 \delta z)_1}{d\varepsilon_0} \frac{1}{1 - e_0 \cos \varepsilon_0},$$

et comme

$$\frac{d\delta z_1}{dt} = \frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} - 1,$$

il vient finalement

$$\frac{d\delta z_1}{dt} = \frac{(n) - n_0}{n_0} + \frac{(n)}{n_0} \frac{d(n_0 \delta z)_1}{d\varepsilon_0} \frac{1}{1 - e \cos \varepsilon_0}.$$

§ II.

Développement des expressions des corrections à faire aux coefficients de perturbations, et qui résultent de la correction des éléments osculateurs pris pour base du calcul.

10.

Les corrections des éléments osculateurs étant des quantités du premier ordre, il suffira de corriger seulement les coefficients du premier ordre, parce que les corrections des coefficients du second ordre ne pourraient être que du troisième et qu'on peut les considérer comme insensibles.

Soient, comme à l'art. 28, *Première partie,* et supprimant les indices 0, qui sont inutiles ici,

$$T=\frac{\partial W}{\partial \epsilon}, \qquad U=\frac{\partial R}{\partial \epsilon},$$

et, de plus,

$$\Lambda=\frac{\rho}{a}\,T,$$

où $\rho=a(1-e\cos\eta)$; il en résulte

$$n\delta z=\int d\epsilon\,\overline{\int \Lambda\, d\epsilon}\,,$$

$$\nu=-\tfrac{1}{2}\int\frac{\partial \overline{\int T d\epsilon}}{\partial \eta}\,d\epsilon,$$

$$\frac{u}{\cos i}=\overline{\int U d\epsilon}\,.$$

Désignant maintenant par Δ la variation d'une fonction lorsqu'on substitue les valeurs corrigées à celles qu'on a d'abord employées, il vient

$$\Delta n\delta z=\int d\epsilon\,\overline{\int \Delta\Lambda\, d\epsilon}\,,$$

$$\Delta\nu=-\tfrac{1}{2}\int\frac{\partial \overline{\int \Delta T d\epsilon}}{\partial \eta}\,d\epsilon,$$

$$\frac{\Delta u}{\cos i}=\overline{\int \Delta U d\epsilon}\,.$$

D'après l'équation (58), *Première partie*, on a

$$\Lambda = \frac{1}{af}\left\{2\rho^2\cos(w-\omega) - \rho r + \frac{2\rho^2 r}{af^2}[\cos(w-\omega)-1]\right\}\frac{\partial\Omega}{\partial w}$$
$$+ \frac{2}{af}\rho^2\sin(w-\omega) . r\frac{\partial\Omega}{\partial r}:$$

de plus,

$$U = \frac{\rho r^2}{af}\sin(\omega - w).\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\cos i.$$

On peut considérer v et r comme des fonctions de ε et de ν, et $\omega + \chi$ et ρ comme des fonctions de η et de β; alors en posant, comme à l'art. 13, *Deuxième partie*, $\lambda = \frac{1}{2}\frac{n'}{n}e$, on pourra considérer Λ comme fonction de $\lambda, \eta, \beta, \varepsilon, \nu, a, e, u, u_1$, la variation par rapport à Π et Π' pouvant être changée en une variation par rapport à u, u_1, u'; et comme les éléments de la planète troublante ne subissent aucun changement dans les circonstances actuelles, il faut supprimer le terme en u'. On a donc

$$\Delta\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial\Lambda}{\partial\eta}\Delta\eta + \frac{\partial\Lambda}{\partial\beta}\Delta\beta + \frac{\partial\Lambda}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon + \frac{\partial\Lambda}{\partial\nu}\Delta\nu$$
$$+ \frac{\partial\Lambda}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial\Lambda}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial\Lambda}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\Lambda}{\partial u_1}\Delta u_1,$$

où

$$\Delta\lambda = \frac{1}{2}\frac{n'}{n}\left(\Delta e - \frac{\Delta n}{n}\right);$$

la variation de c n'entre pas explicitement, mais elle est contenue dans celle de ε. On trouve aisément

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda} = \frac{\rho}{a}\frac{\partial T}{\partial\lambda}, \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial\nu} = r\frac{\partial\Lambda}{\partial r},$$
$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\beta} = \rho\frac{\partial\Lambda}{\partial\rho}, \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial\varepsilon} = \frac{\rho}{a}\frac{\partial T}{\partial\varepsilon},$$
$$\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial\rho} = \frac{\rho}{a}(2T + \bar{T}),$$
$$r\frac{\partial\Lambda}{\partial r} = \frac{\rho}{a}(T + V + X),$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial f} = -\frac{\rho}{af}(3T+2X+2\bar{T}), \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial e} = \frac{e}{f^2}\frac{\rho}{a}(3T+2X+2\bar{T}),$$

$$\cos i \frac{\partial \Lambda}{\partial u} = \frac{\rho}{a} D, \quad \cos i \frac{\partial \Lambda}{\partial u_1} = \frac{\rho}{a} E,$$

de telle sorte qu'on a finalement

$$\Delta\Lambda = \frac{\rho}{a}\Big[\frac{\partial T}{\partial \lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial T}{\partial \epsilon}\Delta\epsilon + (T+V+X)\Delta\nu + \frac{e}{f^2}(3T+2X+2\bar{T})\Delta e$$
$$-(2T+X+\bar{T})\frac{\Delta a}{a} + D\frac{\Delta u}{\cos i} + E\frac{\Delta u_1}{\cos i} + (2T+\bar{T})\Delta\beta\Big] + \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta}\Delta\eta,$$

résultat susceptible d'importantes réductions.

11.

Soient encore les équations

$$(22) \qquad \begin{cases} \bar{r} = a(1 - e\cos\epsilon), \\ \bar{r}\sin w = af\sin\epsilon, \\ \bar{r}\cos w = a(\cos\epsilon - e), \\ v = w + \chi, \\ r = \bar{r}(1+\nu). \end{cases}$$

Les variations de v et de r, provenant des changements des éléments osculateurs, peuvent s'obtenir soit en faisant a, e, χ variables et laissant ϵ et ν invariables, soit au contraire en faisant varier ϵ et ν, les éléments a, e, χ restant invariables ; c'est ainsi qu'on a successivement

$$\log r = \log\bar{r} + \log(1+\nu),$$

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta\bar{r}}{\bar{r}},$$

mais

$$\Delta\bar{r} = \frac{\bar{r}}{a}\Delta a - a\cos\epsilon\Delta e,$$

d'où

$$\frac{\Delta\bar{r}}{\bar{r}} = \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{a}{\bar{r}}\cos\epsilon\Delta e.$$

La seconde et la troisième des équations (22) donnent

$$\Delta w = \frac{a \sin \varepsilon}{\bar{r}} \frac{\Delta e}{f},$$

et, par suite,

$$\Delta v = \Delta \chi + \frac{a}{\bar{r}} \sin \varepsilon \frac{\Delta e}{f}.$$

Considérant maintenant ε et ν comme variables, on a, par les mêmes équations,

$$\Delta w = \frac{a}{\bar{r}} f \Delta \varepsilon,$$

et, puisque χ est constant,

$$\Delta v = \frac{a}{\bar{r}} f \Delta \varepsilon.$$

De même

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta \bar{r}}{\bar{r}} + \frac{\Delta \nu}{1+\nu};$$

mais

$$\log \bar{r} = \log a + \log (1 - e \cos \varepsilon),$$

par suite

$$\frac{\Delta \bar{r}}{\bar{r}} = \frac{a e \sin \varepsilon \Delta \varepsilon}{\bar{r}},$$

d'où

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta \nu}{1+\nu} + \frac{a e \sin \varepsilon}{\bar{r}} \Delta \varepsilon. \tag{23}$$

Égalant maintenant ces deux valeurs de Δv, puis celles de Δr, et négligeant le diviseur $1 + \nu$ qui introduirait des quantités du second ordre, il vient

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \varepsilon &= \frac{\sin \varepsilon}{f^2} \Delta e + \frac{1 - e \cos \varepsilon}{f} \Delta \chi, \\ \Delta \nu &= \frac{\Delta a}{a} - \frac{e \sin \varepsilon}{f} \Delta \chi - \frac{e + \cos \varepsilon}{f^2} \Delta e. \end{aligned} \right. \tag{24}$$

On aura de même

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \eta &= \frac{\sin \eta}{f^2} \Delta e + \frac{1 - e \cos \eta}{f} \Delta \chi, \\ \Delta \beta &= \frac{\Delta a}{a} - \frac{e \sin \eta}{f} \Delta \chi - \frac{e + \cos \eta}{f^2} \Delta e. \end{aligned} \right. \tag{25}$$

Des expressions

$$p = \sin i \sin(\sigma - \theta_0),$$
$$q = \sin i \cos(\sigma - \theta_0) - \sin i_0,$$

on tire

$$\Delta p = \cos i \sin(\sigma - \theta_0) \Delta i + \cos(\sigma - \theta_0) \sin i \Delta \sigma,$$
$$\Delta q = \cos i \cos(\sigma - \theta_0) \Delta i - \sin(\sigma - \theta_0) \sin i \Delta \sigma,$$

et comme il s'agit de la variation des éléments à l'origine, il faut poser

$$i = i_0, \qquad \sigma = \theta_0,$$

ce qui donne

$$\Delta p = \sin i \Delta \sigma, \qquad \Delta q = \cos i \Delta i.$$

Différentiant maintenant

$$u = \frac{\bar{r}}{a} q \sin(v - \theta_0) - \frac{\bar{r}}{a} p \cos(v - \theta_0),$$

on a, puisque $\Delta\sigma = \cos i \Delta\theta$,

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = \frac{\bar{r}}{a} \sin(v - \theta_0) \Delta i - \frac{\bar{r}}{a} \cos(v - \theta_0) \sin i \Delta \theta;$$

remplaçant $v - \theta_0$ par $w + \varpi_0 - \theta_0$, et introduisant l'anomalie excentrique par la relation $\bar{r} = a(1 - e\cos\varepsilon)$, on a finalement

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = \gamma \sin\varepsilon + \delta(\cos\varepsilon - e), \tag{26}$$

en posant

$$\gamma = f[\cos(\varpi_0 - \theta_0) \Delta i - \sin(\varpi_0 - \theta_0) \sin i \Delta \theta],$$
$$\delta = \sin(\varpi_0 - \theta_0) \Delta i + \cos(\varpi_0 - \theta_0) \sin i \Delta \theta.$$

On trouve de même

$$\frac{\Delta u_1}{\cos i} = \gamma \cos\varepsilon - \delta \sin\varepsilon. \tag{27}$$

Ainsi sont obtenues les variations

$$\Delta\epsilon, \ \Delta\nu, \ \Delta\eta, \ \Delta\beta, \ \Delta u, \ \Delta u_1,$$

qui entrent dans $\Delta\Lambda$.

12.

En différentiant la valeur de $\Delta\varepsilon$ et ajoutant la valeur de $\Delta\nu$ au résultat, il vient

$$\frac{\partial\Delta\varepsilon}{\partial\varepsilon}+\Delta\nu=\frac{\Delta a}{a}-\frac{e}{f^2}\Delta e;$$

de plus, des relations

$$a^3n^2=\mu, \qquad an=hf,$$

on tire

$$\tfrac{1}{2}\log a+\log h+\log f=\tfrac{1}{2}\log\mu$$

et

$$\frac{\Delta h}{h}=-\frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a}-\frac{e}{f^2}\Delta e.$$

Éliminant Δe et Δa entre ces deux relations, on a

$$(28)\qquad \begin{cases}\dfrac{\Delta a}{a}=2\dfrac{\partial\Delta\varepsilon}{\partial\varepsilon}+2\dfrac{\Delta h}{h}+2\Delta\nu,\\[2mm] \dfrac{e}{f^2}\Delta e=\dfrac{\partial\Delta\varepsilon}{\partial\varepsilon}+2\dfrac{\Delta h}{h}+\Delta\nu.\end{cases}$$

On aura de même

$$(29)\qquad \begin{cases}\dfrac{\Delta a}{a}=\dfrac{2\partial\Delta\eta}{\partial\eta}+2\dfrac{\Delta h}{h}+2\Delta\beta,\\[2mm] \dfrac{e}{f^2}\Delta e=\dfrac{\partial\Delta\eta}{\partial\eta}+2\dfrac{\Delta h}{h}+\Delta\beta.\end{cases}$$

La substitution, dans la valeur de $\Delta\Lambda$, de ces expressions de $\Delta a, \Delta e$, donne

$$\Delta\Lambda=\frac{\rho}{a}\left[\frac{\partial T}{\partial\lambda}\Delta\lambda+\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon+(B+T)\Delta\nu+C\frac{\Delta h}{h}+(T+\overline{T})\Delta\beta\right.$$
$$\left.+D\frac{u}{\cos i}+E\frac{u_1}{\cos i}\right]$$
$$+\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta}\Delta\eta-\frac{\rho}{a}T\frac{\partial\Delta\eta}{\partial\eta}.$$

Multipliant par $d\varepsilon$ et intégrant, après avoir posé

$$L=\frac{\partial T}{\partial\lambda}\Delta\lambda+\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon+(B+T)\Delta\nu+C\frac{\Delta h}{h}+D\frac{u}{\cos i}+E\frac{u_1}{\cos i},$$

on a

$$\int \Delta\Lambda d\varepsilon = \frac{\rho}{a}\int L d\varepsilon + \frac{\rho}{a}\Delta\beta\int(T+\overline{T})d\varepsilon - \frac{\rho}{a}\frac{\partial\Delta\eta}{\partial\eta}\int T d\varepsilon + \Delta\eta\int\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta}d\varepsilon\,;$$

mais, de plus,

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta} = \frac{\rho}{a}\frac{\partial T}{\partial\eta} + T\frac{\partial\rho}{a\partial\eta},$$

de sorte qu'en faisant usage des notations suivantes, déjà employées dans ce travail,

$$W = \int T d\varepsilon, \quad \frac{\partial W}{\partial\varepsilon} = T, \quad \frac{\partial\overline{W}}{\partial\varepsilon} = \overline{T}, \quad -2\frac{\partial\beta}{\partial\eta} = \frac{\partial W}{\partial\eta} = \int\frac{\partial T}{\partial\eta}d\varepsilon,$$

il vient

$$\int\Delta\Lambda d\varepsilon = \frac{\rho}{a}\left(\int L d\varepsilon + \Delta\beta\int T d\varepsilon + \Delta\beta\int\overline{T}d\varepsilon + \Delta\eta\int\frac{\partial T}{\partial\eta}d\varepsilon - \frac{\partial\Delta\eta}{\partial\eta}\int T d\varepsilon\right)$$
$$+ \Delta\eta\frac{\partial\rho}{a\partial\eta}\int T d\varepsilon,$$

et

$$\overline{\int\Delta\Lambda d\varepsilon} = \frac{r}{a}\overline{\int L d\varepsilon} + \frac{r}{a}\left(\overline{W} + \int\frac{\partial\overline{W}}{\partial\varepsilon}d\varepsilon\right)\Delta\nu$$
$$+ \overline{W}\left(\frac{\partial r}{a\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon - \frac{r}{a}\frac{\partial\Delta\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right) + \frac{r}{a}\frac{\partial\overline{W}}{\partial\eta}\Delta\varepsilon.$$

Comme $\frac{\partial r}{a\partial\varepsilon} = e\sin\varepsilon$, le coefficient de $\overline{W}$ dans l'expression précédente devient $\frac{e-\cos\varepsilon}{f^2}\Delta e$, en remplaçant $\Delta\nu$ et $\Delta\varepsilon$ par leurs valeurs ; alors

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}\Delta n\delta z = \int\Bigg\{\frac{r}{a}\left[\overline{\int L d\varepsilon} + \left(\overline{W} + \int\frac{\partial\overline{W}}{\partial\varepsilon}d\varepsilon\right)\Delta\nu + \frac{\partial\overline{W}}{\partial\eta}\Delta\varepsilon\right]\\ + \overline{W}\frac{e-\cos\varepsilon}{f^2}\Delta e\Bigg\}d\varepsilon.\end{aligned}\right.$$

Il est bon aussi de remarquer que la relation $a^3n^2 = \mu$ donne

$$\frac{\Delta a}{a} = -\tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n},$$

relation qui servira dans l'application des formules précédentes.

13.

L'équation $\Lambda = \frac{\rho}{a} T$ donne

$$\Delta\Lambda = \frac{\rho}{a}\Delta T + T\Delta\frac{\rho}{a};$$

de plus, comme

$$\Delta\frac{\rho}{a} = \frac{\Delta\rho}{a} - \frac{\rho}{a}\frac{\Delta a}{a},$$

et que, d'après l'équation (23), on a

$$\Delta\rho = \rho\Delta\beta + \frac{\partial\rho}{\partial\eta}\Delta\eta,$$

il vient

$$\Delta\frac{\rho}{a} = \frac{\rho}{a}\Delta\beta + \frac{\partial\rho}{a\partial\eta}\Delta\eta - \frac{\rho}{a}\frac{\Delta a}{a};$$

par suite,

$$\int\Delta T d\varepsilon = \frac{a}{\rho}\int\Delta\Lambda d\varepsilon - \frac{a\partial\rho}{\rho\partial\eta}\Delta\eta\int T d\varepsilon - \Delta\beta\int T d\varepsilon + \frac{\Delta a}{a} T d\varepsilon,$$

et, en remplaçant $\int\Delta\Lambda d\varepsilon$ par sa valeur,

$$\int\Delta T d\varepsilon = \int L d\varepsilon + \Delta\beta\int\overline{T} d\varepsilon + \Delta\eta\int\frac{\partial T}{\partial\eta} d\varepsilon + \frac{\Delta a}{a}\int T d\varepsilon - \frac{\partial\Delta\eta}{\partial\eta}\int T d\varepsilon.$$

On déduit aisément de ce qui précède

$$\frac{\partial\int\Delta T d\varepsilon}{\partial\eta} = \frac{\partial\int L d\varepsilon}{\partial\eta} + \Delta\eta\int\frac{\partial^2 T}{\partial\eta^2} d\varepsilon + \frac{\partial\Delta\beta}{\partial\eta}\int\overline{T} d\varepsilon$$
$$+ \frac{\Delta a}{a}\int\frac{\partial T}{\partial\eta} d\varepsilon - \frac{\partial^2\Delta\eta}{\partial\eta^2}\int T d\varepsilon,$$

$$\overline{\frac{\partial\int\Delta T d\varepsilon}{\partial\eta}} = \overline{\frac{\partial\int L d\varepsilon}{\partial\eta}} + \overline{\frac{\partial W}{\partial\eta}}\frac{\Delta a}{a} - \overline{W}\frac{\partial^2\Delta\varepsilon}{\partial\varepsilon^2}$$
$$+ \frac{\partial\Delta\nu}{\partial\varepsilon}\int\overline{\frac{\partial W}{\partial\eta}} d\varepsilon + \Delta\varepsilon\overline{\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}},$$

et comme

$$\frac{\partial^2\Delta\varepsilon}{\partial\varepsilon^2} = -\frac{\partial\Delta\nu}{\partial\varepsilon} = -\frac{\sin\varepsilon}{f^2}\Delta e + \frac{e\cos\varepsilon}{f}\Delta\chi = -\Delta\varepsilon + \frac{\Delta\chi}{f},$$

il vient

$$\frac{\partial \int \Delta T d\varepsilon}{\partial \eta} = \frac{\partial \int L d\varepsilon}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\Delta a}{a} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}\Delta\varepsilon + \left(W + \int \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} d\varepsilon\right)\frac{\partial \Delta \nu}{\partial \varepsilon},$$

ou enfin

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta\nu = -\tfrac{1}{2}\int\Big[& \frac{\partial \int L d\varepsilon}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\Delta a}{a} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + W + \int \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} d\varepsilon\right)\Delta\varepsilon \\ & - \left(W + \int \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} d\varepsilon\right)\frac{\Delta \chi}{f}\Big] d\varepsilon . \end{aligned} \right.$$

Il faut remarquer ici que $\Delta\nu$, dans le premier membre, désigne la variation qu'éprouve ν lorsqu'on passe d'un système d'éléments à l'autre, tandis que dans le second membre $\Delta\nu$ indique la fonction des accroissements des éléments introduits à l'art. 11.

14.

On a aussi

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial U}{\partial \eta}\Delta\eta + \frac{\partial U}{\partial \beta}\Delta\beta + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\Delta\varepsilon + \frac{\partial U}{\partial \nu}\Delta\nu + \frac{\partial U}{\partial e}\Delta e + \cdots$$
$$+ \frac{\partial U}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial U}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial U}{\partial u_1}\Delta u_1 .$$

L'expression

$$U = \frac{\rho r^2}{af}\sin(\omega - w) . \frac{\partial \Omega}{\partial Z}\cos i$$

donne

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = \rho\frac{\partial U}{\partial \rho} = U,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = r\frac{\partial U}{\partial r} = 2U + Y,$$

$$\frac{\partial U}{\partial e} = \frac{e}{f^2}U,$$

$$a\frac{\partial U}{\partial a} = -U,$$

$$\frac{\partial U}{\partial u} = D'_1,$$

$$\frac{\partial U}{\partial u_1} = E'_1,$$

en désignant par D'_1, E'_1 les quantités ainsi dénommées déjà, et négligeant D'_2, E'_2 qui renferment sin i en facteur. On obtient alors

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial U}{\partial \iota}\Delta\iota + (2U + Y)\Delta\nu + \frac{e}{f^2}U\Delta e - U\frac{\Delta a}{a} + U\Delta\beta$$
$$+ \frac{\partial U}{\partial \eta}\Delta\eta + D'_1\frac{\Delta u}{\cos i} + E'_1\frac{\Delta u_1}{\cos i}.$$

Éliminant $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{e}{f^2}\Delta e$ par les équations (29), il vient

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial U}{\partial \iota}\Delta\iota + (2U + Y)\Delta\nu - U\left(\frac{\partial\Delta\iota}{\partial\iota} + \Delta\nu - \Delta\beta\right)$$
$$+ \frac{\partial U}{\partial \eta}\Delta\eta + D'_1\frac{\Delta u}{\cos i} + E'_1\frac{\Delta u_1}{\cos i}.$$

La première équation de l'art. 12 donne, par analogie,

$$\frac{\partial\Delta\eta}{\partial\eta} + \Delta\beta = \frac{\Delta a}{a} - \frac{e}{f^2}\Delta e,$$

donc

$$\frac{\partial\Delta\eta}{\partial\eta} + \Delta\beta = \frac{\partial\Delta\iota}{\partial\iota} + \Delta\nu.$$

par suite,

$$\frac{\partial\Delta\iota}{\partial\iota} + \Delta\nu - \Delta\beta = \frac{\partial\Delta\eta}{\partial\eta},$$

et enfin,

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial U}{\partial \iota}\Delta\iota + (2U + Y)\Delta\nu + D'_1\frac{\Delta u}{\cos i} + E'_1\frac{\Delta u_1}{\cos i}$$
$$+ \frac{\partial U}{\partial \eta}\Delta\eta - U\frac{\partial\Delta\eta}{\partial\eta}.$$

Posant, de plus,

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \Pi = {} & \frac{\partial U}{\cos i\,\partial\lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial U}{\cos i\,\partial\iota}\Delta\iota + \left(\frac{2U}{\cos i} + \frac{Y}{\cos i}\right)\Delta\nu \\ & + \frac{D'_1}{\cos i}\frac{\Delta u}{\cos i} + \frac{E'_1}{\cos i}\frac{\Delta u_1}{\cos i}, \end{aligned}\right.$$

il vient

$$\int\frac{\Delta U}{\cos i}d\iota = \int\Pi d\iota + \Delta\eta\int\frac{\partial U}{\cos i\,\partial\eta}d\iota - \frac{\partial\Delta\eta}{\partial\eta}\int\frac{U}{\cos i}d\iota;$$

mais, d'après les équations de l'art. 18, *Première partie,* on a

$$u = \overline{\int \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} d\varepsilon}, \quad u_1 = \frac{du}{d\varepsilon} = \frac{\overline{\partial R}}{\partial \eta},$$

d'où

$$u = \overline{\int U d\varepsilon}, \quad u_1 = \overline{\int \frac{\partial U}{\partial \eta} d\varepsilon};$$

enfin, en changeant η en ε, on a

$$\text{(33)} \qquad \frac{\Delta u}{\cos i} = \overline{\int \Pi d\varepsilon} + \frac{u_1}{\cos i} \Delta\varepsilon - \frac{u}{\cos i} \frac{\partial \Delta\varepsilon}{\partial \varepsilon}.$$

Il faut renouveler ici, pour le Δu du premier membre, l'observation faite pour $\Delta\nu$ à la fin de l'art. 13.

15.

Les constantes arbitraires introduites par l'intégration seront déterminées, lorsqu'elles seront sensibles, comme celles que l'on a déjà rencontrées précédemment et dont elles ont la forme.

Entre les corrections des coefficients des variations séculaires, données par les expressions qu'on vient de développer, existent des relations pouvant servir à contrôler les calculs, et qu'il est utile de connaître. Ces corrections devant avoir la même forme que les coefficients de la première approximation, le résultat ne doit, avant tout, contenir aucun terme proportionnel à ε^2 ou n^2t^2, et les coefficients de ces termes, entrant dans l'expression (30) de $\Delta n\delta z$, doivent se détruire rigoureusement. De plus, dans la première approximation, les variations séculaires ont les formes suivantes, savoir : pour $n\delta z$,

$$[H_0'' - i(1 - \tfrac{1}{2}e^2)H_0']\,e^{\iota\iota}\varepsilon - \tfrac{1}{4}e(H_0'' - iH_0')\,e^{2\iota\iota}\varepsilon,$$

pour ν,

$$-H_0'\varepsilon - \tfrac{1}{2}(H_0' - iH_0'')\,e^{\iota\iota}\varepsilon,$$

et pour $\dfrac{u}{\cos i}$,

$$-2eV_0''\varepsilon + (V_0'' + iV_0')\,e^{\iota\iota}\varepsilon.$$

En négligeant les carrés et les produits des corrections, on a

$$\begin{aligned}\Delta n\delta z = \big\{ \Delta H_0'' - i[(1 - \tfrac{1}{2}e^2)\Delta H_0' - eH_0'\Delta e] \big\} e^{\iota\iota}\varepsilon \\ - \tfrac{1}{4}[e\Delta H_0'' + H_0''\Delta e - i(e\Delta H_0' + H_0'\Delta e)]\,e^{2\iota\iota}\varepsilon,\end{aligned}$$

$$\Delta \nu = -(e \Delta H'_0 + H'_0 \Delta e)\varepsilon - \tfrac{1}{2}(\Delta H'_0 - i \Delta H''_0)\,\mathrm{e}^{\varepsilon' \iota}\varepsilon,$$

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = -2(e \Delta V''_0 + V''_0 \Delta e)\varepsilon + (\Delta V''_0 + i \Delta V'_0)\,\mathrm{e}^{\varepsilon' \iota}\varepsilon.$$

Telles sont les formes sous lesquelles on peut mettre les corrections des variations séculaires obtenues art. 12, 13, 14. C'est ce que je vais démontrer.

16.

Je suppose le développement de L effectué, et je ne considère que les termes susceptibles d'amener des variations séculaires; j'ai successivement

$$L = \mathbf{f}'_0 + (\mathbf{g})_1\,\mathrm{e}^{(-\eta+\varepsilon)\iota} + (\mathbf{h})_0\,\mathrm{e}^{\eta\iota},$$

$$\int L\,d\varepsilon = \mathbf{f}'_0\varepsilon - i(\mathbf{g})_1\,\mathrm{e}^{(-\eta+\varepsilon)\iota} + (\mathbf{h})_0\,\mathrm{e}^{\eta\iota}\varepsilon,$$

$$\frac{\partial \int L\,d\varepsilon}{\partial \eta} = -(\mathbf{g})_1\,\mathrm{e}^{(-\eta+\varepsilon)\iota} + i(\mathbf{h})_0\,\mathrm{e}^{\eta\iota}\varepsilon,$$

$$\overline{\frac{\partial \int L\,d\varepsilon}{\partial \eta}} = -2\mathbf{g}'_1 + i(\mathbf{h})_0\,\mathrm{e}^{\varepsilon\iota}\varepsilon,$$

$$\overline{\int L\,d\varepsilon} = \mathbf{f}'_0\varepsilon + 2\mathbf{g}''_1 + (\mathbf{h})_0\,\mathrm{e}^{\varepsilon\iota}.$$

J'ai aussi, art. 33, 35 et 36, *Première partie,*

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}} = 2eH'_0 + i(H)_0\,\mathrm{e}^{\varepsilon\iota}\varepsilon,$$

$$\overline{\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}} = -2G''_1 - (H)_0\,\mathrm{e}^{\varepsilon\iota}\varepsilon,$$

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}} = -eH'_0 + [(F)_1 + (G)_2 + (H)_0]\,\mathrm{e}^{\varepsilon\iota} + [(F)_2 + (G)_2 + (H)_1]\,\mathrm{e}^{2\varepsilon\iota} + \cdots,$$

$$\int \overline{\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}}\,d\varepsilon = -2K - eH'_0\varepsilon - i[(F)_1 + (G)_2 + (H)_0]\,\mathrm{e}^{\varepsilon\iota} - \tfrac{1}{2}i[(F)_2 + (G)_3 + (H)_1]\,\mathrm{e}^{2\varepsilon\iota},$$

$$\overline{W} = 2k + 2G''_1 + eH'_0\varepsilon + (H)_0\,\mathrm{e}^{\varepsilon\iota}\varepsilon.$$

Posant maintenant, pour abréger l'écriture,

$$\frac{\Delta a}{a} = \alpha, \qquad \frac{\Delta e}{f^2} = \beta, \qquad \frac{\Delta \chi}{f} = \gamma,$$

il vient

$$\Delta\varepsilon = \gamma + \beta\sin\varepsilon - \gamma e\cos\varepsilon,$$

$$\Delta\nu = \alpha - e\beta - \beta\cos\varepsilon - \gamma e\sin\varepsilon,$$

$$2\frac{\Delta h}{h} = -\alpha + 2e\beta,$$

$$(e-\cos\varepsilon)\frac{\Delta e}{f^2} = \beta e - \beta\cos\varepsilon,$$

$$\overline{W} + \int\frac{\partial\overline{W}}{\partial\varepsilon}d\varepsilon = (H)_0 e^{\varepsilon'\varepsilon},$$

où je néglige les termes qui ne renferment pas ε en facteur. On tire de là

$$\left(\overline{W} + \int\frac{\partial\overline{W}}{\partial\varepsilon}d\varepsilon\right)\Delta\nu = -(\beta + ie\gamma)(H)_0\varepsilon + (\alpha - e\beta)(H)_0 e^{\varepsilon'\varepsilon} - \tfrac{1}{2}(\beta - ie\gamma)(H)_0 e^{2\varepsilon'\varepsilon},$$

$$\frac{\partial\overline{W}}{\partial\eta}\Delta\varepsilon = -(\beta + ie\gamma)(H)_0\varepsilon + i\gamma(H)_0 e^{\varepsilon'\varepsilon} + \tfrac{1}{2}(\beta - ie\beta)(H)_0 e^{2\varepsilon'\varepsilon},$$

et, faisant la somme de ces deux expressions, il vient

$$\left(\overline{W} + \int\frac{\partial\overline{W}}{\partial\varepsilon}d\varepsilon\right)\Delta\nu + \frac{\partial\overline{W}}{\partial\eta}\Delta\varepsilon = -2(\beta + ie\gamma)(H)_0\varepsilon + (\alpha - e\beta + i\gamma)(H)_0 e^{\varepsilon'\varepsilon}.$$

Par des substitutions successives, on trouve

$$\int\overline{L\,d\varepsilon} + \left(\overline{W} + \int\frac{\partial\overline{W}}{\partial\varepsilon}d\varepsilon\right)\Delta\nu + \frac{\partial\overline{W}}{\partial\eta}\Delta\varepsilon = [\mathbf{f}'_0 - 2(\beta H'_0 - e\gamma H''_0)]\varepsilon + [(\alpha - e\beta + i\gamma)(H)_0 + (\mathbf{h})_0]e^{\varepsilon'\varepsilon},$$

$$\frac{r}{a}\left[\int\overline{L\,d\varepsilon} + \left(\overline{W} + \int\frac{\partial\overline{W}}{\partial\varepsilon}d\varepsilon\right)\Delta\nu + \frac{\partial\overline{W}}{\partial\eta}\Delta\varepsilon\right] = \{\mathbf{f}'_0 - 2(\beta H'_0 - e\gamma H''_0) - e[(\alpha - e\beta)H'_0 - \gamma H''_0 + \mathbf{h}'_0\}\varepsilon$$
$$+ \{\alpha H'_0 - \gamma(1+e^2)H''_0 - \tfrac{1}{2}e\mathbf{f}'_0 + \mathbf{h}'_0 + i[\gamma H'_0 + (\alpha - e\beta)H''_0 + \mathbf{h}''_0]\}e^{\varepsilon'\varepsilon}$$
$$- \tfrac{1}{2}e\{(\alpha - e\beta)H'_0 - \gamma H''_0 + \mathbf{h}'_0 + i[\gamma H'_0 + (\alpha - e\beta)H''_0 + \mathbf{h}''_0]\}e^{2\varepsilon'\varepsilon},$$

$$\overline{W}\frac{e - \cos\varepsilon}{f^2}\Delta e = \overline{W}\beta(e - \cos\varepsilon) = -\beta f^2 H'_0\varepsilon + e\beta(\tfrac{1}{2}H'_0 + iH''_0)e^{\varepsilon'\varepsilon} - \tfrac{1}{2}\beta(H'_0 + iH''_0)e^{2\varepsilon'\varepsilon};$$

additionnant les deux dernières relations membre à membre, il vient

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\eta\delta z}{d\varepsilon} = & [\mathbf{f}'_0 - \beta(3-2e^2)H'_0 + 3e\gamma H''_0 - e\alpha H'_0 - e\mathbf{h}'_0]\,\varepsilon \\ & - \{\mathbf{h}'_0 - \tfrac{1}{2}e\mathbf{f}'_0 + \alpha H'_0 + \tfrac{1}{2}e\beta H'_0 - \gamma(1+e^2)H''_0 \\ & \qquad + i[\gamma H'_0 + \alpha H''_0 + \mathbf{h}''_0]\}\,\mathrm{e}^{\varepsilon i}\varepsilon \\ & + \tfrac{1}{2}\{e\alpha H'_0 + \beta f^2 H'_0 - e\gamma H''_0 + e\mathbf{h}'_0 \\ & \qquad + i[e\gamma H'_0 + \beta f^2 H''_0 + e\alpha H''_0 + e\mathbf{h}''_0]\}\,\mathrm{e}^{2\varepsilon i}\varepsilon\,;\end{aligned}$$

intégrant, et ne conservant que les termes en ε, il vient

$$\begin{aligned}\Delta n\delta z = & \tfrac{1}{2}[\mathbf{f}'_0 - \beta(3-2e^2)H'_0 + 3e\gamma H''_0 - e\alpha H'_0 - e\mathbf{h}'_0]\,\varepsilon^2 \\ & + \{\gamma H'_0 + \alpha H''_0 + \mathbf{h}''_0 - i[\mathbf{h}'_0 - \tfrac{1}{2}e\mathbf{f}'_0 + (\alpha + \tfrac{1}{2}e\beta)H'_0 - \gamma(1+e^2)H''_0]\}\,\mathrm{e}^{\varepsilon i}\varepsilon \\ & + \tfrac{1}{4}\{(-\beta f^2 - e\alpha + e\gamma)H''_0 - e\mathbf{h}''_0 + i[(e\alpha + \beta f^2)H'_0 - e\gamma H''_0 + e\mathbf{h}'_0]\}\,\mathrm{e}^{2\varepsilon i}\varepsilon.\end{aligned}$$

17.

Pour développer $\mathbf{f}'_0 - e\mathbf{h}'_0$, je remarque que cette quantité est la partie constante du produit $(1-e\cos\eta)L$.

Le coefficient de $\Delta\lambda$ étant nul ici, puisque λ n'entre qu'avec j' qui est nul dans le cas actuel, on a

$$L = \frac{\partial T}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon + (B+T)\Delta\nu + 2(T+X+\overline{T})\frac{\Delta h}{h} + D\frac{u}{\cos i} + E\frac{u_1}{\cos i},$$

qu'on peut écrire, en se souvenant que $B = V + X$,

$$L = \frac{\partial T}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon + V\Delta\nu + (T+X)\left(\Delta\nu + 2\frac{\Delta h}{h}\right) + 2\overline{T}\frac{\Delta h}{h} + D\frac{u}{\cos i} + E\frac{u_1}{\cos i},$$

où T, V, X, $\overline{T}$ ont la même signification que précédemment, art. 9, *Deuxième partie*.

Multipliant ces fonctions par $1-e\cos\eta$, et ne conservant que les termes indépendants de η, il vient

$$M(1-e\cos\eta) = -3,$$

$$N(1-e\cos\eta) = 0,$$

$$M'(1-e\cos\eta) = \frac{3}{f^2}(-e^2 + e\cos\varepsilon),$$

$$N'(1-e\cos\eta) = \frac{3e\sin\varepsilon}{f^2},$$

$$T(1-e\cos\eta)=-3a\frac{\partial\Omega}{\partial\epsilon},$$

$$\frac{\partial T}{\partial\epsilon}(1-e\cos\eta)=-3a\frac{\partial^2\Omega}{\partial\epsilon^2},$$

$$V(1-e\cos\eta)=-3\,\frac{\partial.ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}}{\partial\epsilon},$$

$$(T+X)(1-e\cos\eta)=\frac{3}{f^2}(-1+e\cos\epsilon)a\frac{\partial\Omega}{\partial\epsilon}+\frac{3}{f^2}e\sin\epsilon.ar\frac{\partial\Omega}{\partial r},$$

par suite,

$$(1-e\cos\eta)\frac{\partial T}{\partial\epsilon}\Delta\epsilon=3[(-1+e\cos\epsilon)\gamma-\beta\sin\epsilon]a\frac{\partial^2\Omega}{\partial\epsilon^2},$$

$$(1-e\cos\eta)V\Delta\nu=3[\beta(e+\cos\epsilon)+e\gamma\sin\epsilon-\alpha]\frac{\partial.ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}}{\partial\epsilon},$$

$$(1-e\cos\eta)(T+X)\left(\Delta\nu+2\frac{\Delta h}{h}\right)=\frac{3}{f^2}\left[-\tfrac{3}{2}e\beta+(1+e^2)\beta\cos\epsilon+e\gamma\sin\epsilon\right.$$
$$\left.-\frac{e\beta}{2}\cos2\epsilon-\frac{e^2\gamma}{2}\sin2\epsilon\right]a\frac{\partial\Omega}{\partial\epsilon}$$
$$+\frac{3}{f^2}\left(-\frac{e^2\gamma}{2}+e^2\beta\sin\epsilon+\frac{e^2\gamma}{2}\cos2\epsilon-\frac{e\beta}{2}\sin2e\right)ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}.$$

Prenant maintenant les premiers termes de $a\frac{\partial\Omega}{\partial\epsilon}$, $ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$, j'ai

$$a\frac{\partial\Omega}{\partial\epsilon}=A_1e^{\epsilon i}+A_2e^{2\epsilon i},$$

$$ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}=B_0'+B_1e^{\epsilon i}+B_2e^{2\epsilon i},$$

$$a\frac{\partial^2\Omega}{\partial\epsilon^2}=iA_1e^{\epsilon i}+2iA_2e^{2\epsilon i},$$

$$\frac{\partial.ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}}{\partial\epsilon}=iB_1e^{\epsilon}+2iB_2e^{2\epsilon i}:$$

substituant, et ne conservant que la partie constante, je trouve

$$(1-e\cos\eta)\frac{\partial T}{\partial\epsilon}\Delta\epsilon=3\beta A_1+3ie\gamma A_1,$$

$$(1-e\cos\eta)V\Delta\nu=3i\beta B_1-3e\gamma B_1,$$

$$(1-e\cos\eta)(T+X)\left(\Delta\nu+2\frac{\Delta h}{h}\right)=\frac{3\beta}{f^2}[(1+e^2)A_1-\tfrac{1}{2}eA_2+ie^2B_1-\tfrac{1}{2}ieB_2]$$
$$+\frac{3\gamma}{f^2}(ieA_1-\tfrac{1}{2}ie^2A_2+\tfrac{1}{2}e^2B_2-\tfrac{1}{2}e^2B'_0).$$

De plus,

$$(1-e\cos\eta)\overline{T}=-eH'_0,$$
$$(1-e\cos\eta)2\overline{T}\frac{\Delta h}{h}=eH'_0\alpha-2e^2H'_0\beta.$$

On a encore

$$Du+Eu_1=Ma^2\frac{\partial.u\frac{\partial\Omega}{\partial Z}}{\partial\epsilon}+N\left(a^2r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial Z}+a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right),$$
$$(1-e\cos\eta)(Du+Eu_1)=-3a^2\frac{\partial.u\frac{\partial\Omega}{\partial Z}}{\partial\epsilon}=0,$$

puisque les dérivées n'ont pas de terme constant.

Additionnant ces divers résultats, il vient

$$\mathbf{f}'_0-e\mathbf{h}'_0=\frac{3\beta}{f^2}(2A'_1-\tfrac{1}{2}eA'_2+B''_1-\tfrac{1}{2}eB''_2)$$
$$+\frac{3e\gamma}{f^2}[(2-e^2)A''_1-\tfrac{1}{2}eA''_2-f^2B'_1+\tfrac{1}{2}eB'_2-\tfrac{1}{2}eB'_0]$$
$$+e\alpha H'_0-2e^2\beta H'_0;$$

mais les équations (66), *Première partie,* donnent

$$H'_0=\frac{1}{f^2}(2A'_1-\tfrac{1}{2}eA'_2+B''_1-\tfrac{1}{2}eB''_2),$$
$$H''_0=\frac{1}{f^2}[-(2-e^2)A''_1+\tfrac{1}{2}eA''_2+f^2B'_1-\tfrac{1}{2}eB'_2+\tfrac{1}{2}eB'_0],$$

par suite,

$$\mathbf{f}'_0-e\mathbf{h}'_0=e\alpha H'_0+(3-2e^2)\beta H'_0-3e\gamma H''_0,$$

résultat qui montre que le coefficient de ε^2 dans $\Delta n\delta z$ est nul. Si l'on élimine $\mathbf{f}'_0$ du coefficient de $e''\varepsilon$, le multiplicateur de i dans ce coefficient devient

$$(1-\tfrac{1}{2}e^2)\mathbf{h}'_0+(1-\tfrac{1}{2}e^2)\alpha H'_0-f^2e\beta H'_0-\gamma(1-\tfrac{1}{2}e^2)H''_0.$$

Posant, de plus,

$$\Delta H''_0=\gamma H'_0+\alpha H''_0+\mathbf{h}''_0,$$
$$\Delta H'_0=-\gamma H''_0+\alpha H'_0+\mathbf{h}'_0,$$

la ligne précédente peut s'écrire

$$(1-\tfrac{1}{2}e^2)\,\Delta H_0' - \beta e f^2 H_0',$$

et l'on a

$$\begin{aligned}\Delta n\delta z = & \left\{\Delta H_0' - i\left[(1-\tfrac{1}{2}e^2)\,\Delta H_0' - \beta e f^2 H_0'\right]\right\} e^{\epsilon i} \\ & + \tfrac{1}{4}\left[-e\Delta H_0' - \beta f^2 H_0' + i(e\Delta H_0' + \beta f^2 H_0')\right] e^{2\epsilon i},\end{aligned}$$

ou bien, puisque $\beta f^2 = \Delta e$, art. 17,

$$\begin{aligned}\Delta n\delta z = & \left\{\Delta H_0' - i\left[(1-\tfrac{1}{2}e^2)\,\Delta H_0' - eH_0'\Delta e\right]\right\} e^{\epsilon i} \\ & + \tfrac{1}{4}\left[-e\Delta H_0' - H_0'\Delta e + i(e\Delta H_0' + H_0'\Delta e)\right] e^{2\epsilon i},\end{aligned}$$

ce qui est la forme indiquée à l'art. 15,

18.

Je vais calculer maintenant la partie de $\Delta\nu$, qui dépend des variations séculaires. On a trouvé

$$W = 2k + 2G_1'\epsilon + eH_0'\epsilon + \left[K_1 - i(F)_1 - \tfrac{1}{2}i(G)_2\right] e^{\epsilon i} + (H)_0 e^{\epsilon i}\epsilon,$$

$$\int \frac{\partial W}{\partial \epsilon} d\epsilon = -eH_0'\epsilon - i\left[(F)_1 + (G)_2 + (H)_0\right] e^{\epsilon i},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = -2G_1' + \left[-K + \tfrac{1}{2}i(G)_2\right] e^{\epsilon i} - (H)_0 e^{\epsilon i}\epsilon,$$

d'où l'on tire, en tenant compte de l'équation (71), *Première partie,*

$$\overline{W} + \int \frac{\overline{\partial W}}{\partial \epsilon} d\epsilon + \frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial \eta^2} = 2k + 2i(A)_1 e^{\epsilon i};$$

de plus,

$$\begin{aligned}&\left(\overline{W} + \int \frac{\overline{\partial W}}{\partial \epsilon} d\epsilon + \frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial \eta^2}\right)\Delta\epsilon - \left(\overline{W} + \int \frac{\overline{\partial W}}{\partial \epsilon} d\epsilon\right)\frac{\Delta\chi}{f} \\ &\qquad = -2\beta(A)_1 - 2\gamma\left[G_1' + ie(A)_1\right] - \gamma(H)_0 e^{\epsilon i}\epsilon,\end{aligned}$$

$$\frac{\overline{\partial W}}{\partial \eta}\frac{\Delta a}{a} = \left[-2G_1' + i(H)_0 e^{\epsilon i}\epsilon\right]\alpha,$$

$$\frac{\overline{\partial \int L d\epsilon}}{\partial \eta} = -2\mathbf{g}_1' + i(\mathbf{h})_0 e^{\epsilon i};$$

additionnant ces trois derniers résultats, on obtient

$$\frac{\partial \Delta\nu}{\partial \epsilon} = \mathbf{g}_1' + \alpha G_1' + \beta A_1' + \gamma(G_1' - eA_1') - \tfrac{1}{2}\left[i(\mathbf{h})_0 + i\alpha(H)_0 - \gamma(H)_0\right] e^{\epsilon i}\epsilon.$$

Intégrant et ne conservant que le terme en ε, on obtient

$$\Delta\nu = [\mathbf{g}'_1 + \alpha G'_1 + \beta A'_1 + \gamma(G''_1 - eA''_1)]\varepsilon - \tfrac{1}{2}[(\mathbf{h})_0 + \alpha(H)_0 + i\gamma(H)_0]e^{i\varepsilon}.$$

19.

Le développement de $\mathbf{g}'_1 + e\mathbf{h}'_0$ s'obtient, en remarquant qu'il est la partie constante du produit $\mathfrak{B}L$, dans lequel je fais, pour abréger, $\mathfrak{B} = \cos(\eta - \varepsilon) + e\cos\eta$.

Opérant comme à l'art. 17, on a successivement

$$\mathfrak{B}\frac{\partial M}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{f^2}(-2e\sin\varepsilon + e^2\sin 2\varepsilon,$$

$$\mathfrak{B}\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{f^2}(2 - e^2 - e^2\cos 2\varepsilon),$$

$$\mathfrak{B}M = 4,$$

$$\mathfrak{B}N = 0,$$

$$\mathfrak{B}M' = -\frac{2-3e^2}{f^2} - \frac{e^2}{f^2}\cos 2\varepsilon,$$

$$\mathfrak{B}N' = -\frac{2e}{f^2}\sin\varepsilon - \frac{e^2}{f^2}\sin 2\varepsilon,$$

$$\mathfrak{B}T = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}\frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\Delta\varepsilon &= (4\gamma + \beta\sin\varepsilon - \gamma e\cos\varepsilon)a\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varepsilon^2}\\ &+ \frac{1}{f^2}\left\{\begin{matrix}\beta(-e + \frac{1}{2}e^2\cos\varepsilon + e\cos 2\varepsilon - \frac{1}{2}e^2\cos 3\varepsilon)\\ +\gamma[-(2e + \frac{1}{2}e^3)\sin\varepsilon + 2e^2\sin 2\varepsilon - \frac{1}{2}e^3\sin 3\varepsilon]\end{matrix}\right\} a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}\\ &+ \frac{1}{f^2}\left\{\begin{matrix}\gamma[2 - e^2 - (2e - \frac{3}{2}e^3)\cos\varepsilon - e^2\cos 2\varepsilon + \frac{1}{2}e^3\cos 3\varepsilon]\\ +\beta[(2 - \frac{1}{2}e^2)\sin\varepsilon - \frac{1}{2}e^3\sin 3\varepsilon]\end{matrix}\right\} ar\frac{\partial\Omega}{\partial r},\end{aligned}$$

$$\mathfrak{B}V\Delta\nu = 4(\alpha - e\beta - \beta\cos\varepsilon - \gamma e\sin\varepsilon)\frac{\partial . ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}}{\partial\varepsilon},$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(T+X)\left(\Delta\nu + 2\frac{\Delta h}{h}\right)\\ = \frac{1}{f^2}&\left\{\begin{matrix}\beta(2e - e^2 - \frac{4-3e^2}{2}\cos\varepsilon - e^2\cos 2\varepsilon + \frac{1}{2}e^3\cos 3e)\\ -\gamma[e(2 - \frac{1}{2}e^2)\sin\varepsilon + \frac{1}{2}e^3\sin 3\varepsilon]\end{matrix}\right\} a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}\\ + \frac{1}{f^2}&\left\{\begin{matrix}\beta(-\frac{1}{2}e^3\sin\varepsilon + ef^2\sin 2\varepsilon + \frac{1}{2}e^3\sin 3\varepsilon)\\ +\gamma(e^2 + \frac{1}{2}e^3\cos\varepsilon - e^2\cos 2\varepsilon - \frac{1}{2}e^3\cos 3\varepsilon)\end{matrix}\right\} ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}.\end{aligned}$$

Remplaçant dans la valeur de δL, obtenue à l'aide de ces relations, les dérivées par leurs valeurs, et ne conservant que les termes constants, il vient

$$\mathbf{g}'_1 + e\mathbf{h}'_0 = \tfrac{1}{2}\beta(-3A'_1 + \tfrac{1}{2}eA'_2 - B''_1 + \tfrac{1}{2}eB''_2)$$
$$+ \frac{1}{2f^2}\gamma[-2e(1+f^2)A''_1 + e^2A''_2 + B'_0 + f^2B'_1 - e^2B'_2];$$

mais, à cause des relations (66), *Première partie,* on a

$$f^2H'_0 + A'_1 = 3A'_1 - \tfrac{1}{2}eA'_2 + B''_1 - \tfrac{1}{2}eB''_2,$$
$$f^2(G''_1 - eH''_0 - eA''_1) = 2eA''_1 - e^2A''_2 - B'_0 - ef^2B'_1 + e^2B'_2,$$

par suite,

$$\mathbf{g}'_1 + e\mathbf{h}'_0 = -2\beta(f^2H'_0 + A'_1) - 2\gamma(G''_1 - eH''_0 + eA''_1).$$

Éliminant maintenant $\mathbf{g}'_1$ de $\Delta\nu$, art. 18, à l'aide de cette équation, il vient

$$\Delta\nu = -(e\Delta H'_0 + H'_0\Delta e)\varepsilon - \tfrac{1}{2}(\Delta H'_0 - i\Delta H''_0)e^{\iota\iota}\varepsilon,$$

forme indiquée à l'art. 15.

20.

Pour passer aux perturbations de la latitude, je suppose qu'on ait

$$\Pi = \mathbf{t}' + (\mathbf{v})e^{\eta\iota},$$

alors il vient

$$\overline{\int \Pi d\varepsilon} = \mathbf{t}'\varepsilon + (\mathbf{v})e^{\iota\iota}\varepsilon.$$

On a aussi

$$\frac{u}{\cos i} = -2eV''_0\varepsilon + iV_0e^{\iota\iota}\varepsilon,$$

d'où, en négligeant les termes indépendants de ε,

$$\frac{u_1}{\cos i} = -V_0e^{\iota\iota}\varepsilon,$$

par suite,

$$\frac{u}{\cos i}\frac{\partial\Delta\varepsilon}{\partial\varepsilon} = -eV''_0(\beta - ie\gamma)e^{\iota\iota} + iV_0(\beta + ie\gamma)\varepsilon + \tfrac{1}{2}iV_0(\beta - ie\gamma)e^{2\iota\iota}\varepsilon,$$

$$\frac{u_1}{\cos i}\Delta\varepsilon = -\gamma V_0e^{\iota\iota}\varepsilon + V_0(e\gamma - i\beta)\varepsilon + \tfrac{1}{2}V_0(e\gamma + i\beta)e^{2\iota\iota}\varepsilon,$$

d'où

$$\frac{u_1}{\cos i}\Delta\varepsilon - \frac{u}{\cos i}\frac{\partial \Delta\varepsilon}{\partial \varepsilon} = 2(e\gamma V_0' - \beta V_0'')\varepsilon + (-\gamma V_0' + e\beta V_0'' + i\gamma f^2 V_0'')e^{\varepsilon i}\varepsilon,$$

et enfin

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = (\mathbf{t}' + 2e\gamma V_0' - 2\beta V_0'')\varepsilon + \{\mathbf{v} + e\beta V_0'' - \gamma V_0 + i[\gamma f^2 V_0'' + (\mathbf{v})]\}e^{\varepsilon i}\varepsilon.$$

21.

Le développement de $\mathbf{t}' + 2e\mathbf{v}'$ est égal à la partie constante du produit $\Pi(1 + 2e\cos\eta)$. Ici, le coefficient de $\Delta\lambda$ est encore nul; de plus,

$$U = Qa^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\cos i, \quad Y = Qa^2 r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial Z}\cos i,$$

et

$$(1 + 2e\cos\eta)Q = 0,$$

d'où

$$(1 + 2e\cos\eta)U = 0, \quad (1 + 2e\cos\eta)Y = 0.$$

On a encore

$$D_1'' = PW\cos i, \quad E_1'' = PW_1\cos i,$$

où W et W_1 sont indépendants de η, et où

$$P = e\sin\varepsilon - e\sin\eta + \sin(\eta - \varepsilon);$$

par suite,

$$P(1 + 2e\cos\eta) = 0, \quad D_1''(1 + 2e\cos\eta) = 0, \quad E_1''(1 + 2e\cos\eta) = 0,$$

de sorte que

$$\mathbf{t}' + 2e\mathbf{v}' = 0.$$

Éliminant maintenant $\mathbf{t}'$ de la valeur de Δu, art. 20, il vient

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = 2(-e\mathbf{v}' + e\gamma V_0' + \beta V_0'')\varepsilon + [\mathbf{v}' + e\beta V_0'' - \gamma V_0' + i(\gamma f^2 V_0'' + \mathbf{v}'')]e^{\varepsilon i}\varepsilon,$$

de sorte qu'en posant

$$\Delta V_0'' = \mathbf{v}' + e\beta V_0'' - \gamma V_0', \quad \Delta V_0' = \mathbf{v}'' + \gamma f^2 V_0'',$$

on a

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = -2(e\Delta V_0'' + V_0''\Delta e)\varepsilon + (\Delta V_0'' + i\Delta V_0')e^{\varepsilon i}\varepsilon,$$

forme indiquée à l'art. 15.

22.

Calcul de $\mathbf{h}_0$. — En ayant égard aux seuls termes dont on a besoin ici, il vient

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = i(G)_1 e^{(\varepsilon-\eta)\iota} + i(H)_1 e^{(\varepsilon+\eta)\iota};$$

soient, de plus,

$$\begin{aligned} V + X + T &= (M) e^{(-\eta+\varepsilon)\iota} + (N)_0 e^{\eta\iota} + (N)_1 e^{(\eta+\varepsilon)\iota}, \\ T + \overline{T} + X &= (P)_0 e^{\eta\iota}, \\ D &= (Q)_1 e^{(-\eta+\varepsilon)\iota} + (R)_0 e^{\eta\iota} + (R)_1 e^{(\eta+\varepsilon)\iota}, \\ E &= S_1 e^{(-\eta+\varepsilon)\iota} + T_1 e^{(\eta+\varepsilon)\iota}. \end{aligned}$$

Je néglige dans E le terme en $e^{\eta\iota}$, parce que la multiplication par $\frac{\Delta u_1}{\cos i}$ ne donnerait pas avec lui de terme en $e^{\eta\iota}$. Les valeurs numériques des coefficients précédents sont du reste connues par le calcul des perturbations du second ordre. On a aussi

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = -e\mu + \tfrac{1}{2}(\mu - i\lambda) e^{\varepsilon\iota},$$

$$\frac{\Delta u_1}{\cos i} = \tfrac{1}{2}(\lambda + i\mu) e^{\varepsilon\iota};$$

et ensuite

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Delta\varepsilon &= [\tfrac{1}{2}(e\gamma + i\beta) i G_1 - \tfrac{1}{2}(\beta + ie\gamma)(H)_1] e^{\eta\iota}, \\ (V + X + T)\Delta\nu &= [(\alpha - e\beta)(N)_0 - \tfrac{1}{2}(\beta - ie\gamma) M_1 - \tfrac{1}{2}(\beta + ie\gamma)] e^{\eta\iota}, \\ 2(T + X + \overline{T}) \frac{\Delta h}{h} &= (-\alpha + 2e\beta)(P)_0 e^{\eta\iota}, \\ D \frac{\Delta u}{\cos i} &= [-e\mu(R)_0 + \tfrac{1}{2}(\mu - i\lambda) Q_1 + \tfrac{1}{2}(\mu + i\lambda)(R)_1] e^{\eta\iota}, \\ E \frac{\Delta u_1}{\cos i} &= [\tfrac{1}{2}(\lambda + i\mu)(S)_1 + \tfrac{1}{2}(\lambda - i\mu) T_1] e^{\eta\iota}. \end{aligned}$$

Or, $(\mathbf{h})_0$ est le coefficient de $e^{\eta\iota}$ dans L; l'addition des cinq dernières lignes donne donc

$$\begin{aligned} (\mathbf{h})_0 = \alpha[(N)_0 - (P)_0] & \\ + \tfrac{1}{2}\beta[-G_1 - (H)_1 - 2e(N)_0 - M_1 - (N)_1 + 4e(P)_1] & \\ + \tfrac{1}{2} ie\gamma [G_1 - (H)_1 + M_1 - (N)_1] & \\ + \tfrac{1}{2}\gamma[-iQ_1 + i(R)_1 + (S)_1 + T_1] & \\ + \tfrac{1}{2}\mu[-2e(R)_0 + Q_1 + (R)_1 + i(S)_1 - iT_1], & \end{aligned}$$

équation qui se dédouble et donne

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}'_0 = \alpha(N'_0 - P'_0) &+ \tfrac{1}{2}\beta[-G'_1 - H'_1 - M'_1 - N'_1 - 2e(2P'_0 - N'_0)] \\
&+ \tfrac{1}{2}e\gamma(G''_1 + H''_1 + M''_1 + N''_1) \\
&+ \tfrac{1}{2}\lambda(-Q'_1 + R'_1 + S'_1 + T'_1) \\
&+ \tfrac{1}{2}\mu(-2eR''_0 + Q''_1 + R''_1 - S''_1 - T''_1), \\
\mathbf{h}''_0 = \alpha(N''_0 - P''_0) &+ \tfrac{1}{2}\beta[G''_1 - H''_1 + M''_1 - N''_1 + 2e(2P''_1 - N''_0)] \\
&+ \tfrac{1}{2}e\gamma(G'_1 - H'_1 + M'_1 + N'_1) \\
&+ \tfrac{1}{2}\lambda(-Q''_1 + R''_1 + S''_1 - T''_1 \\
&+ \tfrac{1}{2}\mu(-2eR'_0 - Q'_1 + R'_1 + S'_1 + T'_1).
\end{aligned}$$

23.

Calcul de **v**. — En considérant les seuls termes nécessaires ici, on a

$$\frac{U}{\cos i} = iU_1\,e^{(\varepsilon-\eta)t} + iV_1\,e^{(\varepsilon+\eta)t},$$

$$\frac{\partial U}{\cos i\,\partial\varepsilon} = -U_1\,e^{(\varepsilon-\eta)t} - V_1\,e^{(\varepsilon+\eta)t}.$$

Soient, de plus,

$$\frac{2U+Y}{\cos i} = (A)_1\,e^{(-\eta+\varepsilon)t} + (B)_0\,e^{\eta t} + (B)_1\,e^{(\eta+\varepsilon)t},$$

$$\frac{D''_1}{\cos i} = (C)_1\,e^{(-\eta+\varepsilon)t} + (D)_0\,e^{\eta t} + (D)_1\,e^{(\eta+\varepsilon)t},$$

$$\frac{E''}{\cos i} = E_1\,e^{(-\eta+\varepsilon)t} + F_1\,e^{(\eta+\varepsilon)t};$$

et ensuite

$$\frac{\partial U}{\cos i\,\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon = \tfrac{1}{2}[(e\gamma + i\beta)(U)_1 + (e\gamma - i\beta)V_1]\,e^{\eta t},$$

$$\frac{2U+Y}{\cos i}\Delta\nu = [(\alpha - e\beta)(B)_0 - \tfrac{1}{2}(\beta - ie\gamma)A_1 - \tfrac{1}{2}(\beta + ie\gamma)(B)_1]\,e^{\eta t},$$

$$\frac{D'_1}{\cos i}\,\frac{\Delta u}{\cos i} = [-e\mu(D)_0 + \tfrac{1}{2}(\mu - i\lambda)C_1 + \tfrac{1}{2}(\mu + i\lambda)(D)_1]\,e^{\eta t},$$

$$\frac{E''_1}{\cos i}\,\frac{\Delta U}{\cos i} = \tfrac{1}{2}[(\lambda + i\mu)(\mathrm{E})_1 + (\lambda - i\mu)F_1]\,e^{\eta t},$$

puis, en additionnant les quatre lignes précédentes,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} = \alpha(B)_0 &+ \tfrac{1}{2}\beta[-2e(B)_0 - A_1 - (B)_1 + i(U)_1 - iV_1] \\
&+ \tfrac{1}{2}e\gamma[(U)_1 + V_1 + iA_1 - i(B)_1] \\
&+ \tfrac{1}{2}\lambda[-iC_1 + i(D)_1 + (E)_1 + F_1] \\
&+ \tfrac{1}{2}\mu[-2e(D)_0 + C_1 + (D)_1 + i(E)_1 - iF_1];
\end{aligned}
$$

cette équation se dédouble et donne

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}' = \alpha B'_0 &+ \tfrac{1}{2}\beta(-2eB'_0 - A'_1 - B'_1 - U''_1 + V''_1) \\
&+ \tfrac{1}{2}e\gamma(U'_1 + V'_1 - A''_1 + B''_1) \\
&+ \tfrac{1}{2}\lambda(-C''_1 - D''_1 + E'_1 + F'_1) \\
&+ \tfrac{1}{2}\mu(-2eD'_0 + C''_1 + D'_1 - E''_1 + F''_1), \\
\mathbf{v}'' = \alpha B''_0 &+ \tfrac{1}{2}\beta(-2eB''_0 - A''_1 - B''_1 + U'_1 - V'_1) \\
&+ \tfrac{1}{2}e\gamma(U''_1 - V''_1 + A'_1 - B'_1) \\
&+ \tfrac{1}{2}\lambda(-C'_1 + D'_1 + E''_1 - F''_1) \\
&+ \tfrac{1}{2}\mu(-2eD''_0 - C''_1 + D''_1 + E'_1 - F'_1).
\end{aligned}
$$

24.

Pour avoir la correction totale des coefficients de perturbations, il faut encore tenir compte de la variation que produit Δn dans les petits diviseurs. Si l'on désigne par F la fonction dans l'intégrale de laquelle Δn amène une correction, il faudra prendre la variation de

$$\int F d\varepsilon = -\frac{iB}{j - j'N} e^{\varphi i} = \frac{n}{jn - j'n'} \times -iB e^{\varphi i},$$

ce qui donne

$$\Delta \int F d\varepsilon = -\frac{j'N}{j - j'N} \frac{\Delta n}{n} \times -\frac{iB}{j - j'N} e^{\varphi i},$$

ou bien

$$\Delta \int F de = \chi(j, j') \int F de,$$

en posant

$$\chi(j, j') = -\frac{j'N}{j - j'N} \frac{\Delta n}{n}.$$

La fonction χ que je viens d'introduire se distingue de la fonc-

tion f, art. 42, ***Première partie***, en ce que le numérateur renferme $j'N$ au lieu de j. On aura donc ici, pour $\Delta P_{j,j'}$, ... , les formules de l'article précité, en y remplaçant f par χ.

---

§ III.

Transformation des perturbations dépendant des éléments osculateurs en perturbations dépendant des éléments moyens. Détermination des éléments moyens.

25.

Les perturbations correspondantes aux éléments moyens étant toujours les plus petites en valeur totale, il y a avantage à les employer. Soient donc c_0, a_0, e_0, ϖ_0, i_0, θ_0 les éléments auxquels se rapportent les perturbations $n\delta z$, ν, $\frac{u}{\cos i}$, qu'on vient de considérer; (c), (a), (e), (χ), (i), (σ) les éléments auxquels se rapportent les perturbations cherchées, $n\delta(z)$, (ν), $\frac{(u)}{\cos i}$. Les éléments des deux systèmes diffèrent de quantités de l'ordre des forces perturbatrices. r et v, étant des coordonnées idéales, ont les mêmes valeurs dans chacun de ces systèmes d'éléments et de perturbations correspondantes; il faut donc satisfaire d'abord aux deux systèmes

$$
\begin{array}{ll}
nt + c_0 + n\delta z = \bar{\varepsilon} - e_0 \sin\bar{\varepsilon}, & nt + (c) + n\delta(z) = (\varepsilon) - (e)\sin\bar{\varepsilon}, \\
\bar{r}\cos\bar{w} = a_0(\cos\bar{\varepsilon} - e_0), & (r)\cos(w) = (a)\cos(\varepsilon) - (a)(e), \\
\bar{r}\sin\bar{w} = a_0 f_0 \sin\bar{\varepsilon}, & (r)\sin(w) = (a)(f)\sin\bar{\varepsilon}, \\
v = \bar{w} + \varpi_0, & v = (w) + (\chi), \\
r = \bar{r}(1+\nu), & r = (r)[1 + (\nu)], \\
a_0^3 n_0^2 = \mu, & a^3 n^2 = \mu,
\end{array}
$$

dans lesquels n est toujours la vraie valeur du moyen mouvement.

26.

En négligeant les puissances de la force perturbatrice supérieures à la seconde, et en posant

$$\begin{aligned} \Delta n\delta z &= n\delta(z) - n\delta z, \\ \Delta c &= (c) - c_0, \\ \Delta e &= (e) - e_0, \\ \Delta \chi &= (\chi) - \varpi_0, \end{aligned}$$

on a

$$\Delta v = \Delta \bar{w} + \Delta \chi = \frac{\partial \bar{w}}{\partial g} \Delta g + \frac{\partial \bar{w}}{\partial e} \Delta e + \Delta \chi,$$

où $g = nt + c_0$; comme v ne varie pas et que

$$\Delta g = \Delta n\delta z + \Delta c,$$

il vient

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \bar{w}}{\partial g} (\Delta n\delta z + \Delta c) + \frac{\partial \bar{w}}{\partial e} \Delta e + \Delta \chi \\ + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial g^2} (\Delta n\delta z + \Delta c)^2 + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial e^2} \Delta e^2 + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial e \partial g} (\Delta n\delta z + \Delta c) \Delta e. \end{aligned}$$

Négligeant les quantités du second ordre, on tire de cette équation

$$\Delta n\delta z + \Delta c = -\frac{\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial e}}{\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial g}} \Delta e - \frac{1}{\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial g}} \Delta \chi,$$

d'où

$$(\Delta n\delta z + \Delta c)^2 = \frac{\left(\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial e}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial g}\right)^2} \Delta e^2 + \frac{1}{\left(\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial g}\right)^2} \Delta \chi^2 + 2 \frac{\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial e}}{\left(\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial g}\right)^2} \Delta e \Delta \chi;$$

substituant ces deux valeurs dans l'équation qui précède, on a

$$\Delta n\delta z = -\Delta c - \frac{\dfrac{\partial w}{\partial e}}{\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial g}} \Delta e - \frac{1}{\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial g}} \Delta \chi$$

$$+\left\{\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial e^2}}{2\frac{\partial w}{\partial g}}-\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial g\partial e}\frac{\partial w}{\partial e}}{\left(\frac{\partial w}{\partial g}\right)^2}+\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial g^2}\left(\frac{\partial w}{\partial e}\right)^2}{2\left(\frac{\partial w}{\partial g}\right)^3}\right\}\Delta e^2$$

$$+\left\{\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial g\partial e}}{\left(\frac{\partial w}{\partial g}\right)^2}-\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial g^2}\frac{\partial w}{\partial e}}{\left(\frac{\partial w}{\partial g}\right)^3}\right\}\Delta e\Delta\chi-\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial g^2}}{2\left(\frac{\partial w}{\partial g}\right)^3}\Delta\chi^2,$$

où, pour abréger, on a écrit w au lieu de $\bar{w}$. En posant

$$H=\frac{\frac{\partial w}{\partial e}}{\frac{\partial w}{\partial g}},\quad K=\frac{1}{\frac{\partial w}{\partial g}},$$

il vient

$$\frac{\partial H}{\partial g}=\frac{\frac{\partial w}{\partial g}\frac{\partial^2 w}{\partial e\partial g}-\frac{\partial w}{\partial e}\frac{\partial^2 w}{\partial g^2}}{\left(\frac{\partial w}{\partial g}\right)^2},\quad \frac{\partial K}{\partial g}=-\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial g^2}}{\left(\frac{\partial w}{\partial g}\right)^2},$$

d'où

$$\begin{aligned}\Delta n\delta z=&-\Delta c-H\Delta e-K\Delta\chi\\&+\tfrac{1}{2}\left(H\frac{\partial H}{\partial g}-\frac{\partial H}{\partial e}\right)\Delta e^2+\left(H\frac{\partial K}{\partial g}-\frac{\partial K}{\partial e}\right)\Delta e\Delta\chi\\&+\tfrac{1}{2}K\frac{\partial K}{\partial g}\Delta\chi^2.\end{aligned}$$

Continuant à écrire, pour abréger, w, r, au lieu de $\bar{w}$, $\bar{r}$; $a, e, \ldots$ pour $a_0, e_0, \ldots$, on a

$$\frac{\partial w}{\partial g}=\frac{a^2 f}{r^2},\quad \frac{\partial w}{\partial e}=\frac{\sin w}{f}(2+e\cos w);$$

par suite,

$$H=\frac{r^2\sin w}{a^2 f^2}(2+e\cos w),\quad K=\frac{r^2}{a^2 f},$$

et, comme on a

$$\frac{\partial r}{\partial g}=\frac{ae\sin w}{f},\quad \frac{\partial r}{\partial e}=-a\cos w,$$

on obtient

$$\frac{\partial H}{\partial g} = \frac{\partial H}{\partial r}\frac{ae\sin w}{f} + \frac{\partial H}{\partial w}\frac{a^2 f}{r^2};$$

mais

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{2r\sin w}{a^2 f^3}(2 + e\cos w), \quad \frac{\partial H}{\partial w} = \frac{r^2}{a^2 f^3}(2\cos w + e\cos 2w),$$

donc

$$\frac{\partial H}{\partial g} = \frac{r}{af^4}[3e + (2 + e^2)\cos w].$$

De même, en désignant par $\left(\frac{\partial H}{\partial e}\right)$ la dérivée de H par rapport à e entrant explicitement dans cette fonction, on a

$$\frac{\partial H}{\partial e} = \left(\frac{\partial H}{\partial e}\right) + \frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial e} + \frac{\partial H}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial e},$$

ou, par substitution,

$$\frac{\partial H}{\partial e} = \frac{r^2\sin w}{a^2 f^5}[4e + (1 + e^2)\cos w].$$

On a aussi

$$\frac{\partial K}{\partial g} = \frac{2re\sin w}{af^2},$$

$$\frac{\partial K}{\partial e} = \frac{r^2 e}{a^2 f^3} - \frac{2r}{af}\cos w.$$

Introduisant maintenant l'anomalie excentrique, il vient

$$H = \frac{2 - e^2}{f^2}\sin\varepsilon - \frac{e\sin 2\varepsilon}{2f^2},$$

$$K = \frac{2 + e^2}{2f} - \frac{2e}{f}\cos\varepsilon + \frac{e^2\cos 2\varepsilon}{2f},$$

$$\frac{\partial H}{\partial g} = \frac{e}{f^2} + \frac{2\cos\varepsilon}{f^2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial e} = \frac{3e - e^3}{f^4}\sin\varepsilon + \frac{1 - 3e^2}{2f^4}\sin 2\varepsilon,$$

$$\frac{\partial K}{\partial g} = \frac{2e\sin\varepsilon}{f},$$

$$\frac{\partial K}{\partial e} = \frac{6e - 3e^3}{2f^3} - \frac{2\cos\varepsilon}{f^3} + \frac{e^3\cos 2\varepsilon}{2f^3}.$$

Substituant dans l'expression de $\Delta n \delta z$ donnée plus haut, il vient

$$
(34)\left\{\begin{aligned}
\Delta n \delta z = & - \Delta c \\
& - \left(\frac{2-e^2}{f^2}\sin\varepsilon - \frac{e\sin 2\varepsilon}{2f^2}\right)\Delta e \\
& - \left(\frac{2+e^2}{2f^2} - \frac{2e\cos\varepsilon}{f} + \frac{e^2\cos 2\varepsilon}{2f}\right)\Delta\chi \\
& + \left(-\frac{3e}{4f^4}\sin\varepsilon + \frac{3}{4f^4}\sin 2\varepsilon - \frac{e}{4f^4}\sin 3\varepsilon\right)\Delta e^2 \\
& - \left(\frac{2e-e^3}{2f^3} - \frac{4-e^2}{2f^3}\cos\varepsilon + \frac{4e-e^3}{2f^3}\cos 2\varepsilon - \frac{e^2}{2f^3}\cos 3\varepsilon\right)\Delta e \Delta\chi \\
& + \left(\frac{4e+3e^3}{4f^2}\sin\varepsilon - \frac{e^2}{f^2}\sin 2\varepsilon + \frac{e^3}{4f^2}\sin 3\varepsilon\right)\Delta\chi^2 .
\end{aligned}\right.
$$

Il faut, dans cette relation, lire $\bar{\varepsilon}$, e_0 là où l'on a écrit ε, e.

27.

Posant, de plus,

$$
\begin{aligned}
\Delta r &= (r) - \bar{r}, \\
\Delta \nu &= (\nu) - \nu, \\
\Delta a &= (a) - a, \\
\Delta n &= n - n_0,
\end{aligned}
$$

et, se rappelant que r ne change pas de valeur avec le système d'éléments elliptiques, les relations $r = (r)[1 + (\nu)] = \bar{r}(1+\nu)$ donnent

$$(r) - \bar{r} + (r)[(\nu) - \nu] + \nu[(r) - \bar{r}] = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\Delta\nu = -\frac{1+\nu}{(r)}\Delta r,$$

ou bien

$$\Delta\nu = -\frac{(1+\nu)\Delta r}{\bar{r}+\Delta r}.$$

On a, de plus,

$$r - \bar{r} = \bar{r}\nu \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta r}{\bar{r}} = \nu,$$

et

$$\log\left(\frac{r}{\bar{r}}\right) = \nu - \tfrac{1}{2}\nu^2 + \cdots,$$

ou, dans une première approximation,

$$\nu = \log\left(\frac{r}{\bar{r}}\right),$$

et, en allant jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement,

$$\nu = \log\left(\frac{r}{\bar{r}}\right) + \tfrac{1}{2}\nu^2 = \log\left(\frac{r}{\bar{r}}\right) + \tfrac{1}{2}\left[\log\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)\right]^2,$$

d'où enfin

$$\frac{\Delta r}{\bar{r}} = \Delta\log\bar{r} + \tfrac{1}{2}(\Delta\log\bar{r})^2.$$

On a aussi

$$\frac{\Delta\nu}{1+\nu} = -\frac{\Delta r}{\bar{r}+\Delta r} = -\frac{\Delta r}{\bar{r}} + \left(\frac{\Delta r}{\bar{r}}\right)^2,$$

et comme

$$\frac{\Delta r}{\bar{r}} = \log\left(\frac{r}{\bar{r}}\right) + \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\Delta r}{\bar{r}}\right)^2 = \left(\log\frac{r}{\bar{r}}\right)^2,$$

il vient

$$\frac{\Delta\nu}{1+\nu} = -\log\frac{r}{\bar{r}} + \tfrac{1}{2}\left(\log\frac{r}{\bar{r}}\right)^2,$$

ou

$$\frac{\Delta\nu}{1+\nu} = -\Delta\log\bar{r} + \tfrac{1}{2}(\Delta\log\bar{r})^2.$$

De l'équation

$$\bar{r} = \frac{a_0 f_0^2}{1+e_0\cos\bar{w}},$$

après y avoir remplacé a_0 par sa valeur

$$a_0 = \left(\frac{\mu}{n_0^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

on tire

$$\log\bar{r} = \tfrac{1}{3}\log\mu - \tfrac{2}{3}\log n_0 + 2\log f_0 - \log(1+e_0\cos\bar{w}),$$

où $\bar{r}$ est fonction de n_0, e_0 et $\bar{w}$. Or, des valeurs de v, art. 25, on déduit $\Delta w = -\Delta\chi$; alors l'équation précédente donne, dans une première approximation,

$$\Delta\log\bar{r} = -\tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n_0} - \frac{2e_0+(1+e_0^2)\cos\bar{w}}{f_0^2(1+e_0\cos\bar{w})}\Delta e_0 - \frac{e_0\sin\bar{w}}{1+e_0\cos\bar{w}}\Delta\chi,$$

mais

$$\frac{\partial \log \bar{r}}{\partial e_0} = -\frac{2e_0 + (1+e_0^2)\cos\bar{w}}{f_0^2(1+e_0\cos\bar{w})} = -\frac{2e_0}{f_0} - \frac{\bar{r}\cos\bar{w}}{a_0 f_0^2},$$

$$\frac{\partial \log \bar{r}}{\partial \bar{w}} = \frac{e_0 \sin\bar{w}}{1+e_0\cos\bar{w}} = \frac{e_0 \bar{r}\sin\bar{w}}{a_0 f_0^2},$$

de sorte que, en ayant égard aux quantités du second ordre, on a

$$\begin{aligned}\Delta \log \bar{r} = & -\tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n_0} + \frac{\partial \log \bar{r}}{\partial e_0}\Delta e_0 - \frac{\partial \log \bar{r}}{\partial \bar{w}}\Delta\chi \\ & + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{n_0}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \log \bar{r}}{\partial e^2}\Delta e_0^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \log \bar{r}}{\partial \bar{w}^2}\Delta\chi^2 - \frac{\partial^2 \log \bar{r}}{\partial e_0 \partial \bar{w}}\Delta e \Delta\chi,\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\nu}{1+\nu} = & \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n} - \frac{\partial \log r}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial \log r}{\partial w}\Delta\chi \\ & - \tfrac{1}{9}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 - \tfrac{2}{3}\frac{\partial \log r}{\partial e}\frac{\Delta n}{n}\Delta e + \tfrac{2}{3}\frac{\partial \log r}{\partial w}\frac{\Delta n}{n}\Delta\chi \\ & - \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \log r}{\partial e^2} - \left(\frac{\partial \log r}{\partial e}\right)^2\right]\Delta e^2 + \left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial e \partial w} - \frac{\partial \log r}{\partial e}\frac{\partial \log r}{\partial w}\right)\Delta e \Delta\chi \\ & - \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \log r}{\partial w^2} - \left(\frac{\partial \log r}{\partial w}\right)^2\right]\Delta\chi^2,\end{aligned}$$

où, pour abréger, j'ai écrit r, w, e, ... pour $\bar{r}$, $\bar{w}$, e_0, ...

De l'expression ci-dessus de $\log \bar{r}$, on tire successivement

$$\frac{\partial \log r}{\partial e} = -\frac{2e}{f^2} - \frac{\cos w}{1+e\cos w},$$

$$\frac{\partial \log r}{\partial w} = \frac{e \sin w}{1+e\cos w},$$

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial e^2} = -\frac{2(1+e^2)}{f^4} + \frac{r^2\cos^2 w}{a^2 f^4},$$

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial w \partial e} = \frac{r^2 \sin w}{a^2 f^4},$$

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial w^2} = \frac{er\cos w}{af^2} + \frac{e^2 r^2 \sin^2 w}{a^2 f^4}.$$

Si l'on introduit l'anomalie excentrique, on a

$$\frac{\partial \log r}{\partial e} = -\frac{e + \cos \varepsilon}{f^2},$$

$$\frac{\partial \log r}{\partial w} = \frac{e \sin \varepsilon}{f},$$

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial e^2} = -\frac{2(1+e^2)}{f^4} - \frac{4e\cos\varepsilon}{f^4},$$

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial w \partial e} = \frac{\sin \varepsilon}{f^3}(1 - e\cos\varepsilon),$$

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial w^2} = \frac{e(\cos\varepsilon - e]}{f^2} + \frac{e^2 \sin\varepsilon}{f}\frac{\sin\varepsilon}{f},$$

et enfin

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta\nu}{1+\nu} &= \tfrac{3}{2}\frac{\Delta n}{n} + \frac{e+\cos\varepsilon}{f^2}\Delta e + \frac{e\sin\varepsilon}{f}\Delta\chi \\ &- \tfrac{1}{9}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 + \tfrac{2}{3}\frac{e+\cos\varepsilon}{f^2}\frac{\Delta n}{n}\Delta e + \tfrac{2}{3}\frac{e\sin\varepsilon}{f}\frac{\Delta n}{n}\Delta\chi \\ &+ \left(\frac{1+e^2}{f^4} + \frac{2e\cos\varepsilon}{f^4}\right)\Delta e^2 + \frac{1+e^2}{f^3}\sin\varepsilon\,.\,\Delta e\Delta\chi \\ &+ \left(\frac{e^2}{2f^2} - \frac{e\cos\varepsilon}{2f^2}\right)\Delta\chi^2, \end{aligned} \right.$$

où il faut remplacer e, ε, f par e_0, $\bar{\varepsilon}$, f_0.

28.

La latitude ne change pas, que l'on exprime les perturbations soit à l'aide des éléments osculateurs, soit à l'aide des éléments moyens; il en résulte

$$\begin{aligned} r\sin b &= r\sin i_0 \sin(v - \theta_0) + a_0(1+\nu)u \\ &= r\sin(i)\sin[v - (\sigma)] + (a)[1 + (\nu)](u); \end{aligned}$$

de sorte qu'en posant

$$\Delta u = \frac{(a)[1+(\nu)]}{a_0(1+\nu)}(u) - u,$$

et, en remplaçant v par $\bar{w}+\varpi_0$, les équations précédentes donnent

$$\Delta u = \frac{\bar{r}}{a_0}\sin i_0 \sin(\bar{w}+\varpi_0-\theta_0) - \frac{\bar{r}}{a_0}\sin(i)\sin(\bar{w}+\varpi_0-\theta_0)\cos[(\sigma)-\theta_0]$$
$$+\frac{\bar{r}}{a_0}\sin(i)\cos(\bar{w}+\varpi_0-\theta_0)\sin[(\sigma)-\theta_0].$$

Introduisant l'anomalie excentrique et posant

$$(36)\qquad \begin{cases} \sin(i)\sin[(\sigma)-\theta_0] = \beta\cos i_0, \\ \sin(i)\cos[(\sigma)-\theta_0] = \gamma\cos i_0 + \sin i_0, \end{cases}$$

il vient

$$(37)\qquad \begin{cases} \Delta u = -e_0[\beta\cos(\varpi_0-\theta_0)-\gamma\sin(\varpi_0-\theta_0)]\cos i_0 \\ \qquad + [\beta\cos(\varpi_0-\theta_0)-\gamma\sin(\varpi_0-\theta_0)]\cos i_0 \cos\bar{\varepsilon} \\ \qquad - f_0[\beta\sin(\varpi_0-\theta_0)+\gamma\cos(\varpi_0-\theta_0)]\cos i_0 \sin\bar{\varepsilon}. \end{cases}$$

En traitant les équations (36) comme celles de l'art. 8, on obtient

$$(i) = i_0 + \gamma + \tfrac{1}{2}\beta^2\cot i_0 + \tfrac{1}{2}\gamma^2\operatorname{tang} i_0,$$
$$(\sigma) = \theta_0 + \beta\cot i_0 - \beta\gamma\cot i_0.$$

De même, en désignant par (θ) la longitude du nœud et par (ϖ) celle du périhélie en fonction des éléments moyens, on a, toujours d'après le même article, les expressions finales

$$(\theta) = \theta_0 + \frac{\beta}{\sin i_0} - \frac{\beta\gamma(2-3\sin^2 i_0)}{2\sin^2 i_0\cos i_0} + \Delta\Gamma,$$
$$(\varpi) = (\chi) + \beta\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}i_0 + \beta\gamma\frac{(1+2\cos i_0)\operatorname{tang}^2 i_0}{2\cos i_0} + \Delta\Gamma,$$

où $\Delta\Gamma$ est une quantité qu'il faut calculer.

En négligeant les quantités du second ordre et éliminant β, on a

$$(\theta) = (\sigma) + \frac{2\sin^2\frac{1}{2}i_0}{\cos i_0}[(\sigma)-\theta_0],$$
$$(\varpi) = (\chi) + \frac{2\sin^2\frac{1}{2}i_0}{\cos i_0}[(\sigma)-\theta_0],$$

29.

Dans ce qui précède, on a égalé à 0 tant les variations de r que celles de $r\sin b$; par conséquent la variation de b a été aussi égalée

à 0. Il reste encore à annuler la variation de l, condition qui déterminera la valeur de $\Delta\Gamma$ précédemment introduite. Je reprends pour cela les équations, art. 18, *Première partie,*

$$(38)\quad\begin{cases}\cos b\sin(l-\theta_0-\Gamma)=\cos i_0\sin(v-\theta)-s\left(\operatorname{tang} i_0+\dfrac{q}{2\cos^2 i_0}\right),\\ \cos b\cos(l-\theta_0-\Gamma)=\cos(v-\theta_0)+\dfrac{sp}{2\cos^2 i_0};\end{cases}$$

alors, en posant

$$\Delta s=(s)-s,$$

et rappelant que $u=\dfrac{\bar r}{a}s$, l'expression précédente de Δu donne

$$\Delta s=\beta\cos i_0\cos(v-\theta_0)-\gamma\cos i_0\sin(v-\theta_0).$$

De plus, les équations de l'art. 10, *Première partie,* donnent

$$(p)=-(s)\cos(v-\theta_0)+\frac{\partial(s)}{\partial v}\sin(v-\theta_0),$$

$$(q)=(s)\sin(v-\theta_0)+\frac{\partial(s)}{\partial v}\cos(v-\theta_0);$$

remplaçant alors, dans ces équations, (s) par $s+\Delta s$, et observant de plus que

$$\Delta\frac{\partial s}{\partial v}=-\beta\cos i_0\sin(v-\theta_0)-\gamma\cos i_0\cos(v-\theta_0),$$

il vient

$$(p)=p-\beta\cos i_0,$$

$$(q)=q-\gamma\cos i_0.$$

De là résulte le deuxième système d'équations

$$(39)\quad\begin{cases}\cos b\sin[l-(\theta)-\Gamma]=\cos(i)\sin[v-(\sigma)]-(s)\operatorname{tang}(i)-\dfrac{(s)(q-\gamma\cos i_0)}{2\cos^2 i_0},\\ \cos b\cos[l-(\theta)-\Gamma]=\cos[v-(\sigma)]+\dfrac{(s)(p-\beta\cos i_0)}{2\cos^2 i_0};\end{cases}$$

qu'il faut identifier avec les équations (38).

30.

Pour cela, soient

$$\Delta i = (i) - i_0,$$
$$\Delta \sigma = (\sigma) - \theta_0,$$
$$\Delta \theta = (\theta) - \theta_0.$$

Les équations (39), développées par la série de Taylor, jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement, donnent

$$\begin{aligned}
&\cos b \sin(l - \theta_0 - \Gamma - \Delta\theta) \\
&\quad = \sin(v - \theta_0)(\cos i_0 - \sin i_0 \Delta i - \tfrac{1}{2}\cos i_0 \Delta i^2 - \tfrac{1}{2}\cos i_0 \Delta\sigma^2) \\
&\quad + \cos(v - \theta_0)(-\cos i_0 \Delta\sigma + \sin i_0 \Delta i \Delta\sigma) \\
&\quad - s\left(\operatorname{tang} i_0 + \frac{q}{2\cos^2 i_0}\right) \\
&\quad - \operatorname{tang} i_0 \Delta s - \frac{(2\Delta i - \gamma)\Delta s}{2\cos^2 i_0} - \frac{(2\Delta i - \gamma)s}{2\cos^2 i_0} - \frac{q\Delta s}{2\cos^2 i_0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos b \cos(l - \theta_0 - \Gamma - \Delta\theta) &= \cos(v - \theta_0).(1 - \tfrac{1}{2}\Delta\sigma^2) + \sin(v - \theta_0)\Delta\sigma \\
&+ \frac{sp}{2\cos^2 i_0} - \frac{\beta s}{2\cos i_0} - \frac{\beta\Delta s}{2\cos i_0} + \frac{p\Delta s}{2\cos^2 i_0}.
\end{aligned}$$

Multipliant membre à membre la première de ces équations par $\cos\Delta\theta = 1 - \frac{1}{2}\Delta\theta^2$, la seconde par $\sin\Delta\theta = \Delta\theta$, et ajoutant les produits, on a

$$\begin{aligned}
&\cos b \sin(l - \theta_0 - \Gamma) \\
&\quad = \cos i_0 \sin(v - \theta_0) - s\left(\operatorname{tang} i_0 + \frac{q}{2\cos^2 i_0}\right) \\
&\quad + \sin(v - \theta_0)(-\sin i_0 \Delta i - \tfrac{1}{2}\cos i_0 \Delta i^2 - \tfrac{1}{2}\cos i_0 \Delta\sigma^2 - \tfrac{1}{2}\cos i_0 \Delta\theta^2 + \Delta\sigma\Delta\theta) \\
&\quad + \cos(v - \theta_0)(-\cos i_0 \Delta\sigma + \Delta\theta + \sin i_0 \Delta i \Delta\sigma) \\
&\quad - \operatorname{tang} i_0 \Delta s - \frac{(2\Delta i - \gamma)\Delta s}{2\cos^2 i_0} - \frac{(2\Delta i - \gamma)s}{2\cos^2 i_0} - \frac{q\Delta s}{2\cos^2 i_0}.
\end{aligned}$$

Multipliant la première des équations ci-dessus par $-\sin\Delta\theta = -\Delta\theta$, la seconde par $\cos\Delta\theta = 1 - \frac{1}{2}\Delta\theta^2$, et ajoutant les produits, il vient

$$\begin{aligned}
\cos b \cos(l - \theta_0 - \Gamma) &= \cos(v - \theta_0) - \frac{sp}{2\cos^2 i_0} \\
&+ \cos(v - \theta_0)(\cos i_0 \Delta\sigma\Delta\theta - \tfrac{1}{2}\Delta\sigma^2 - \tfrac{1}{2}\Delta\theta^2) \\
&+ \sin(v - \theta_0)(\Delta\sigma - \cos i_0 \Delta\theta + \sin i_0 \Delta i \Delta\theta) \\
&+ \frac{(2\sin i_0 \Delta\theta - \beta)\Delta s}{2\cos i_0} + \frac{(2\sin i_0 \Delta\theta - \beta)s}{2\cos i_0} + \frac{p\Delta s}{2\cos^2 i_0}.
\end{aligned}$$

On a trouvé, art. 28,

$$\Delta i = \gamma + \tfrac{1}{2}\beta^2 \cot i_0 + \tfrac{1}{2}\gamma^2 \operatorname{tang} i_0,$$
$$\Delta \sigma = \beta \cot i_0 - \beta\gamma \cot^2 i_0,$$
$$\Delta \theta = \beta \operatorname{coséc} i_0 - \beta\gamma \frac{2-3\sin^2 i_0}{2\sin^2 i_0 \cos i_0} + \Delta\Gamma,$$

art. 10, *Première partie,*

$$s = q\sin(v-\theta_0) - p\cos(v-\theta_0),$$

et, art. 29;

$$\Delta s = \beta\cos i_0 \cos(v-\theta_0) - \gamma\cos i_0 \sin(v-\theta_0);$$

exprimant les coefficients des trois dernières lignes de chacune des équations ci-dessus en fonction de ces valeurs, il vient

$$\cos b\sin(l-\theta_0-\Gamma) = \cos i_0 \sin(v-\theta_0) - s\left(\operatorname{tang} i_0 + \frac{q}{2\cos^2 i_0}\right)$$
$$+ \cos(v-\theta_0)\left(\Delta\Gamma + \frac{p\gamma - q\beta}{2\cos^2 i}\right),$$
$$\cos b\cos(l-\theta_0-\Gamma) = \cos(v-\theta_0) + \frac{sp}{2\cos^2 i_0}$$
$$+ \sin(v-\theta_0)\left(-\cos i_0 \Delta\Gamma + \frac{q\beta - p\gamma}{2\cos i_0}\right),$$

équations qui deviennent identiques aux équations (38), en posant

$$\Delta\Gamma = \frac{q\beta - p\gamma}{2\cos^2 i_0};$$

cette dernière relation peut s'écrire

$$\Delta\Gamma = \frac{\Delta s \dfrac{\partial s}{\partial v} - s\dfrac{\partial \Delta s}{\partial v}}{2\cos^2 i_0},$$

ou bien

$$\Delta\Gamma = \frac{a_0}{r}\,\frac{\Delta u \dfrac{\partial u}{\partial \varepsilon} - u\dfrac{\partial \Delta u}{\partial \varepsilon}}{2f\cos^2 i_0},$$

expression en général insensible. Dans le cas exceptionnel où l'on doit tenir compte de cette valeur de $\Delta\Gamma$, il faut remarquer qu'elle renferme une partie constante, donnée par les expressions de (ϖ) et (θ), art. 28; la partie variable doit être jointe à la valeur de Γ, calculée d'abord à l'aide des éléments i_0, θ_0, etc.

31.

Je me propose maintenant d'exprimer les perturbations en fonction, non seulement des éléments moyens, mais aussi de l'anomalie excentrique qui résulte de (c) et de (e) par l'équation

$$nt+(c)=\varepsilon-(e)\sin\varepsilon.$$

En posant

$$\mathcal{A}=-\frac{2-e_0^2}{f_0^2}\sin\bar\varepsilon+\frac{e_0\sin 2\bar\varepsilon}{2f_0^2},$$

$$\mathcal{B}=-\frac{2+e_0^2}{2f_0}+\frac{2e_0\cos\bar\varepsilon}{f_0}-\frac{e_0^2\cos 2\bar\varepsilon}{2f_0};$$

et désignant par E l'ensemble des termes du second ordre, l'expression (34) devient

$$n\delta(z)-n\delta z=-\Delta c+\mathcal{A}\Delta e+\mathcal{B}\Delta\chi+E.$$

Les coefficients de cette expression, fonctions de $\bar\varepsilon$, sont liés avec $n\delta z$ par l'équation

$$nt+c+n\delta z=\bar\varepsilon-e_0\sin\bar\varepsilon,$$

et $n\delta z$ est développé, dans ce qui précède, en fonction de ε_0, qui dépend de

$$nt+c=\varepsilon_0-e_0\sin\varepsilon_0.$$

Il est avantageux d'exprimer aussi ces coefficients en fonction de ε_0. Pour obtenir ce résultat, je pose

$$A=-\frac{2-e_0^2}{f_0^2}\sin\varepsilon_0+\frac{e_0}{2f_0^2}\sin 2\varepsilon_0,$$

$$B=-\frac{2+e_0^2}{2f_0^2}+\frac{2e_0}{f_0}\cos\varepsilon_0-\frac{e_0^2}{2f_0}\cos 2\varepsilon_0,$$

d'où

$$\frac{\partial A}{\partial g}=-\frac{e_0}{f_0^2}-\frac{2\cos\varepsilon_0}{f_0^2},$$

$$\frac{\partial B}{\partial g}=-\frac{2e_0}{f_0}\sin\varepsilon_0.$$

Or, d'après les relations ci-dessus, on passe de l'équation qui lie ε_0 au temps à celle qui lie $\bar\varepsilon$ à la même variable, en changeant nt ou g

en $g + n\delta z$: on aura donc, en continuant à désigner par E l'ensemble des termes du second ordre,

$$\mathfrak{A} = A + \frac{\partial A}{\partial g} n\delta z,$$

$$\mathfrak{B} = B + \frac{\partial B}{\partial g} n\delta z,$$

$$n\delta(z) = n\delta z - \Delta c + A\Delta e + B\Delta\chi$$
$$+ \frac{\partial A}{\partial g} n\delta z \Delta e + \frac{\partial B}{\partial g} n\delta z \Delta\chi + E.$$

Pour exprimer maintenant $n\delta(z)$ en fonction de (c), (e), (χ), ε au lieu de c, e, χ, ε_0, j'observe que l'on a

$$(g) = nt + (c) = \varepsilon - (e)\sin\varepsilon,$$
$$nt + c = \varepsilon_0 - e_0 \sin\varepsilon_0,$$

de sorte que, si l'on pose de nouveau,

$$\Delta c = (c) - c,$$
$$\Delta e = (e) - e_0,$$
$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0,$$

il viendra

$$\Delta c = \Delta\varepsilon - (e)\sin\varepsilon + e_0 \sin\varepsilon_0,$$

d'où l'on tire, en négligeant les quantités de second ordre,

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta c}{1 - e_0\cos\varepsilon} + \frac{\sin\varepsilon}{1 - e_0\cos\varepsilon}\Delta e.$$

L'expression obtenue pour $n\delta z$ est, en outre, dans chacun de ses arguments, fonction de $j'Nc$, où c doit être remplacé par (c), à l'aide de la relation $c = (c) - \Delta c$. On aura, en tenant compte de toutes ces substitutions,

$$\mathfrak{A} = A + \frac{\partial A}{\partial g} n\delta z - \frac{\partial A}{\partial \varepsilon}\Delta\varepsilon - \frac{\partial A}{\partial e}\Delta e,$$

$$\mathfrak{B} = B + \frac{\partial B}{\partial g} n\delta z - \frac{\partial B}{\partial \varepsilon}\Delta\varepsilon - \frac{\partial B}{\partial e}\Delta e;$$

il faut aussi remplacer $n\delta z$ par

$$n\delta z - \frac{\partial . n\delta z}{\partial c}\Delta c - \frac{\partial . n\delta z}{\partial \varepsilon}\Delta\varepsilon,$$

ou, à cause de la valeur qu'on vient de trouver pour $\Delta\varepsilon$, par

$$n\delta z-\left(\frac{\partial.n\delta z}{\partial c}+\frac{\partial.n\delta z}{\partial\varepsilon}\frac{1}{1-e\cos\varepsilon}\right)\Delta c-\left(\frac{\partial.n\delta z}{\partial e}-\frac{\partial.n\delta z}{\partial\varepsilon}\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\right)\Delta e.$$

Des valeurs de A et de B, on tire

$$\frac{\partial A}{\partial e}=-\frac{2e}{f^4}\sin\varepsilon+\frac{1+e^2}{2f^4}\sin 2\varepsilon,$$

$$\frac{\partial B}{\partial e}=-\frac{4e-e^3}{2f^3}+\frac{2}{f^3}\cos\varepsilon-\frac{2e-e^3}{2f^3}\cos 2\varepsilon,$$

$$\frac{\partial A}{\partial\varepsilon}=-\frac{2-e^2}{f^2}\cos\varepsilon+\frac{e}{f^2}\cos 2\varepsilon,$$

$$\frac{\partial B}{\partial\varepsilon}=-\frac{2e\sin\varepsilon}{f}+\frac{e^2}{f}\sin 2\varepsilon,$$

de sorte qu'en substituant ces diverses valeurs dans l'expression de $n\delta(z)$, on a

$$n\delta(z)=n\delta z-\left(1+\frac{\partial.n\delta z}{\partial c}+\frac{\partial.n\delta z}{\partial\varepsilon}\frac{1}{1-e\cos\varepsilon}\right)\Delta c$$

$$+\left[-\frac{2-e^2}{f^2}\sin\varepsilon+\frac{e}{2f^2}\sin 2\varepsilon-\left(\frac{e}{f^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{f^2}\right)n\delta z-\frac{\partial.n\delta z}{\partial\varepsilon}\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\right]\Delta e$$

$$+\left(-\frac{2+e^2}{2f}+\frac{2e}{f}\cos\varepsilon-\frac{e^2}{2f}\cos 2\varepsilon-\frac{2e}{f}\sin\varepsilon.n\delta z\right)\Delta\chi$$

$$+\left(\frac{e}{f^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{f^2}\right)\Delta c\Delta e+\frac{2e}{f}\sin\varepsilon\Delta c\Delta\chi$$

$$+\left(\frac{9e-4e^3}{4f^4}\sin\varepsilon+\frac{5-6e^2}{4f^4}\sin 2\varepsilon-\frac{e}{4f^4}\sin 3\varepsilon\right)\Delta e^2$$

$$+\left(\frac{4e-2e^3}{2f^4}-\frac{e^2}{2f^3}\cos\varepsilon-\frac{4e-2e^3}{2f^3}\cos 2\varepsilon+\frac{e^2}{2f^3}\cos 3\varepsilon\right)\Delta e\Delta\chi$$

$$+\left(\frac{4e+e^3}{4f^2}\sin\varepsilon-\frac{e^2}{f^2}\sin 2\varepsilon+\frac{e^3}{4f^2}\sin 3\varepsilon\right)\Delta\chi^2.$$

32.

On peut aussi, par le même procédé, exprimer (ν) en fonction des mêmes éléments. En posant

$$\mathfrak{p}=\frac{e_0+\cos\bar{\varepsilon}}{f_0^2},\qquad \mathfrak{q}=\frac{e_0\sin\bar{\varepsilon}}{f_0},$$

$$P=\frac{e_0+\cos\varepsilon_0}{f_0^2},\qquad Q=\frac{e_0\sin\varepsilon_0}{f_0},$$

on a, en supprimant les indices,

$$\frac{\partial P}{\partial e}=\frac{1+e^2+2e\cos\varepsilon}{f^4},\qquad \frac{\partial Q}{\partial e}=\frac{1}{f^3}\sin\varepsilon,$$

$$\frac{\partial P}{\partial g}=-\frac{\sin\varepsilon}{f^2}\,\frac{1}{1-e\cos\varepsilon},\qquad \frac{\partial Q}{\partial g}=\frac{e\cos\varepsilon}{f}\,\frac{1}{1-e\cos\varepsilon},$$

$$\frac{\partial P}{\partial g}=-\frac{\sin\varepsilon}{f^2},\qquad \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}=\frac{e\cos\varepsilon}{f};$$

comme

$$\mathfrak{p}=P+\frac{\partial P}{\partial g}n\delta z-\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}\Delta\varepsilon-\frac{\partial P}{\partial e}\Delta e,$$

$$\mathfrak{q}=Q+\frac{\partial Q}{\partial q}n\delta z-\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\Delta\varepsilon-\frac{\partial Q}{\partial e}\Delta e,$$

et que, de plus, il faut remplacer ν par

$$\nu-\left(\frac{\partial\nu}{\partial c}+\frac{\partial\nu}{\partial\varepsilon}\,\frac{1}{1-e\cos\varepsilon}\right)\Delta c-\frac{\partial\nu}{\partial\varepsilon}\,\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta e,$$

il vient, par substitution dans l'équation (35),

$$\begin{aligned}
(\nu)=\nu&+\tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}+\frac{e+\cos\varepsilon}{f^2}\Delta e+\frac{e\sin\varepsilon}{f}\Delta\chi\\
&+\tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}\nu+\frac{e+\cos\varepsilon}{f^2}\nu\Delta e+\frac{e\sin\varepsilon}{f}\nu\Delta\chi\\
&-\frac{\partial\nu}{\partial\varepsilon}\,\frac{1}{1-e\cos e}\Delta c-\frac{\partial\nu}{\partial c}\Delta c-\frac{\partial\nu}{\partial\varepsilon}\,\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta e\\
&-\frac{\sin\varepsilon}{f^2}\,\frac{1}{1-e\cos\varepsilon}n\delta z\Delta e+\frac{e\cos\varepsilon}{f}\,\frac{1}{1-e\cos\varepsilon}n\delta z\Delta\chi\\
&-\tfrac{1}{9}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2+\tfrac{2}{3}\frac{e+\cos\varepsilon}{f^2}\,\frac{\Delta n}{n}\Delta e+\tfrac{2}{3}\frac{e\sin\varepsilon}{f}\,\frac{\Delta n}{n}\Delta\chi
\end{aligned}$$

$$+\frac{\sin\varepsilon}{f^2(1-e\cos\varepsilon)}\Delta c\Delta e-\frac{e\cos\varepsilon}{f(1-e\cos\varepsilon)}\Delta c\Delta\chi$$

$$+\left(\frac{1+e^2}{f^3}\sin\varepsilon-\frac{e\sin 2\varepsilon}{2f(1-e\cos\varepsilon)}\right)\Delta e\Delta\chi$$

$$+\left(\frac{e^2}{2f^2}-\frac{e\cos\varepsilon}{2f^2}\right)\Delta\chi^2+\frac{\sin^2\varepsilon}{f^2(1-e\cos\varepsilon)}\Delta e^2.$$

Si l'on pose $e=\sin\varphi$, $\zeta=\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi$, on a, pour servir au calcul de $n\delta(z)$ et de (ν), les formules suivantes

$$\frac{1}{1-e\cos\varepsilon}=\frac{1}{f}(1+2\zeta\cos\varepsilon+2\zeta^2\cos 2\varepsilon+\cdots),$$

$$\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}=(1+\zeta^2)(\sin\varepsilon+\zeta\sin 2e+\zeta^2\sin 3\varepsilon+\cdots),$$

$$\frac{e\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}=\frac{1}{f}(1-f+2\zeta\cos\varepsilon+2\zeta^2\cos 2\varepsilon+2\zeta^3\cos 3\varepsilon+\cdots),$$

$$\frac{\sin^2\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}=\tfrac{1}{2}(1+\zeta^2)[1+\zeta\cos\varepsilon-f(1+\zeta^2)(\cos 2\varepsilon+\zeta\cos 3\varepsilon+\cdots)],$$

$$\frac{e\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}=\zeta^2\sin\varepsilon+\zeta(1+\zeta^2)(\sin 2\varepsilon+\zeta\sin 3\varepsilon+\zeta^2\sin 4\varepsilon+\cdots).$$

33.

Pour développer l'expression (37) en fonction des mêmes éléments, je pose, pour abréger,

$$B=\beta\cos(\varpi_0-\theta_0)-\gamma\sin(\varpi_0-\theta_0),$$
$$C=f[\beta\sin(\varpi_0-\theta_0)+\gamma\cos(\varpi_0-\theta_0)],$$

ce qui donne

$$\frac{\Delta u}{\cos i_0}=-eB+B\cos\bar{\varepsilon}-C\sin\bar{\varepsilon};$$

remplaçant ici Δu par sa valeur de l'art. 28, il vient

$$\frac{(u)}{\cos i_0}=\left(\frac{u}{\cos i_0}-e_0B+B\cos\bar{\varepsilon}-C\sin\bar{\varepsilon}\right)\frac{a_0(1+\nu)}{a[1+(\nu)]}:$$

or,

$$\left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{n}{n_0}=1+\frac{n-n_0}{n_0}=1+\Delta n(n-\Delta n)^{-1}=1+\frac{\Delta n}{n},$$

$$\frac{a_0}{a} = \left(1 + \frac{\Delta n}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 + \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n},$$

$$(1+\nu)\,[1+(\nu)]^{-1} = 1 - [(\nu) - \nu],$$

par suite,

$$\frac{(u)}{\cos i_0} = \frac{u}{\cos i_0} - eB - C\sin\bar{\varepsilon} + B\cos\bar{\varepsilon}$$

$$+ \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}\frac{u}{\cos i} - \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}eB - \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}C\sin\bar{\varepsilon} + \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}B\cos\bar{\varepsilon}.$$

Pour remplacer dans cette expression $\bar{\varepsilon}$ par ε_0, il faut remplacer

$$\sin\bar{\varepsilon} \text{ par } \sin\varepsilon_0 + \frac{\partial \sin\varepsilon}{\partial g}n\delta z = \sin\varepsilon_0 + \frac{\cos\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0}n\delta z,$$

$$\cos\bar{\varepsilon} \text{ par } \cos\varepsilon_0 + \frac{\partial \cos\varepsilon}{\partial g}n\delta z = \cos\varepsilon_0 - \frac{\sin\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0}n\delta z,$$

ce qui donne

$$\frac{(u)}{\cos i} = \frac{u}{\cos i} - eB - C\sin\varepsilon + B\cos\varepsilon - \frac{C\cos\varepsilon}{1 - e\cos\varepsilon}n\delta z - \frac{B\sin\varepsilon}{1 - e\cos\varepsilon}n\delta z$$

$$+ \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}\frac{u}{\cos i} - \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}eB - \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}C\sin\varepsilon + \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}B\cos\varepsilon$$

$$- [(\nu) - \nu]\frac{u}{\cos i} + [(\nu) - \nu]eB + [(\nu) - \nu]C\sin\varepsilon - [(\nu) - \nu]B\cos\varepsilon,$$

où, pour abréger, on a écrit ε au lieu de ε_0.

Passant maintenant à l'expression de $\frac{(u)}{\cos i}$ en fonction de $\varepsilon, (c), (e)$, il vient

$$\frac{(u)}{\cos i} = \frac{u}{\cos i} - \frac{\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}}{\cos i}\left(\frac{\Delta c}{1 - e\cos\varepsilon} + \frac{\sin\varepsilon}{1 - e\cos\varepsilon}\Delta e\right) - \frac{\frac{\partial u}{\partial c}}{\cos i}\Delta c$$

$$- C\sin\varepsilon - C\cos\varepsilon\frac{n\delta z}{1 - e\cos\varepsilon} + C\cos\varepsilon\left(\frac{\Delta c}{1 - e\cos\varepsilon} + \frac{\sin\varepsilon}{1 - e\cos\varepsilon}\Delta e\right)$$

$$+ B\cos\varepsilon - B\sin\varepsilon.\frac{n\delta z}{1 - e\cos\varepsilon} + B\sin\varepsilon\left(\frac{\Delta c}{1 - e\cos\varepsilon} + \frac{\sin\varepsilon}{1 - e\cos\varepsilon}\Delta e\right)$$

$$+ \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}\left(\frac{u}{\cos i} - eB - C\sin\varepsilon + B\cos\varepsilon\right)$$

$$- [(\nu) - \nu]\left(\frac{u}{\cos i} - eB - C\sin\varepsilon + B\cos\varepsilon\right),$$

ou bien

$$\frac{(u)}{\cos i} = \frac{u}{\cos i} - eB - C\sin\varepsilon + B\cos\varepsilon$$

$$- \frac{\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}}{\cos i} \frac{\Delta c}{1 - e\cos\varepsilon} - \frac{\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}}{\cos i} \frac{\sin\varepsilon}{1 - e\cos\varepsilon} \Delta e - \frac{\frac{\partial u}{\partial c}}{\cos i} \Delta c$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{\Delta n}{n} \left(\frac{u}{\cos i} - eB - C\sin\varepsilon + B\cos\varepsilon \right)$$

$$- [(\nu) - \nu] \left(\frac{u}{\cos i} - eB - C\sin\varepsilon + B\cos\varepsilon \right)$$

$$- \frac{1}{1 - e\cos\varepsilon} (C\cos\varepsilon + B\sin\varepsilon) n\delta z$$

$$+ \frac{1}{1 - e\cos\varepsilon} (C\cos\varepsilon + B\sin\varepsilon) \Delta c$$

$$+ \frac{1}{1 - e\cos\varepsilon} (\tfrac{1}{2} C\sin 2\varepsilon + B\sin^2\varepsilon) \Delta e.$$

Dans la plupart des cas, beaucoup de ces termes sont insensibles.

33

Il faut maintenant introduire la condition pour que les nouveaux éléments elliptiques soient les éléments moyens.

Soit

$$n\delta z = (A)_1 e^{\varepsilon i} + (A)_2 e^{2\varepsilon i} + (A)_3 e^{3\varepsilon i} + \cdots;$$

substituant, dans l'expression de $n(\delta)z$, cette partie de $n\delta z$ indépendante de j', et ne conservant que les termes constants et ceux qui dépendent de $e^{\varepsilon i}$, remarquant, de plus, que c, qui entre toujours avec j', ne peut dès lors se trouver ici, on a

$$\frac{\partial . n\delta z}{\partial \varepsilon} = i [(A)_1 e^{\varepsilon i} + 2(A)_2 e^{2\varepsilon i} + 3(A)_3 e^{3\varepsilon i} + \cdots],$$

qu'il faut multiplier par

$$\frac{1}{1 - e\cos\varepsilon} = \frac{1}{f} [1 + \zeta(e^{\varepsilon i} + e^{-\varepsilon i}) + \zeta^2(e^{2\varepsilon i} + e^{-2\varepsilon i}) + \cdots],$$

pour avoir le coefficient de Δc dans $n\delta(z)$. Effectuant on trouve

$$1+\frac{1}{f}i\{2(A)_1\zeta+4(A)_2\zeta^2+6(A)_3\zeta^3+\cdots$$
$$+[(A)_1+2(A)_2\zeta+3(A)_3\zeta^2+\cdots+A_1\zeta^2+2A_2\zeta^3+\cdots]\}e^{\epsilon i}.$$

On a aussi

$$-\frac{\sin\epsilon}{1-e\cos\epsilon}\frac{\partial.n\delta z}{\partial\epsilon}=\frac{1+\zeta^2}{2}\{2(A)_1+4\zeta(A)_2+6\zeta^2(A)_3+\cdots$$
$$+[2(A)_2+3\zeta(A)_3+4\zeta^2(A)_4+\cdots$$
$$-A_1\zeta-2A_2\zeta^2-3A_3\zeta^3-\cdots]e^{\epsilon i}\},$$

et

$$-\frac{1}{f^2}(e+2\cos\epsilon)n\delta z=-\frac{1}{f^2}\{[e(A)_1+A_2]e^{\epsilon i}+2A_1\};$$

ajoutant enfin

$$\frac{i}{2f^2}(2-e^2)e^{\epsilon i}$$

à la somme de ces deux expressions, on obtient, pour le coefficient de Δe,

$$\frac{1+\zeta^2}{2}[2(A)_1+4\zeta(A)_2+6\zeta^2(A)_3+\cdots]-\frac{2A_1}{f^2}$$
$$+\Big\{\frac{1+\zeta^2}{2}[2(A)_2+3\zeta(A)_3+4\zeta^2(A)_4+\cdots-A_1\zeta-2A_2\zeta^2-3A_3\zeta^3-\cdots]$$
$$-\frac{1}{f^2}[e(A)_1+(A)_2]+\frac{i}{2f^2}(2-e^2)\Big\}e^{\epsilon i}.$$

On a encore

$$-\frac{e}{2f}\sin\epsilon.n\ z=\frac{ie}{f}[-2(A)_1-(A)_2e^{2\epsilon i}],$$

par suite, le coefficient de $\Delta\chi$ est

$$-\frac{2+e^2}{2f}-\frac{2ei(A)_1}{f}+\frac{e}{f}[1-i(A)_2]e^{\epsilon i}.$$

On peut aussi écrire, pour le coefficient de Δc,

$$1-\frac{2}{f}(\zeta A'_1+2\zeta^2A'_2+3\zeta^3A'_3+\cdots)$$
$$+\frac{1}{f}\{-(1-\zeta^2)(A''_1+2\zeta A''_2+3\zeta^2A''_3+\cdots)$$
$$+i(1+\zeta^2)(A'_1+2\zeta A'_2+3\zeta^2A'_3+\cdots)\}e^{\epsilon i};$$

pour le coefficient de Δe,

$$
\begin{aligned}
&(1+\zeta^2)(A'_1+2\zeta A'_2+3\zeta A'_3+\cdots)-\frac{2A'_1}{f^2}\\
&+\left\{\begin{aligned}
&\frac{1+\zeta^2}{2}[-\zeta A'_1+2(1-\zeta^2)A'_2+3(1-\zeta^2)A'_3+\cdots]-\frac{eA'_1+A'_2}{f^2}\\
&\quad+i\left\{\frac{1+\zeta^2}{2}[\zeta A''_1+2(1+\zeta^2)A''_2+3\zeta(1+\zeta^2)A''_3+\cdots]\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{f^2}eA''_1-\frac{1}{f^2}A''_2+\frac{2-e^2}{2f^2}\right\}
\end{aligned}\right\}e^{\varepsilon i};
\end{aligned}
$$

pour le coefficient de $\Delta\chi$,

$$
-\frac{2+e^2}{2f}+\frac{2eA'_1}{f}+\frac{e}{f}(1+A''_2-iA'_2)e^{\varepsilon i}.
$$

La substitution de ces résultats dans l'expression de $n\delta(z)$ donne

$$
\begin{aligned}
n\delta(z)=n\delta z&-\left[1-\frac{2}{f}(\zeta A'_1+2\zeta^2A''_2+3\zeta^3A''_3+\cdots)\right]\Delta c\\
&+\left[\left(1+\zeta^2-\frac{2}{f^2}\right)A'_1+(1+\zeta^2)(2\zeta A'_2+3\zeta^2A'_3+\cdots)\right]\Delta e\\
&-\left(\frac{2+e^2}{2f}-\frac{2eA'_1}{f}\right)\Delta\chi+\frac{e}{f^2}\Delta c\Delta e+\frac{2e-e^3}{f^4}\Delta e\Delta\chi\\
&+\left\{\begin{aligned}
&-\frac{1}{f}(1-\zeta^2)(A''_1+2\zeta A''_2+3\zeta^2A''_3+\cdots)\Delta c\\
&+\left\{-\left[\zeta(1+\zeta^2)+\frac{e}{f^2}\right]A'_1+\left(1-\zeta^4-\frac{1}{f^2}\right)A'_2\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1-\zeta^4}{2}(3\zeta A'_3+4\zeta^2A'_4+\cdots)\right\}\Delta e\\
&+\frac{e}{f}(1+A''_2)\Delta\chi-\frac{e}{4f^3}\Delta e\Delta\chi+\frac{1}{f^2}\Delta e\Delta c\\
&+i\left\{\begin{aligned}
&\frac{1+\zeta^2}{f}(A'_1+2\zeta A'_2+3\zeta^2A'_3+\cdots)\Delta c\\
&+\left\{\left[\frac{\zeta(1+\zeta^2)}{2}-\frac{e}{f^2}\right]A''_1+\left[(1+\zeta^2)^2-\frac{1}{f^2}\right]A''_2\right.\\
&\qquad\left.+\frac{(1+\zeta^2)^2}{2}(3\zeta A''_3+4\zeta^2A''_4+\cdots)+\frac{2-e^2}{f^2}\right\}\Delta e\\
&-\frac{e}{f}A'_2\Delta\chi-\frac{e}{f}\Delta c\Delta\chi-\frac{9e-4e^3}{8f^4}\Delta e^2-\frac{4e+e^3}{8f^2}\Delta\chi^2
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\}e^{\varepsilon i}.
\end{aligned}
$$

D'après l'art. 40, *Première partie*, les éléments moyens annulent les trois coefficients qui précèdent; les trois équations qui en résul-

tent, résolues par approximations successives, donnent les valeurs de Δc, $\Delta\chi$, Δe. On aura ensuite

$$(e) = e_0 + \Delta e,$$
$$(\chi) = \varpi_0 + \Delta\chi,$$
$$(c) = c_0 + \Delta c,$$

où (e), (χ), (c) sont les éléments moyens.

34.

Soient maintenant

$$n\delta z = A\mathrm{e}^{\varepsilon i},$$
$$(\nu) - \nu = F\mathrm{e}^{\varepsilon i},$$
$$\frac{u}{\cos i} = H\mathrm{e}^{\varepsilon i};$$

De là on tire

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}}{\cos i} = iH\mathrm{e}^{\varepsilon}, \quad \frac{\partial u}{\partial c} = 0,$$

et, en substituant dans l'art. 32, il vient

$$\frac{(u)}{\cos i} = \left\{ \begin{array}{l} H' + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}eBF'' - \frac{\zeta(1+\zeta^2)}{2}A'C - \frac{\zeta}{4(1+\zeta^2)}A''B \\ -(1+\zeta^2)\left(\frac{H''}{f} - \frac{1}{2}C\right)\Delta c - \frac{1}{2}\zeta\left[\frac{H'}{1+\zeta^2} - (1+\zeta^2)\frac{B}{2}\right]\Delta e \\ \qquad\qquad\qquad + \frac{2}{3}\left(H' + \frac{1}{2}B\right)\frac{\Delta n}{n} \\ +i\left\{ \begin{array}{l} -H'' + \frac{1}{2}fC - \frac{1}{2}eBF'' - \frac{\zeta(1+\zeta^2)}{2}A''C + \frac{\zeta}{4(1+\zeta^2)}A'B \\ -\left[\frac{1}{f}(1-\zeta^2)H' + \frac{B}{4(1+\zeta^2)}\right]\Delta c \\ \qquad - \frac{1}{2}\zeta\left(\frac{H''}{1+\zeta^2} + \frac{\zeta f}{e}C\right)\Delta e - \frac{2}{3}\left(H'' - \frac{1}{2}fC\right)\frac{\Delta n}{n} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \mathrm{e}^{\varepsilon i}.$$

En égalant à 0, d'après l'art. 40, *Première partie*, ce coefficient de la première puissance de $\mathrm{e}^{\varepsilon i}$, on a deux équations, à l'aide desquelles on déterminera B et C. On en tire approximativement

$$B = -2H' + 2eH'F'' + \zeta(1+\zeta^2)\frac{A'H''}{f} + \frac{\zeta}{1+\zeta^2}A''H',$$
$$C = 2H' - 2eH'F'' + \zeta(1+\zeta^2)A''H'' + \frac{f\zeta}{1+\zeta^2}A'H'.$$

On aura ensuite les quantités désignées par β et γ, à l'art. 28, par les équations suivantes

$$\beta = B\cos(\varpi_0 - \theta_0) + \frac{1}{f}C\sin(\varpi_0 - \theta_0),$$

$$\gamma = -B\sin(\varpi_0 - \theta_0) + \frac{1}{f}C\cos(\varpi_0 - \theta_0).$$

Le même article donne encore

$$\Delta i = \gamma + \frac{\beta^2}{2}\cot i_0 + \frac{\gamma^2}{2}\operatorname{tang} i_0,$$

$$\Delta\sigma = \beta\cot i_0 - \beta\gamma\cot^2 i_0;$$

par suite,

$$(i) = i_0 + \Delta i,$$

$$(\sigma) = \theta_0 + \Delta\sigma,$$

$$(\varpi) = (\chi) + \frac{2\sin^2\frac{1}{2}i_0}{\cos i_0}\Delta\sigma,$$

$$(\theta) = (\sigma) + \frac{2\sin^2\frac{1}{2}i_0}{\cos i_0}\Delta\sigma.$$

Ces recherches achèvent de déterminer les coefficients contenus dans les valeurs de $n\delta(z)$, (ν), $\frac{(u)}{\cos i}$, des art. 31, 32 et 33.

On exprime ainsi en fonction des éléments moyens les perturbations calculées d'abord en fonction des éléments fournis par l'observation, ce qui donne la solution complète du problème proposé.

ERRATA

Page 25, ligne 12, en descendant, lisez $(1-\beta^2)\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau^2}$, au lieu de $(1-\beta^2)\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau}$.

Page 25, ligne 7, en montant, lisez $\frac{\overline{\partial\beta}}{\partial\tau}$, au lieu de $\frac{\partial\beta}{\partial\tau}$.

Page 29, ligne 11, en descendant, lisez $u=\frac{r}{a_0}s$, au lieu de $u=\frac{r}{a_0}$.

Page 43, ligne 12, en descendant, lisez $\frac{\partial\Omega}{\partial w}$, au lieu de $\frac{\partial\Omega}{\partial Z}$.

Page 45, ligne 2, en montant, lisez $(H)_j$, au lieu de (H).

Page 46, ligne 9, en montant, lisez $(G)\,e^{-\gamma_i t}$, au lieu de $(G)\,e^{-\ t}$.

Page 48, ligne 7, en montant, lisez $\left(1+\frac{\delta h}{h_0}\right)^{-1}$, au lieu de $\left(1+\frac{\delta h}{h_0}\right)^{-}$.

Page 52, ligne 10, en descendant, lisez $(P)_3$, au lieu de (P_3).

Page 60, ligne 3, en montant, lisez R''_3, au lieu de R''_0.

Page 65, ligne 3, en montant, intercalez Δ entre Σ et W.

Page 87, ligne 5, en descendant, abaissez i au niveau de l'exposant.

Page 105, lignes 13, 14, 17, 18, en descendant, lisez ∂, au lieu de d dans les premiers membres.

Page 182, ligne 7, en descendant, lisez $\tan g\,\frac{1}{2}\varepsilon$, au lieu de $\tan g\,^{1}\varepsilon$.

Page 182, ligne 9, en descendant, lisez de, au lieu de ∂e.

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\sin\varepsilon}{f^2(1-e\cos\varepsilon)}\,\Delta c\,\Delta e-\frac{e\cos\varepsilon}{f(1-e\cos\varepsilon)}\,\Delta c\,\Delta\chi\\
&+\left(\frac{1+e^2}{f^2}\sin\varepsilon-\frac{e\sin 2\varepsilon}{2f(1-e\cos\varepsilon)}\right)\Delta e\,\Delta\chi\\
&+\left(\frac{e^2}{2f^2}-\frac{e\cos\varepsilon}{2f^2}\right)\Delta\chi^2+\frac{\sin^2\varepsilon}{f^2(1-e\cos\varepsilon)}\,\Delta e^2.
\end{aligned}
$$

Si l'on pose $e=\sin\varphi$, $\zeta=\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$, on a, pour servir au calcul de $n\delta(z)$ et de (ν), les formules suivantes

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-e\cos\varepsilon}&=\frac{1}{f}(1+2\zeta\cos\varepsilon+2\zeta^2\cos 2\varepsilon+\cdots),\\
\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}&=(1+\zeta^2)(\sin\varepsilon+\zeta\sin 2\varepsilon+\zeta^2\sin 3\varepsilon+\cdots),\\
\frac{e\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}&=\frac{1}{f}(1-f+2\zeta\cos\varepsilon+2\zeta^2\cos 2\varepsilon+2\zeta^3\cos 3\varepsilon+\cdots),\\
\frac{\sin^2\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}&=\tfrac{1}{2}(1+\zeta^2)[1+\zeta\cos\varepsilon-f(1+\zeta^2)(\cos 2\varepsilon+\zeta\cos 3\varepsilon+\cdots)],\\
\frac{e\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}&=\zeta^2\sin\varepsilon+\zeta(1+\zeta^2)(\sin 2\varepsilon+\zeta\sin 3\varepsilon+\zeta^2\sin 4\varepsilon+\cdots).
\end{aligned}
$$

33.

Pour développer l'expression (37) en fonction des mêmes éléments, je pose, pour abréger,

$$
\begin{aligned}
B&=\beta\cos(\varpi_0-\theta_0)-\gamma\sin(\varpi_0-\theta_0),\\
C&=f[\beta\sin(\varpi_0-\theta_0)+\gamma\cos(\varpi_0-\theta_0)],
\end{aligned}
$$

ce qui donne

$$\frac{\Delta u}{\cos i_0}=-eB+B\cos\bar\varepsilon-C\sin\bar\varepsilon;$$

remplaçant ici Δu par sa valeur de l'art. 28, il vient

$$\frac{(u)}{\cos i_0}=\left(\frac{u}{\cos i_0}-e_0B+B\cos\bar\varepsilon-C\sin\bar\varepsilon\right)\frac{a_0(1+\nu)}{a[1+(\nu)]}:$$

or,

$$\left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{n}{n_0}=1+\frac{n-n_0}{n_0}=1+\Delta n(n-\Delta n)^{-1}=1+\frac{\Delta n}{n},$$

$$\frac{a_0}{a} = \left(1 + \frac{\Delta n}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 + \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n},$$

$$(1 + \nu)\,[1 + (\nu)]^{-1} = 1 - [(\nu) - \nu],$$

par suite,

$$\frac{(u)}{\cos i_0} = \frac{u}{\cos i_0} - eB - C\sin\bar{\varepsilon} + B\cos\bar{\varepsilon}$$

$$+ \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}\frac{u}{\cos i} - \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}eB - \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}C\sin\bar{\varepsilon} + \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}B\cos\bar{\varepsilon}.$$

Pour remplacer dans cette expression $\bar{\varepsilon}$ par ε_0, il faut remplacer

$$\sin\bar{\varepsilon} \text{ par } \sin\varepsilon_0 + \frac{\partial \sin\varepsilon}{\partial g} n\delta z = \sin\varepsilon_0 + \frac{\cos\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0} n\delta z,$$

$$\cos\bar{\varepsilon} \text{ par } \cos\varepsilon_0 + \frac{\partial \cos\varepsilon}{\partial g} n\delta z = \cos\varepsilon_0 - \frac{\sin\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0} n\delta z,$$

ce qui donne

$$\frac{(u)}{\cos i} = \frac{u}{\cos i} - eB - C\sin\varepsilon + B\cos\varepsilon - \frac{C\cos\varepsilon}{1 - e\cos\varepsilon} n\delta z - \frac{B\sin\varepsilon}{1 - e\cos\varepsilon} n\delta z$$

$$+ \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}\frac{u}{\cos i} - \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}eB - \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}C\sin\varepsilon + \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}B\cos\varepsilon$$

$$- [(\nu) - \nu]\frac{u}{\cos i} + [(\nu) - \nu]\,eB + [(\nu) - \nu]\,C\sin\varepsilon - [(\nu) - \nu]\,B\cos\varepsilon,$$

où, pour abréger, on a écrit ε au lieu de ε_0.

Passant maintenant à l'expression de $\frac{(u)}{\cos i}$ en fonction de $\varepsilon, (c), (e)$, il vient

$$\frac{(u)}{\cos i} = \frac{u}{\cos i} - \frac{\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}}{\cos i}\left(\frac{\Delta c}{1 - e\cos\varepsilon} + \frac{\sin\varepsilon}{1 - e\cos\varepsilon}\Delta e\right) - \frac{\frac{\partial u}{\partial c}}{\cos i}\Delta c$$

$$- C\sin\varepsilon - C\cos\varepsilon\,\frac{n\delta z}{1 - e\cos\varepsilon} + C\cos\varepsilon\left(\frac{\Delta c}{1 - e\cos\varepsilon} + \frac{\sin\varepsilon}{1 - e\cos\varepsilon}\Delta e\right)$$

$$+ B\cos\varepsilon - B\sin\varepsilon.\frac{n\delta z}{1 - e\cos\varepsilon} + B\sin\varepsilon\left(\frac{\Delta c}{1 - e\cos\varepsilon} + \frac{\sin\varepsilon}{1 - e\cos\varepsilon}\Delta e\right)$$

$$+ \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}\left(\frac{u}{\cos i} - eB - C\sin\varepsilon + B\cos\varepsilon\right)$$

$$- [(\nu) - \nu]\left(\frac{u}{\cos i} - eB - C\sin\varepsilon + B\cos\varepsilon\right),$$

ESSAI

SUR LES

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

PAR M. LAISANT

CAPITAINE DU GÉNIE

AVANT-PROPOS

Les fonctions hyperboliques sont d'un grand usage dans l'analyse mathématique. Depuis longtemps déjà, elles ont été l'objet des travaux de géomètres célèbres, qui s'étudièrent à rechercher les analogies des coordonnées de l'hyperbole équilatère avec celles de la circonférence. Moivre, Friedr. Mayer, Riccati, Saladini, Foncenex, Lambert, se sont successivement occupés de ces fonctions; puis, de nos jours, MM. Gudermann, Forti, Gronau, en ont donné des tables, accompagnées de théories développées et d'intéressantes applications. MM. Schellbach, Betti, ont touché également à ce sujet. Citons encore M. Hoüel qui, dans son *Recueil de formules et de tables numériques*, et dans sa *Théorie des quantités complexes*, leur a consacré quelques pages très intéressantes. Ce savant professeur avait publié déjà, en 1864, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, une notice sur les fonctions hyperboliques, qui nous a été d'un grand secours pour notre étude. Enfin, M. Realis, dans un travail sur les fonctions exponentielles qui a paru en partie dans les *Nouvelles Annales*, et qui a été ensuite publié à part, sous le titre

très modeste de *Note sur le nombre e*, s'est attaché à mettre en lumière l'origine analytique de ces fonctions. Nous tenons à rendre ici hommage tout particulièrement à l'originalité, et à la clarté de ce géomètre; nous lui devons en même temps nos remercîments les plus sincères, car c'est sur ses conseils que nous nous sommes décidé à entreprendre l'étude qui fait l'objet principal de ce petit travail; c'est-à-dire celle des corrélations entre les coordonnées d'un point de l'ellipse, et d'un point de l'hyperbole ayant mêmes axes.

ESSAI

SUR LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

PREMIÈRE PARTIE.

Trigonométrie de l'hyperbole équilatère.

Définitions et notations.

1. On sait que dans les fonctions circulaires sin $u, \ldots$ l'argument u peut être considéré comme représentant l'aire du double secteur circulaire 2AOM (*fig. 1*). C'est ce que nous ferons dans toute la suite de cette étude.

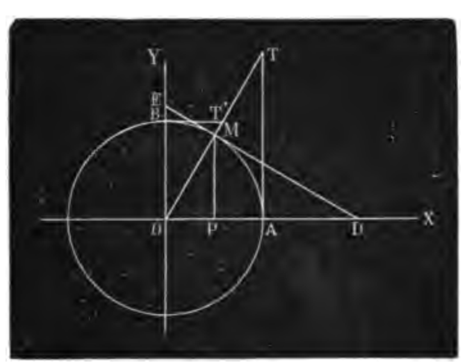


Fig. 1.

Si nous supposons deux axes rectangulaires passant par le centre du cercle (l'axe des x étant dirigé suivant le cosinus OP), nous pourrons dire que la sécante est *le segment intercepté sur l'axe des x, à partir de l'origine, par la tangente au cercle au point* M; *car* OD=OT.

De même, la cosécante sera pour nous *le segment intercepté sur l'axe des y par la même tangente.*

Ceci admis, on voit que les lignes sin, tang, cosèc, peuvent se compter sur l'axe des y, en grandeurs et en signes; et cos, cot, séc, sur l'axe des x. Nous appellerons parfois ces lignes, respectivement, *lignes des y* et *lignes des x*.

2. Soit maintenant (*fig. 2*), une hyperbole *équilatère* rapportée à ses axes, *et dont le demi-axe soit égal à l'unité*. Prenant pour variable

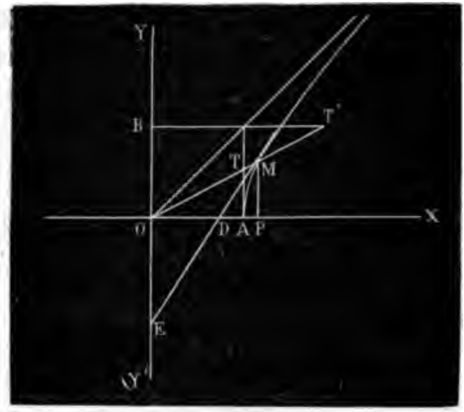


Fig. 2.

indépendante u le double du secteur hyperbolique OAM, nous dirons que les coordonnées PM et OP sont respectivement le *sinus hyperbolique* et le *cosinus hyperbolique* de u, et nous désignerons ces fonctions par les caractéristiques Sh u et Ch u. Nous définirons les autres lignes hyperboliques de la même manière que celles du cercle, en remplaçant seulement le mot *cercle* par *hyperbole équilatère,* et les mots *extrémité du diamètre dirigé suivant* OY par *extrémité du demi-axe imaginaire.*

Nous désignerons les fonctions ainsi obtenues par les notations suivantes :

$$\mathrm{OD} = \mathrm{Séch}\, u, \qquad \mathrm{BT'} = \mathrm{Coth}\, u,$$
$$\mathrm{AT} = \mathrm{Th}\, u, \qquad \mathrm{OE} = \mathrm{Coséch}\, u,$$

et nous conviendrons seulement de compter les cosèc. comme positions dans le sens OY' opposé à OY.

3. Rappelons, sans les démontrer, les relations bien connues

$$\mathrm{séc}\, u = \frac{1}{\cos u}, \quad \mathrm{tang}\, u = \frac{\sin u}{\cos u}, \quad \cot u = \frac{\cos u}{\sin u}, \quad \mathrm{coséc}\, u = \frac{1}{\sin u},$$
$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1.$$

On démontrerait sans nulle peine, et par analogie, les formules suivantes, relatives aux lignes de l'hyperbole équilatère :

$$\text{Séch}\, u = \frac{1}{\text{Ch}\, u}, \quad \text{Th}\, u = \frac{\text{Sh}\, u}{\text{Ch}\, u}, \quad \text{Coth}\, u = \frac{\text{Ch}\, u}{\text{Sh}\, u}, \quad \text{Coséch}\, u = \frac{1}{\text{Sh}\, u},$$

$$\text{Ch}^2 u - \text{Sh}^2 u = 1.$$

On pourra par ces relations exprimer toutes les lignes de l'hyperbole équilatère au moyen des deux principales Sh et Ch.

Expression des lignes sin, cos, Sh, Ch, *sous forme exponentielle et sous forme de séries.*

4. On sait que le sinus et le cosinus peuvent être représentés par les développements en séries

$$\sin u = \frac{u}{1} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots,$$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots,$$

ou par les formules

$$\sin u = \frac{e^{ui} - e^{-ui}}{2i},$$

$$\cos u = \frac{e^{ui} + e^{-ui}}{2}.$$

Ces dernières formules, en complet accord avec la formule de Moivre et les relations fondamentales de la trigonométrie, peuvent être prises comme définition des fonctions sin et cos, et servir à retrouver la formule de Moivre

$$(\cos u \pm i \sin u)^m = \cos mu \pm i \sin mu,$$

et toutes celles relatives à l'addition, la multiplication ou la division des secteurs circulaires.

Les séries écrites ci-dessus pourraient aussi être prises comme définitions des fonctions sin et cos. On sait d'ailleurs qu'elles sont convergentes pour toutes les valeurs de u, soit réelles, soit imaginaires.

5. Si l'on considère l'hyperbole équilatère ayant pour équation

$x^2 - y^2 = 1$, et que l'on cherche le double du secteur u compris entre l'axe des x et le rayon joignant l'origine au point (x, y), on trouve, par une intégration fort simple,

$$u = \log\left(\sqrt{1+y^2} + y\right) = \log(x+y) = \log\frac{1}{x-y}\cdot$$

Donc, en posant $x = \operatorname{Ch} u$, $y = \operatorname{Sh} u$,

$$e^u = \operatorname{Ch} u + \operatorname{Sh} u, \qquad e^{-u} = \operatorname{Ch} u - \operatorname{Sh} u\,;$$

d'où l'on tire les valeurs Chu et Shu sous forme exponentielle

$$\operatorname{Ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$

$$\operatorname{Sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2},$$

et, en remplaçant les exponentielles par leurs développements en séries,

$$\operatorname{Ch} u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \dots,$$

$$\operatorname{Sh} u = \frac{u}{1} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \dots.$$

Ces séries, ou ces formes exponentielles, pourraient servir de définitions aux fonctions Sh et Ch. On peut en déduire la formule suivante, qui correspond à celle de Moivre, mais où les imaginaires n'existent plus,

$$(\operatorname{Ch} u + \operatorname{Sh} u)^m = \operatorname{Ch} mu + \operatorname{Sh} mu\,.$$

Dérivées des fonctions directes et inverses.

6. On sait que la dérivée de $\sin u$ est $\cos u$, et que celle de $\cos u$ est $-\sin u$. Par suite, les dérivées successives de $\sin u$ sont :

$$\cos u, \quad -\sin u, \quad -\cos u, \quad \sin u, \dots,$$

et celles de $\cos u$:

$$-\sin u, \quad -\cos u, \quad \sin u, \quad \cos u, \dots.$$

Prenant maintenant les fonctions Shu et Chu sous leurs formes

exponentielles ci-dessus, on voit sans peine que les dérivées successives sont, pour $\mathrm{Sh}\,u$,

$$D_u^{2n}\,\mathrm{Sh}\,u = \mathrm{Sh}\,u, \qquad D_u^{2n+1}\,\mathrm{Sh}\,u = \mathrm{Ch}\,u,$$

et pour $\mathrm{Ch}\,u$,

$$D_u^{2n}\,\mathrm{Ch}\,u = \mathrm{Ch}\,u, \qquad D_u^{2n+1}\,\mathrm{Ch}\,u = \mathrm{Sh}\,u.$$

7. Examinons les fonctions inverses de celles considérées jusqu'à présent. Bien que la variable qui constitue cette fonction inverse soit un *double-secteur*, circulaire ou hyperbolique, et non pas un *arc*, nous conserverons les notations ordinaires arc sin, arc cos, ... et par analogie arc Sh, arc Ch, ... pour désigner ces fonctions. Nous croyons ainsi préférable de sacrifier légèrement la logique des notations, plutôt que d'en introduire de nouvelles.

D'après cela, on aura

$$u = \arcsin x, \text{ lorsque } x = \sin u,$$
$$u = \mathrm{arc\,Ch}\,x, \text{ lorsque } x = \mathrm{Ch}\,u,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

En raison de la périodicité des fonctions $\sin u$, $\mathrm{Ch}\,u$, ..., que nous étudierons plus loin, ces fonctions inverses peuvent prendre une infinité de valeurs pour une valeur donnée de la variable; nous laissons ici aux notations $\arcsin x$, ... toute leur généralité, sauf à préciser, lorsqu'il sera nécessaire, les valeurs particulières à considérer dans chaque cas spécial.

Il peut être utile de remarquer les formules

$$\mathrm{arc\,Ch}\,x = \log\left(\sqrt{x^2-1} + x\right), \qquad \mathrm{arc\,Sh}\,x = \log\left(\sqrt{x^2+1} + x\right), \dots,$$

dont l'usage est très fréquent dans les applications au calcul intégral.

8. L'examen des valeurs exponentielles écrites plus haut conduit immédiatement aux relations

$$\mathrm{Ch}\,u = \cos(ui), \qquad \mathrm{Sh}\,u = \frac{\sin(ui)}{i},$$
$$\mathrm{Séch}\,u = \mathrm{séc}(ui), \qquad \mathrm{Th}\,u = \frac{\mathrm{tang}(ui)}{i},$$
$$\mathrm{Coth}\,u = i\cot(ui), \quad \mathrm{Cosech}\,u = i\,\mathrm{coséc}(ui),$$

et aux formules réciproques

$$\cos u = \text{Ch}(ui), \qquad \sin u = \frac{\text{Sh}(ui)}{i},$$

$$\text{séc}\, u = \text{Séch}(ui), \qquad \text{tang}\, u = \frac{\text{Th}(ui)}{i},$$

$$\cot u = i\,\text{Coth}(ui), \qquad \text{coséc}\, u = i\,\text{Coséch}(ui).$$

De là on tirera les relations suivantes pour les fonctions inverses :

$$\text{arc Sh}\, x = \frac{\text{arc sin}\,(xi)}{i},$$

$$\text{arc Ch}\, x = \frac{\text{arc cos}\, x}{i},$$

. . . .

9. Les dérivées de ces fonctions inverses sont faciles à trouver par les formules qui précèdent, en partant de celles des fonctions circulaires inverses. On obtient ainsi le tableau suivant :

1°	$u = \text{arc sin}\, x,$	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
2°	$u = \text{arc cos}\, x,$	$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
3°	$u = \text{arc tang}\, x,$	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2},$
4°	$u = \text{arc Sh}\, x,$	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$
5°	$u = \text{arc Ch}\, x,$	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$
6°	$u = \text{arc Th}\, x,$	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1-x^2}.$

Ces dérivées et quelques-unes des précédentes peuvent être souvent d'un certain secours dans les intégrations.

Relations entre les variables τ et u.

10. Reprenons les formules du n° 3,

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1, \tag{1}$$

$$\text{Ch}^2 u - \text{Sh}^2 u = 1. \tag{2}$$

En les divisant respectivement par $\cos^2 u$, $\mathrm{Ch}^2 u$, on aura

$$\text{(3)} \qquad \text{séc}^2 u - \text{tang}^2 u = 1,$$
$$\text{(4)} \qquad \text{Séch}^2 u + \text{Th}^2 u = 1.$$

L'identité de forme est évidente entre les relations (1) et (4), (2) et (3); cela peut nous conduire à assimiler les lignes hyperboliques aux lignes du cercle, ou inversement. Pour étudier cette assimilation, nous allons continuer à désigner par u les doubles-secteurs hyperboliques, et nous affecterons la lettre τ à la représentation des doubles-secteurs circulaires. Les relations à établir, pour qu'il y ait identité, sont

$$\text{(5)} \qquad \cos\tau = \text{Séch}\, u, \qquad \sin\tau = \text{Th}\, u,$$
$$\text{(6)} \qquad \text{Ch}\, u = \text{séc}\,\tau, \qquad \text{Sh}\, u = \text{tang}\,\tau.$$

L'une quelconque d'entre elles entraîne toutes les autres, et par conséquent les deux variables τ et u sont liées entre elles par une relation fixe.

C'est cette variable τ que M. Hoüel désigne sous le nom d'*amplitude hyperbolique* de u, dans la notice citée au commencement de ce travail, et représente par la notation

$$\tau = \text{Amh}\, u.$$

Gudermann a appelé τ *longitude* de u, et employé la notation

$$\tau = lu.$$

Enfin Lambert et MM. Mossotti et Forti donnent à cette variable le nom d'*angle transcendant*.

Réciproquement, Gudermann désigne u, considérée comme fonction de τ, sous le nom de *longueur*, et emploie la notation

$$u = \mathfrak{L}\tau.$$

Toutes ces appellations et notations peuvent être indifféremment adoptées, bien que plusieurs d'entre elles ne nous paraissent pas très justifiées. L'expression d'*amplitude hyperbolique* est la plus logique, à cause de l'analogie qu'elle présente avec ce même mot d'*amplitude* employé dans la théorie des fonctions elliptiques.

Par les relations du n° 8, il est aisé d'établir les deux formules

$$\text{tang}\frac{u}{2} = \frac{\sin u}{1+\cos u}, \qquad \text{Th}\frac{u}{2} = \frac{\text{Sh}\, u}{1+\text{Ch}\, u}.$$

Or, d'après celles du numéro précédent,

$$\frac{\sin\tau}{1+\cos\tau}=\frac{\operatorname{Th}u}{1+\operatorname{Séch}u}=\frac{\operatorname{Sh}u}{1+\operatorname{Ch}u}.$$

Donc

$$\operatorname{tang}\frac{\tau}{2}=\operatorname{Th}\frac{u}{2}.$$

A ces propriétés analytiques répondent des relations géométriques sur lesquelles nous aurons occasion de revenir dans la suite de cette étude, en les généralisant.

11. En posant $\operatorname{tang}\frac{\tau}{2}=z$, la liaison entre τ et u peut s'exprimer au moyen des deux équations

$$\tau=2\operatorname{arc\,tang}z,$$
$$u=2\operatorname{arc\,Th}z,$$

z étant un paramètre variable depuis -1 jusqu'à $+1$.

Il est assez facile de représenter par une courbe cette relation entre les deux variables τ et u, et de déterminer la tangente à cette courbe en un point quelconque. On a, en effet (n° 9),

$$d\tau=\frac{2}{1+z^2}dz,\qquad du=\frac{2}{1-z^2}dz.$$

D'où

$$\frac{du}{d\tau}=\frac{1+z^2}{1-z^2}.$$

Cette courbe des τ et des u (*fig. 3*) a pour centre l'origine, où



Fig. 3.

elle passe, et est asymptote à deux droites parallèles à l'axe des u,

situées à une distance $\frac{\pi}{2}$ de chaque côté de cet axe. Sa tangente à l'origine est la bissectrice de l'angle des axes $O\tau$ et Ou.

Le rayon de courbure ρ en un point quelconque s'évalue simplement en fonction de z. Car, en différentiant la valeur ci-dessus de $\frac{du}{d\tau}$, on trouve

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = 2z\frac{1+z^2}{(1-z^2)^2},$$

d'où

$$\rho = \frac{\sqrt{2}(1+z^4)^{\frac{3}{2}}}{z(1-z^4)}.$$

Cette valeur du rayon de courbure devient infinie, comme l'on voit, pour $z=\pm 1$, c'est-à-dire pour les points à l'infini, et pour $z=0$, ce qui correspond à l'origine. La courbe présente effectivement un point d'inflexion en O.

Expressions des lignes de variables complexes.

12. En partant des formules connues

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v, \tag{1}$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v, \tag{2}$$

on établit sans peine les suivantes

$$\mathrm{Sh}(u+v) = \mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Ch}\, v + \mathrm{Ch}\, u\, \mathrm{Sh}\, v, \tag{3}$$

$$\mathrm{Ch}(u+v) = \mathrm{Ch}\, u\, \mathrm{Ch}\, v + \mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Sh}\, v. \tag{4}$$

Ces formules s'appliquant aussi bien aux valeurs imaginaires qu'aux valeurs réelles, rien n'empêche d'y remplacer v par vi. Il viendra de la sorte

$$\sin(u+vi) = \sin u\, \mathrm{Ch}\, v + i \cos u\, \mathrm{Sh}\, v, \tag{5}$$

$$\cos(u+vi) = \cos u\, \mathrm{Ch}\, v - i \sin u\, \mathrm{Sh}\, v, \tag{6}$$

$$\mathrm{Sh}(u+vi) = \mathrm{Sh}\, u \cos v + i\, \mathrm{Ch}\, u \sin v, \tag{7}$$

$$\mathrm{Ch}(u+vi) = \mathrm{Ch}\, u \cos v + i\, \mathrm{Sh}\, u \sin v. \tag{8}$$

Ces relations sont vraies pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de u et de v; mais, si l'on suppose que u et v soient des

quantités réelles, les relations ci-dessus fourniront les expressions des sinus et cosinus de toute nature des quantités complexes.

En changeant v en $-v$, on voit que les parties réelles ne changent pas, et que les parties imaginaires changent de signe. Donc *les lignes pareilles, sinus ou cosinus, de deux expressions complexes conjuguées, sont elles-mêmes conjuguées.*

13. Les relations du numéro précédent conduisent à des résultats intéressants, en raison de leur simplicité, si l'on y introduit les valeurs τ et u telles que $\tau = \text{Amh}\, u$ (n° 10). On trouvera, en effet,

$$\sin(\tau + ui) = \tan\tau + i\sin\tau = \text{Sh}\, u + i\,\text{Th}\, u = \text{Sh}\, u + i\sin\tau,$$
$$\cos(\tau + ui) = 1 - i\sin\tau\tan\tau = 1 - i\,\text{Sh}\, u\,\text{Th}\, u = 1 - i\sin\tau\,\text{Sh}\, u,$$
$$\text{Sh}(u + \tau i) = \text{Th}\, u + i\,\text{Sh}\, u = \sin\tau + i\tan\tau = \sin\tau + i\,\text{Sh}\, u,$$
$$\text{Ch}(u + \tau i) = 1 + i\,\text{Sh}\, u\,\text{Th}\, u = 1 + i\sin\tau\tan\tau = 1 + i\,\text{Sh}\, u\sin\tau.$$

Périodicité des fonctions étudiées.

14. Les fonctions $\sin u$, $\cos u$, ... sont, comme l'on sait, périodiques, et admettent pour période 2π, c'est-à-dire qu'on a $\sin u = \sin(u \pm 2n\pi)$ .... Cette remarque s'applique aux valeurs imaginaires de u, tout aussi bien qu'aux valeurs réelles, les fonctions considérées représentant alors des sommes de séries qui ne cessent pas d'être convergentes.

Si dans la formule (7) du numéro 12 on fait $v = \pm 2n\pi$, elle donne

$$\text{Sh}(u \pm 2n\pi i) = \text{Sh}\, u.$$

Donc la fonction $\text{Sh}\, u$ est aussi périodique, et elle admet pour période $2\pi i$. On doit entendre par là que si, dans la série que représente ce symbole $\text{Sh}\, u$, on vient à remplacer u par $u \pm 2n\pi i$, on obtiendra un résultat pareil.

La même propriété s'applique aux autres lignes $\text{Ch}\, u$, $\text{Th}\, u$, ... de l'hyperbole équilatère. On peut même remarquer que la fonction $\text{Th}\, u$ admet pour période, non seulement $2\pi i$, mais πi, de même que la fonction $\tan u$ admet π pour période.

15. La périodicité des fonctions circulaires est un fait géométrique qui se peint aux yeux avec la plus grande facilité, lorsqu'on suppose que la variable indépendante conserve des valeurs réelles.

On fait croître en effet cette variable de 0 à $+\infty$, ou bien on la fait décroître de 0 à $-\infty$, en faisant tourner le rayon origine, couché d'abord sur l'axe des x, autour du centre O, dans un sens, puis dans le sens opposé. L'extrémité de ce rayon parcourt ainsi le périmètre de la circonférence, en faisant un nombre de révolutions indéfini, et repassant toujours par les mêmes positions.

Pour l'hyperbole, il n'en est plus de même, la courbe n'étant pas fermée; et lorsqu'on aura fait tourner le rayon origine successivement dans les deux sens, jusqu'à le superposer avec les deux asymptotes, la variable indépendante aura pris toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à $+\infty$, et depuis 0 jusqu'à $-\infty$. Imaginons cependant que, dépassant cette limite tracée par l'asymptote au rayon mobile, nous fassions accomplir à celui-ci, à partir d'une position quelconque, une révolution entière. Après cette révolution, son extrémité sera revenue au même point, et toutes les lignes, $\mathrm{Sh}\,u$, $\mathrm{Ch}\,u$, ... seront les mêmes aussi qu'avant la rotation. On pourra donc considérer le tour entier que nous avons fait faire au rayon comme équivalent à un accroissement de $\pm 2\pi i$ donné à la variable indépendante; le signe $\pm$ indiquant le sens de la rotation.

16. L'analogie entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires est utile à considérer dans les valeurs particulières que prennent ces fonctions pour certaines valeurs particulières de la variable. On a, par exemple,

$$
\begin{array}{llll}
\mathrm{Sh}\,0=0, & \mathrm{Sh}\frac{\pi}{2}i=i, & \mathrm{Sh}\,\pi i=0, & \mathrm{Sh}\frac{3\pi}{2}i=-i,\\
\mathrm{Ch}\,0=1, & \mathrm{Ch}\frac{\pi}{2}i=0, & \mathrm{Ch}\,\pi i=-1, & \mathrm{Ch}\frac{3\pi}{2}i=0,\\
\mathrm{Th}\,0=0, & \mathrm{Th}\frac{\pi}{2}i=\infty\times i, & \mathrm{Th}\,\pi i=0, & \mathrm{Th}\frac{3\pi}{2}i=\infty\times i,\\
\mathrm{Coth}\,0=\infty, & \mathrm{Coth}\frac{\pi}{2}i=0, & \mathrm{Coth}\,\pi i=\infty, & \mathrm{Coth}\frac{3\pi}{2}i=0,\\
\mathrm{Séch}\,0=1, & \mathrm{Séch}\frac{\pi}{2}i=\infty, & \mathrm{Séch}\,\pi i=-1, & \mathrm{Séch}\frac{3\pi}{2}i=\infty,\\
\mathrm{Coséch}\,0=\infty, & \mathrm{Coséch}\frac{\pi}{2}i=-i, & \mathrm{Coséch}\,\pi i=\infty, & \mathrm{Coséch}\frac{3\pi}{2}i=i.
\end{array}
$$

Considérons (*fig. 4*) l'hyperbole conjuguée ayant les points B, B' pour sommets réels. En comparant les lignes répondant aux points

A, B, A', B' (ces lignes étant définies comme on l'a vu au commencement de ce travail) avec les valeurs du tableau ci-dessus, on voit qu'il y a respectivement identité entre celles qui répondent aux

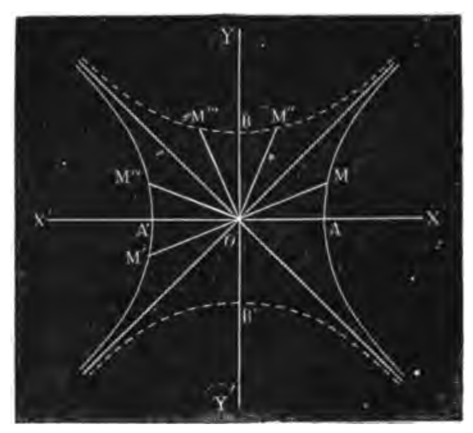


Fig. 4.

points A et A', et celles de $u=0$ et de $u=\pi i$. Quant aux lignes correspondant aux points B et B', elles fournissent celles de $\frac{\pi}{2}i$ et $\frac{3\pi}{2}i$, en ayant soin de multiplier par i celles dirigées suivant les y, et conservant au contraire sans modification celles dirigées suivant les x. Cette convention étant admise, la rotation du rayon OA, allant de OA en OB, peut nous représenter la valeur $\frac{\pi}{2}i$; celle de OA en OA' nous représente πi, et celle de OA en OB', $\frac{3\pi}{2}i$.

On voit aussi :

Que la transformation de u en $-u$ s'opère par deux rotations du rayon mobile d'amplitudes égales, à partir de l'axe des x, dans un sens, puis dans le sens opposé;

Que l'accroissement $\pm\pi i$ attribué à u peut être obtenu géométriquement en faisant tourner le rayon OM de 180°, soit dans un sens, soit dans le sens contraire, ce qui donne toujours le point opposé M';

Que deux valeurs ayant pour somme πi sont représentées par les points M et M''' symétriques par rapport à l'axe des y;

Que deux valeurs ayant pour somme $\frac{\pi}{2}i$ se représentent par les

points M et M', le secteur OBM' étant construit égal à OAM, et porté de OY vers OX;

Que deux valeurs u et $u \pm \frac{\pi}{2} i$ sont données par M et M''', le secteur OBM''' étant égal à OAM, et porté de OY vers OX' (d'où il résulte que les rayons OM,OM''' sont perpendiculaires entre eux).

17. Nous disons qu'on peut ainsi représenter ces valeurs, parce qu'en ces points, les lignes géométriques obtenues sont les mêmes que celles des valeurs considérées, *aux facteurs près* $\pm 1, \pm i$.

L'introduction de ces facteurs ne laisserait pas que d'être assez pénible dans les applications, parce qu'ils changent en passant d'une ligne à une autre. Mais il ne nous en a pas moins paru intéressant, au point de vue théorique, de montrer l'emploi de l'hyperbole conjuguée, qui complète en quelque sorte le contour de la courbe dans toutes les directions possibles autour du point O. Les points de cette hyperbole répondent à des valeurs imaginaires, et tous ceux des deux hyperboles sont obtenus successivement et d'une manière continue, en passant par l'infini à plusieurs reprises. Le premier de ces passages a lieu entre les valeurs réelles et imaginaires, le second entre $\frac{\pi}{2} i$ et πi, le troisième entre πi et $\frac{3\pi}{2} i$, et ainsi de suite, dans le parcours successif de tous les *quadrants imaginaires*.

La série des valeurs que prend ainsi la variable indépendante peut se représenter très simplement, si l'on représente cette variable elle-même par une ligne inclinée, selon les principes de la théorie des

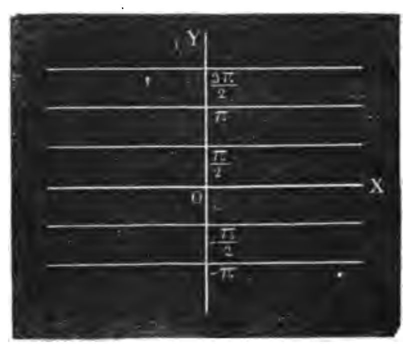


Fig. 5.

quantités complexes. On voit en effet que l'extrémité de la variable partant de l'origine, parcourt l'axe des x jusqu'à l'infini, dans le

sens positif par exemple; puis, passant de là à un point situé à l'infini dans le sens négatif sur une parallèle à l'axe des x, distante de $\frac{\pi}{2}$ de cet axe, parcourt cette parallèle dans toute son étendue, et ainsi de suite. En faisant varier u en sens inverse, on voit que son extrémité décrirait les parallèles situées au-dessous de l'axe des x aux distances $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \ldots$. En résumé, les révolutions indéfinies sur l'ensemble des deux hyperboles que nous avons considérées font parcourir à l'extrémité de la variable l'axe des x et toutes les parallèles à cet axe distantes de multiples de $\frac{\pi}{2}$, tandis que pour le cercle l'extrémité de la variable ne quitte pas l'axe des x.

Multiplication et division des secteurs hyperboliques.

18. D'après les explications précédentes, on voit qu'il serait possible de fonder une trigonométrie sur la mesure des angles par secteurs d'hyperbole équilatère, tout comme il en existe une fondée sur la mesure des angles par secteurs circulaires. Il est certain qu'au point de vue de l'usage ordinaire de la trigonométrie, celle du cercle présente tous les avantages, et qu'elle seule mesure les angles par des nombres proportionnels à leurs ouvertures; mais cette remarque n'en présente pas moins un certain intérêt.

Les formules de la trigonométrie de l'hyperbole peuvent se déduire aisément de celles de la trigonométrie ordinaire : si, en effet, on vient à remplacer $\sin u$, $\cos u, \ldots$ par leurs valeurs en $\text{Sh}(ui)$, $\text{Ch}(ui), \ldots$ fournies par les relations du n° 8, puis, que l'on change ensuite u en ui, on obtiendra une relation entre u, $\text{Sh}\, u$, $\text{Ch}\, u, \ldots$, qui sera la formule correspondante de celle d'où l'on est parti.

Remarquons qu'une formule ne contenant pas d'imaginaires peut ainsi en fournir d'autres qui en renferment; de sorte que, si ces parties imaginaires ne se réduisent pas, chaque relation obtenue de cette manière sera équivalente à deux autres distinctes. Ce fait d'ailleurs n'a rien d'étonnant, si l'on réfléchit à l'hypothèse où nous nous plaçons, en vertu de laquelle les formules servant de point de départ peuvent s'étendre aux valeurs imaginaires. Cette hypothèse

entraîne deux relations distinctes pour chaque formule, et il n'est pas extraordinaire qu'elles apparaissent dans les résultats. Le calcul, en effet, ne possède par lui-même aucune puissance de création, et il ne faudrait pas croire qu'on puisse rencontrer dans les résultats ce que l'on n'aurait pas introduit dans les données.

Le plus souvent, il y a intérêt à exprimer toutes les lignes en fonction des deux principales, sinus et cosinus (circulaires ou hyperboliques), et la transformation en est ensuite d'autant abrégée. C'est ce que nous ferons à peu près constamment dans toutes les applications.

19. Si nous voulons appliquer les considérations qui précèdent aux formules relatives à la multiplication ou à la division des secteurs circulaires, nous en déduirons immédiatement des relations analogues, qui se rapporteront à la multiplication ou à la division de secteurs d'hyperbole équilatère.

Nous aurons ainsi, par exemple, en rappelant les formules ordinaires, à côté de celles que nous en déduisons

1° $\sin 2u = 2 \sin u \cos u,\qquad \mathrm{Sh}\, 2u = 2\, \mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Ch}\, u,$

2° $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u,\qquad \mathrm{Ch}\, 2u = \mathrm{Ch}^2 u + \mathrm{Sh}^2 u,$

3° $\mathrm{tang}\, 2u = \dfrac{2 \,\mathrm{tang}\, u}{1 - \mathrm{tang}^2 u},\qquad \mathrm{Th} 2u = \dfrac{2\, \mathrm{Th}\, u}{1 + \mathrm{Th}^2 u},$

4° $\sin 3u = 3 \sin u - 4 \sin^3 u,\qquad \mathrm{Sh}\, 3u = 3\, \mathrm{Sh}\, u + 4\, \mathrm{Sh}^3 u,$

5° $\cos 3u = 4 \cos^3 u - 3 \cos u,\qquad \mathrm{Ch}\, 3u = 4\, \mathrm{Ch}^3 u - 3\, \mathrm{Ch}\, u,$

6° $\mathrm{tang}\, 3u = \dfrac{3 \,\mathrm{tang}\, u - \mathrm{tang}^3 u}{1 - 3 \,\mathrm{tang}^2 u},\qquad \mathrm{Th} 3u = \dfrac{3\, \mathrm{Th}\, u + \mathrm{Th}^3 u}{1 + 3\, \mathrm{Th}^2 u},$

7° $$\begin{cases} \sin mu = m \cos^{m-1} u . \sin u - \dfrac{m!}{3!(m-3)!} \cos^{m-3} u . \sin^3 u + \ldots, \\ \mathrm{Sh}\, mu = m . \mathrm{Ch}^{m-1} u . \mathrm{Sh}\, u + \dfrac{m!}{3!(m-3)!} \mathrm{Ch}^{m-3} u . \mathrm{Sh}^3 u + \ldots, \end{cases}$$

8° $$\begin{cases} \cos mu = \cos^m u - \dfrac{m!}{2!(m-2)!} \cos^{m-2} u . \sin^2 u + \ldots, \\ \mathrm{Ch}\, mu = \mathrm{Ch}^m u + \dfrac{m!}{2!(m-2)!} \mathrm{Ch}^{m-2} u . \mathrm{Sh}^2 u + \ldots . \end{cases}$$

Les formules 7° et 8° relatives à l'hyperbole, auraient pu s'obtenir par addition et soustraction des deux égalités

$$\mathrm{Ch}\, mu + \mathrm{Sh}\, mu = (\mathrm{Ch}\, u + \mathrm{Sh}\, u)^m,$$
$$\mathrm{Ch}\, mu - \mathrm{Sh}\, mu = (\mathrm{Ch}\, u - \mathrm{Sh}\, u)^m;$$

c'est-à-dire qu'on peut leur donner la forme

$$\mathrm{Ch}\, mu = \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ch}\, u + \mathrm{Sh}\, u)^m + (\mathrm{Ch}\, u - \mathrm{Sh}\, u)^m],$$
$$\mathrm{Sh}\, mu = \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ch}\, u + \mathrm{Sh}\, u)^m - (\mathrm{Ch}\, u - \mathrm{Sh}\, u)^m].$$

20. Pour ne pas allonger notre travail inutilement, nous nous bornons à ces formules, à titre d'exemples. Les dernières (7° et 8°) permettent de trouver le sinus et le cosinus d'un multiple d'un double secteur circulaire ou hyperbolique, connaissant le sinus et le cosinus de ce double secteur. Si dans ces formules on remplace u par $\frac{u}{m}$, elles fourniront des équations permettant de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire celui de la division d'un secteur en m parties égales. Mais il y a une distinction capitale à établir à ce sujet.

21. En effet, si l'on donne le sinus (circulaire ou hyperbolique) de u et qu'on demande celui de $\frac{u}{m}$, les formules 7° conduiront à une équation du degré m dans le cas où m est impair, et du degré $2m$ dans le cas où m est pair.

Au contraire, si l'on demande le cosinus (circulaire ou hyperbolique) de $\frac{u}{m}$, connaissant celui de u, les formules 8° conduiront à une équation du degré m dans tous les cas.

Il est aisé, en remontant aux caractères de périodicité des diverses fonctions, de se rendre compte de cette différence.

22. La recherche de $x = \mathrm{Sh}\,\frac{\alpha}{m}$, connaissant $b = \mathrm{Sh}\,\alpha$, et α étant supposé réel, conduit, dans l'hypothèse de m impair, aux m racines suivantes

$$\mathrm{Sh}\,\frac{\alpha}{m},$$

$$\mathrm{Sh}\,\frac{\alpha}{m}.\cos\frac{3\pi}{m} \pm i\,\mathrm{Ch}\,\frac{\alpha}{m}.\sin\frac{2\pi}{m},$$

. . . .

$$\mathrm{Sh}\,\frac{\alpha}{m}.\cos\frac{m-1}{m}\pi \pm i\,\mathrm{Ch}\,\frac{\alpha}{m}.\sin\frac{m-1}{m}\pi,$$

et, dans l'hypothèse de m pair, aux $2m$ racines

$$\pm\,\mathrm{Sh}\,\frac{\alpha}{m},$$

$$\pm\left(\mathrm{Sh}\,\frac{\alpha}{m}.\cos\frac{\pi}{m} \pm i\,\mathrm{Ch}\,\frac{\alpha}{m}.\sin\frac{\pi}{m}\right),$$

. . . .,

$$\pm\left(\mathrm{Sh}\,\frac{\alpha}{m}.\cos\frac{\frac{m}{2}-1}{m}\pi \pm i\,\mathrm{Ch}\,\frac{\alpha}{m}.\sin\frac{\frac{m}{2}-1}{m}\pi\right),$$

$$\pm\, i\,\mathrm{Ch}\,\frac{\alpha}{m}.$$

23. La recherche de $x=\mathrm{Ch}\,\frac{\alpha}{m}$, connaissant $b=\mathrm{Ch}\,\alpha$ conduit, si m est pair, aux m racines

$$\mathrm{Ch}\,\frac{\alpha}{m},$$

$$\mathrm{Ch}\,\frac{\alpha}{m}.\cos\frac{2\pi}{m} \pm i\,\mathrm{Sh}\,\frac{\alpha}{m}.\sin\frac{2\pi}{m},$$

. . . .,

$$\mathrm{Ch}\,\frac{\alpha}{m}.\cos\frac{m-2}{m}\pi \pm i\,\mathrm{Sh}\,\frac{\alpha}{m}.\sin\frac{m-2}{m}\pi,$$

$$-\mathrm{Ch}\,\frac{\alpha}{m};$$

si m est impair, aux racines

$$\mathrm{Ch}\,\frac{\alpha}{m},$$

$$\mathrm{Ch}\,\frac{\alpha}{m}.\cos\frac{2\pi}{m} \pm i\,\mathrm{Sh}\,\frac{\alpha}{m}.\sin\frac{2\pi}{m},$$

. . . .,

$$\mathrm{Ch}\,\frac{\alpha}{m}.\cos\frac{m-1}{m}\pi \pm i\,\mathrm{Sh}\,\frac{\alpha}{m}.\sin\frac{m-1}{m}\pi.$$

Dans les deux cas, il y a m racines seulement.

24. Indiquons encore une forme très simple qu'on peut donner aux équations relatives à la division des secteurs hyperboliques. On a

$$\left(\text{Ch}\frac{u}{m}+\text{Sh}\frac{u}{m}\right)^m=\text{Ch}\,u+\text{Sh}\,u.$$

1° Soit d'abord donné $b=\text{Sh}\,u$, et qu'on demande $x=\text{Sh}\frac{u}{m}$. L'équation deviendra

$$(\sqrt{x^2+1}+x)^m=\sqrt{b^2+1}+b;$$

2° Soit $b=\text{Sh}\,u$, $x=\text{Ch}\frac{u}{m}$; on aura

$$(x+\sqrt{x^2-1})^m=\sqrt{b^2+1}+b;$$

3° Soit $b=\text{Ch}\,u$, $x=\text{Ch}\frac{u}{m}$

$$(x+\sqrt{x^2-1})^m=b+\sqrt{b^2-1};$$

4° Soit $b=\text{Ch}\,u$, $x=\text{Sh}\frac{u}{m}$

$$(\sqrt{x^2+1}+x)^m=b+\sqrt{b^2-1}:$$

25. Le calcul numérique des racines, réelles ou imaginaires, est très simple; car il suffit, d'après ce qu'on a vu plus haut, d'avoir dans tous les cas $\text{Sh}\frac{\alpha}{m}$ ou $\text{Ch}\frac{\alpha}{m}$, pour déduire de là toutes les autres racines.

Or, si, dans les quatre équations du numéro précédent, nous posons le second membre égal à β, nous aurons

$$\beta=\text{Ch}\,\alpha+\text{Sh}\,\alpha=e^\alpha,$$

$$\alpha=\log\beta,$$

$$\frac{\alpha}{m}=\frac{1}{m}\log\beta=\log\gamma,$$

$$\text{Sh}\frac{\alpha}{m}=\tfrac{1}{2}(\gamma-\gamma^{-1}),$$

$$\text{Ch}\frac{\alpha}{m}=\tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma^{-1}).$$

Applications à quelques séries et à quelques produits infinis.

26. On a déjà établi plus haut les formules

$$\sin u = \frac{u}{1} - \frac{u^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \dots,$$

$$\mathrm{Sh}\, u = \frac{u}{1} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \dots,$$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots,$$

$$\mathrm{Ch}\, u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \dots,$$

et d'après ce qu'on a vu, il suffirait de connaître les deux séries donnant sin u et cos u pour en déduire les deux autres. En suivant toujours cette même méthode, indiquée au n° 18, nous allons l'appliquer à quelques autres formules, démontrées d'abord pour les lignes trigonométriques du cercle, de manière à obtenir ainsi de nouvelles relations.

27. On a

$$u = \sin u + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 u}{3} + \frac{(1.3)^2}{4!}\frac{\sin^5 u}{5} + \dots.$$

De là

$$u = \mathrm{Sh}\, u - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Sh}^3 u}{3} + \frac{(1.3)^2}{4!}\frac{\mathrm{Sh}^5 u}{5} - \dots.$$

Pour les formules qui concernent les lignes hyperboliques, il faut s'assurer, comme du reste dans tout ce qui va suivre, que les séries obtenues sont convergentes, sans quoi les formules n'auraient plus de sens. Elles le seraient nécessairement si la série qui sert de point de départ était elle-même démontrée convergente pour toutes les valeurs, complexes ou réelles, de la variable. C'est ce qui n'a pas lieu, généralement, la variable étant astreinte à avoir son module inférieur à une certaine quantité.

Ici, on peut affirmer que les séries obtenues seront convergentes pour $\mathrm{Sh}\, u \leqq 1$; car les termes, alternativement positifs et négatifs, décroissent alors au-dessous de toute limite; cela donne $u \leqq \log(1+\sqrt{2})$.

Pour cette valeur limite, on aura

$$\log\left(1+\sqrt{2}\right)=1-\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\frac{(1.3)^2}{4!}-\frac{1}{7}\frac{(1.3.5)^2}{6!}+\ldots.$$

Ce nombre $\log\left(1+\sqrt{2}\right)=\operatorname{arc}\operatorname{Sh}1$, que nous allons retrouver dans plusieurs des calculs qui vont suivre, peut être désigné par la lettre Π. On pourrait à la rigueur le calculer au moyen de la série précédente. Mais cette série est trop peu convergente pour être avantageuse. En le calculant directement par les tables de logarithmes, au moyen de la valeur approchée $\sqrt{2}=1,41421356\ldots$, on trouve

$$\Pi=0,8813735870\ \ldots.$$

On peut remarquer, puisque $\operatorname{Sh}\Pi=1$ et $\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}=1$, que l'on a (n° 10)

$$\Pi=\mathfrak{L}\frac{\pi}{4}\quad\text{ou}\quad\pi=4\operatorname{Amh}\Pi\,.$$

Par conséquent,

$$\operatorname{Th}\frac{\Pi}{2}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=e^{-\Pi}.$$

28. On a la formule suivante, laquelle n'est qu'un cas particulier d'une autre plus générale (voir, par exemple, le *Calcul différentiel* de M. Bertrand, page 297) :

$$\cos mu=1-\frac{m^2}{2!}\sin^2u+\frac{m^2(m^2-4)}{4!}\sin^4u-\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{6!}\sin^6u+\ldots.$$

On en tire

$$\operatorname{Ch}mu=1+\frac{m^2}{2!}\operatorname{Sh}^2u+\frac{m^2(m^2-4)}{4!}\operatorname{Sh}^4u+\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{6!}\operatorname{Sh}^6u+\ldots.$$

La série que nous venons d'obtenir se termine pour toute valeur paire de m; autrement, elle est convergente pour $\operatorname{Sh}u\leqq 1$, d'où $u\leqq\Pi$. Le rapport d'un terme au précédent finit en effet par devenir négatif, et inférieur à l'unité en valeur absolue; si bien que les termes, alternativement positifs et négatifs, décroissent indéfiniment.

Si l'on attribue à u cette valeur limite, on obtient

$$\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^m + \frac{1}{(1+\sqrt{2})^m}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{(3+2\sqrt{2})^m+1}{(1+\sqrt{2})^m}$$
$$= 1 + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^2(m^2-4)}{4!} + \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{6!} + \ldots.$$

29. Écrivons aussi la formule suivante, analogue à celle du numéro précédent :

$$\sin mu = m\sin u - \frac{m(m^2-1)}{3!}\sin^3 u + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{5!}\sin^5 u - \ldots.$$

On en déduira

$$\mathrm{Sh}\, mu = m\,\mathrm{Sh}\, u + \frac{m(m^2-1)}{3!}\mathrm{Sh}^3 u + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{5!}\mathrm{Sh}^5 u + \ldots.$$

La série que nous venons d'obtenir est convergente pour $u < \Pi$, et donne pour cette valeur limite

$$\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^m + \frac{1}{(1+\sqrt{2})^m}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{(3+2\sqrt{2})^m-1}{(1+\sqrt{2})^m}$$
$$= m + \frac{m(m^2-1)}{3!} + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{5!} + \ldots.$$

En ajoutant les formules qui donnent $\mathrm{Ch}\, mu$ et $\mathrm{Sh}\, mu$, on a

$$\mathrm{Ch}\, mu + \mathrm{Sh}\, mu = e^{mu} = 1 + m\,\mathrm{Sh}\, u + \frac{m^2}{2!}\mathrm{Sh}^2 u + \frac{m(m^2-1)}{3!}\mathrm{Sh}^3 u$$
$$+ \frac{m^2(m^2-4)}{4!}\mathrm{Sh}^4 u + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{5!}\mathrm{Sh}^5 u$$
$$+ \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{6!}\mathrm{Sh}^6 u + \ldots.$$

30. On a

$$\sin mu = \cos^m u\left(m\,\mathrm{tang}\, u - \frac{m!}{3!(m-3)!}\,\mathrm{tang}^3 u + \ldots\right).$$

De là

$$\mathrm{Sh}\, mu = \mathrm{Ch}^m u\left(m\,\mathrm{Th}\, u + \frac{m!}{3!(m-3)!}\mathrm{Th}^3 u + \ldots\right).$$

31. On a aussi la formule

$$\cos mu = \cos^m u \left(1 - \frac{m!}{2!(m-2)!}\operatorname{tang}^2 u + \frac{m!}{4!(m-4)!}\operatorname{tang}^4 u - \dots\right),$$

et on en tire

$$\operatorname{Ch} mu = \operatorname{Ch}^m u \left(1 + \frac{m!}{2!(m-2)!}\operatorname{Th}^2 u + \frac{m!}{4!(m-4)!}\operatorname{Th}^4 u + \dots\right).$$

Dans ces deux derniers numéros, les séries relatives aux lignes de l'hyperbole sont convergentes pour toutes les valeurs réelles de u, puisque alors $\operatorname{Th} u < 1$, en valeur absolue.

32. Prenons le développement suivant :

$$u = \operatorname{tang} u - \frac{\operatorname{tang}^3 u}{3} + \frac{\operatorname{tang}^5 u}{5} - \dots.$$

Nous en déduirons

$$u = \operatorname{Th} u + \frac{\operatorname{Th}^3 u}{3} + \frac{\operatorname{Th}^5 u}{5} + \dots.$$

Le développement relatif à l'hyperbole est encore convergent et donne, en y faisant $u = \Pi$,

$$\Pi\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{5.4} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{9.16} + \dots.$$

33. Si on a en général (n° 10) $\tau = \operatorname{Amh} u$, il en résulte, comme on l'a vu, $\operatorname{tang}\frac{\tau}{2} = \operatorname{Th}\frac{u}{2}$. Posons cette valeur commune égale à θ, et nous aurons, d'après le numéro précédent,

$$\frac{\tau}{2} = \frac{\theta}{1} - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} + \dots,$$

$$\frac{u}{2} = \frac{\theta}{1} + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \frac{\theta^7}{7} + \dots.$$

Par conséquent,

$$\frac{u+\tau}{4} = \frac{\theta}{1} + \frac{\theta^5}{5} + \frac{\theta^9}{9} + \dots,$$

$$\frac{u-\tau}{4} = \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^7}{7} + \frac{\theta^{11}}{11} + \dots.$$

En appliquant ces formules à $u = \Pi$, $\tau = \frac{\pi}{4}$ (n° 27) il vient

$$\frac{4\Pi+\pi}{16} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{5}\frac{1}{(1+\sqrt{2})^5} + \dots = e^{-\Pi} + \frac{1}{5}e^{-5\Pi} + \dots,$$

$$\frac{4\Pi-\pi}{16} = \frac{1}{3}\frac{1}{(1+\sqrt{2})^3} + \frac{1}{7}\frac{1}{(1+\sqrt{2})^7} + \dots = \frac{1}{3}e^{-3\Pi} + \frac{1}{7}e^{-7\Pi} + \dots.$$

Si maintenant on pose $\sin\tau = \mathrm{Th}\,u = \theta$, on aura (n°s 27 et 32)

$$\tau = \theta + \frac{1}{2}\frac{\theta^3}{3} \frac{(1.3)^2}{4!}\frac{\theta^5}{5} + \dots,$$

$$u = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \dots,$$

d'où

$$u + \tau = 2\theta + \frac{2!+1}{3!}\theta^3 + \frac{4!+(1.3)^2}{5!}\theta^5 + \dots,$$

$$u - \tau = \frac{2!-1}{3!}\theta^3 + \frac{4!-(1.3)^2}{5!}\theta^5 + \dots.$$

Si l'on fait $u = \Pi$, $\tau = \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{4\Pi+\pi}{2\sqrt{2}} = 2 + \frac{1}{2}\frac{2!+1}{3!} + \frac{1}{2^2}\frac{4!+(1.3)^2}{5!} + \dots,$$

$$\frac{4\Pi-\pi}{\sqrt{2}} = \frac{2!-1}{3!} + \frac{1}{2}\frac{4!-(1.3)^2}{5!} + \frac{1}{2^2}\frac{6!-(1.3.5)^2}{7!} + \dots.$$

Enfin, soit $\mathrm{Sh}\,u = \mathrm{tang}\,\tau = \Phi$. Nous aurons

$$u = \Phi - \frac{1}{2}\frac{\Phi^3}{3} + \frac{(1.3)^2}{4!}\frac{\Phi^5}{5} - \frac{(1.3.5)^2}{6!}\frac{\Phi^7}{7} + \dots,$$

$$\tau = \Phi - \frac{\Phi^3}{3} + \frac{\Phi^5}{5} - \frac{\Phi^7}{7} + \dots,$$

d'où

$$u + \tau = 2\Phi - \frac{2!+1}{3!}\Phi^3 + \frac{4!+(1.3)^2}{5!}\Phi^5 - \dots,$$

$$u - \tau = \frac{2!-1}{3!}\Phi^3 - \frac{4!-(1.3)^2}{5!}\Phi^5 + \frac{6!-(1.3.5)^2}{7!}\Phi^7 - \dots,$$

et, en faisant $u = \Pi, \tau = \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{4\Pi + \pi}{4} = 2 - \frac{2! + 1}{3!} + \frac{4! + (1.3)^2}{5!} - \frac{6! + (1.3.5)^2}{7!} + \ldots,$$

$$\frac{4\Pi - \pi}{4} = \frac{2! - 1}{3!} - \frac{4! - (1.3)^2}{5!} + \frac{6! - (1.3.5)^2}{7!} - \ldots.$$

34. On a la formule

$$u^2 = \sin^2 u + \frac{1}{2}\frac{2^2}{3!}\sin^4 u + \frac{1}{3}\frac{(2.4)^2}{5!}\sin^6 u + \frac{1}{4}\frac{(2.4.6)^2}{7!}\sin^8 u + \ldots.$$

On en tire

$$u^2 = \mathrm{Sh}^2 u - \frac{1}{2}\frac{2^2}{3!}\mathrm{Sh}^4 u + \frac{1}{3}\frac{(2.4)^2}{5!}\mathrm{Sh}^6 u - \frac{1}{4}\frac{(2.4.6)^2}{7!}\mathrm{Sh}^8 u + \ldots.$$

Cette dernière série est convergente pour $\mathrm{Sh}\, u < 1$ ou $u < \Pi$; à cette valeur limite, elle donne

$$\Pi^2 = 1 - \frac{1}{2}\frac{2^2}{3!} + \frac{1}{3}\frac{(2.4)^2}{5!} - \frac{1}{4}\frac{(2.4.6)^2}{7!} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{2^2}{2}\frac{1}{3!} + \frac{2^4}{3}\frac{(2!)^2}{5!} - \frac{2^6}{4}\frac{(3!)^2}{7!} + \frac{2^8}{5}\frac{(4!)^2}{9!} - \ldots.$$

35. On a

$$\frac{u}{\operatorname{tang} u} = 1 - \frac{u^2}{3} - \frac{u^4}{45} - \frac{2u^6}{945} - \ldots,$$

d'où

$$\frac{u}{\mathrm{Th}\, u} = 1 + \frac{u^2}{3} - \frac{u^4}{45} + \frac{2u^6}{945} - \ldots.$$

Cette série est convergente pour $u < 1$. et nous donne, pour cette valeur limite,

$$\frac{e^2 + 1}{e^2 - 1} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{45} + \frac{2}{945} - \ldots.$$

Les coefficients

$$A = 1, \quad A_1 = \frac{1}{3}, \quad A_2 = \frac{1}{45}, \quad A_3 = \frac{2}{945}, \ldots,$$

qui figurent dans les séries ci-dessus, se déduisent des nombres de Bernoulli

$$B = 1, \quad B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \ldots,$$

au moyen des relations suivantes :

$$A_1 = \frac{2^2}{2!} B_1, \quad A_2 = \frac{2^4}{4!} B_2, \quad A_3 = \frac{2^6}{6!} B_3, \ldots.$$

36. De la formule

$$\log \frac{\sin u}{u} = - A_1 \frac{u^2}{2} - A_2 \frac{u^4}{4} - A_3 \frac{u^6}{6} - \ldots,$$

on déduit

$$\log \frac{\mathrm{Sh}\, u}{u} = A_1 \frac{u^2}{2} - A_2 \frac{u^4}{4} + A_3 \frac{u^6}{6} - \ldots,$$

et l'application de la valeur limite $u = 1$ nous donne

$$\log \frac{e^2 - 1}{2} = 1 + \frac{1}{2} A_1 - \frac{1}{4} A_2 + \frac{1}{6} A_3 - \ldots.$$

37. On a aussi

$$\mathrm{tang}\, u = (2^2 - 1) A_1 u + (2^4 - 1) A_2 u^3 + (2^6 - 1) A_3 u^5 + \ldots;$$

d'où

$$\mathrm{Th}\, u = (2^2 - 1) A_1 u - (2^4 - 1) A_2 u^3 + (2^6 - 1) A_3 u^5 - \ldots,$$

et, en faisant $u = 1$,

$$\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = (2^2 - 1) A_1 - (2^4 - 1) A_2 + (2^6 - 1) A_3 - \ldots.$$

Les coefficients A de ces deux numéros sont les mêmes que ceux du n° 35.

38. La fonction $\sin u$ peut s'exprimer de la manière suivante, sous forme de produit infini :

$$\sin u = u \left(1 - \frac{u^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{9\pi^2}\right) \ldots.$$

On aura par conséquent

$$\mathrm{Sh}\, u = u \left(1 + \frac{u^2}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{u^2}{4\pi^2}\right) \left(1 + \frac{u^2}{9\pi^2}\right) \ldots,$$

comme le remarque M. Realis dans le mémoire cité au commencement de cette brochure.

Si l'on fait $u=1$,

$$\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)=\left(1+\frac{1}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{1}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{1}{9\pi^2}\right)\ldots,$$

et si l'on fait $u=\Pi$,

$$1=\Pi\left(1+\frac{\Pi^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{\Pi^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{\Pi^2}{9\pi^2}\right)\ldots.$$

En remplaçant u par π, puis par $\frac{\pi}{2}$, on obtiendra de plus les deux formules

$$\frac{1}{2\pi}\left(e^{\pi}-\frac{1}{e^{\pi}}\right)=\frac{2.5.10.17\ldots}{1.4.9.16\ldots},$$

$$\frac{1}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}\right)=\frac{5.17.37\ldots}{4.16.36\ldots}.$$

En les divisant l'une par l'autre, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{e^{\pi}+1}{e^{\frac{\pi}{2}}}=\frac{2.10.26.50\ldots}{1.9.25.49\ldots}.$$

39. De la formule

$$\cos u=\left(1-\frac{4u^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4u^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4u^2}{25\pi^2}\right)\ldots,$$

on déduit pareillement

$$\mathrm{Ch}\,u=\left(1+\frac{4u^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4u^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4u^2}{25\pi^2}\right)\ldots,$$

et de là, en faisant successivement $u=1, u=\Pi, u=\pi, u=\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)=\left(1+\frac{4}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4}{25\pi^2}\right)\ldots,$$

$$\sqrt{2}=\left(1+\frac{4\Pi^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4\Pi^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4\Pi^2}{25\pi^2}\right)\ldots,$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+\frac{1}{e^{\pi}}\right)=\frac{5.13.29\ldots}{1.9.25\ldots},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\pi}+1}{e^{\frac{\pi}{2}}}\right)=\frac{2.10.26\ldots}{1.9.25\ldots}.$$

Cette dernière formule vient déjà d'être obtenue au numéro précédent.

Par division,

$$\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}\,\frac{e^{2\pi}+1}{e^{\pi}+1}=\frac{5.13.29\ldots[(2n+1)^2+4]\ldots}{2.10.26\ldots[(2n+1)^2+1]\ldots}.$$

40. De la relation du nº 38, on tire aisément celle-ci :

$$\frac{1}{\operatorname{tang} u}=\frac{1}{u}+\frac{1}{\pi+u}-\frac{1}{\pi-u}+\frac{1}{2\pi+u}-\frac{1}{2\pi-u}+\ldots,$$

ou

$$\frac{1}{2u}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{\operatorname{tang} u}\right)=\frac{1}{\pi^2-u^2}+\frac{1}{4\pi^2-u^2}+\frac{1}{9\pi^2-u^2}+\ldots;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{2u}\left(\frac{1}{\operatorname{Th} u}-\frac{1}{u}\right)=\frac{1}{\pi^2+u^2}+\frac{1}{4\pi^2+u^2}+\frac{1}{9\pi^2+u^2}+\ldots.$$

En faisant $u=\Pi$, il vient

$$\frac{1}{2\Pi}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\Pi}\right)=\frac{1}{\Pi\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\Pi\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\pi^2+\Pi^2}+\frac{1}{4\pi^2+\Pi^2}+\frac{1}{9\pi^2+\Pi^2}+\ldots,$$

et, en faisant $u=1$,

$$\frac{1}{e^2-1}=\frac{1}{\pi^2+1}+\frac{1}{4\pi^2+1}+\frac{1}{9\pi^2+1}+\ldots.$$

En remplaçant u par πu, les formules précédentes deviendront

$$\frac{1}{2u}\left(\frac{1}{u}-\frac{\pi}{\operatorname{tang}\pi u}\right)=\frac{1}{1-u^2}+\frac{1}{4-u^2}+\frac{1}{9-u^2}+\ldots,$$

$$\frac{1}{2u}\left(\frac{\pi}{\operatorname{Th}\pi u}-\frac{1}{u}\right)=\frac{1}{1+u^2}+\frac{1}{4+u^2}+\frac{1}{9+u^2}+\ldots.$$

Cette dernière donne, pour $u=1$,

$$\frac{\pi-1}{2}+\frac{\pi}{e^{2\pi}-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\ldots.$$

Or,

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots.$$

De là, par soustraction,

$$\frac{(\pi-1)(\pi-2)+1}{6}-\frac{\pi}{e^{2\pi}-1}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{9.10}+\dots.$$

41. On a aussi la relation

$$\operatorname{tang} u=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-u}-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+u}+\frac{1}{\frac{3\pi}{2}-u}-\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+u}+\dots,$$

ou

$$\frac{1}{8}\frac{\operatorname{tang} u}{u}=\frac{1}{\pi^2-4u^2}+\frac{1}{9\pi^2-4u^2}+\frac{1}{25\pi^2-4u^2}+\dots;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{8}\frac{\operatorname{Th} u}{u}=\frac{1}{\pi^2+4u^2}+\frac{1}{9\pi^2+4u^2}+\frac{1}{25\pi^2+4u^2}+\dots.$$

En faisant $u=\Pi$, on a

$$\frac{1}{8\sqrt{2}\,\Pi}=\frac{1}{\pi^2+4\Pi^2}+\frac{1}{9\pi^2+4\Pi^2}+\frac{1}{25\pi^2+4\Pi^2}+\dots,$$

et, en faisant $u=1$,

$$\frac{1}{8}\frac{e^2-1}{e^2+1}=\frac{1}{\pi^2+4}+\frac{1}{9\pi^2+4}+\frac{1}{25\pi^2+4}+\dots.$$

En remplaçant u par πu, les formules précédentes deviennent

$$\frac{1}{8}\pi\frac{\operatorname{tang}\pi u}{u}=\frac{1}{1-4u^2}+\frac{1}{9-4u^2}+\frac{1}{25-4u^2}+\dots,$$

$$\frac{1}{8}\pi\frac{\operatorname{Th}\pi u}{u}=\frac{1}{1+4u^2}+\frac{1}{9+4u^2}+\frac{1}{25+4u^2}+\dots.$$

Cette dernière donne, pour $u=1$,

$$\frac{1}{8}\pi\frac{e^{2\pi}-1}{e^{2\pi}+1}=\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{29}+\dots.$$

Or,

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\dots.$$

De là, par soustraction,

$$\frac{\pi(\pi-1)}{32}+\frac{\pi}{16(e^{2\pi}+1)}=\frac{1}{1.5}+\frac{1}{9.13}+\frac{1}{25.29}+\dots.$$

42. On a

$$u = \cfrac{\operatorname{tang} u}{1 + \cfrac{\operatorname{tang}^2 u}{3 + \cfrac{4 \operatorname{tang}^2 u}{5 + \cfrac{9 \operatorname{tang}^2 u}{7 + \ldots,}}}}$$

formule d'où l'on tire

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \ldots.}}}}$$

De là

$$u = \cfrac{\operatorname{Th} u}{1 - \cfrac{\operatorname{Th}^2 u}{3 - \cfrac{4 \operatorname{Th}^2 u}{5 - \cfrac{9 \operatorname{Th}^2 u}{7 - \ldots,}}}}$$

et, en faisant $u = \Pi$,

$$\Pi \sqrt{2} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{6 - \cfrac{4}{5 - \cfrac{9}{14 - \cfrac{16}{9 - \cfrac{25}{22 - \ldots.}}}}}}$$

La loi des dénominateurs $1, 6 (= 2.3), 5, 14 (= 2.7), \ldots$ est évidente.

43. On connaît aussi la relation

$$\frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} = \operatorname{Th} u = \cfrac{u}{1 + \cfrac{u^2}{3 + \cfrac{u^2}{5 + \cfrac{u^2}{7 + \ldots,}}}} \tag{1}$$

d'où l'on tire, en faisant $u = 1$,

$$\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \ldots,}}}$$

et, en faisant $u = \Pi$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cfrac{\Pi}{1 + \cfrac{\Pi^2}{4 + \cfrac{\Pi^2}{5 + \dots}}}$$

Si l'on revient des lignes hyperboliques à celles du cercle, la formule (1) nous donnera

$$(2) \qquad \operatorname{tang} u = \cfrac{u}{1 - \cfrac{u^2}{3 - \cfrac{u^2}{5 - \dots}}},$$

et, en faisant $u = \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{4}{\pi} - 1 = \cfrac{\pi^2}{-3.16 + \cfrac{\pi^2}{5 + \cfrac{\pi^2}{-7.16 + \cfrac{\pi^2}{9 + \dots}}}}.$$

44. Les diverses formules que nous avons écrites plus haut sans démonstration sont extraites pour la plupart du *Calcul différentiel* de M. J. Bertrand. La formule (2) du numéro précédent se trouve proposée comme exercice dans le même ouvrage.

Celles dont nous allons nous occuper maintenant peuvent s'établir d'une manière élémentaire. Deux d'entre elles ont été énoncées comme questions dans le numéro de juillet 1869 des *Nouvelles Annales de Mathématiques* par l'auteur de ce travail. Il ignorait alors qu'elles fussent déjà connues. Il croit de même que les autres sont nouvelles, mais sans pouvoir rien affirmer à ce sujet d'une manière absolue. Quoi qu'il en soit, les démonstrations en seront passées sous silence afin d'abréger, le lecteur pouvant les retrouver sans peine.

45. On a

$$\frac{\sin u}{u} = \cos\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2^2}\cos\frac{u}{2^3}\dots,$$

d'où

$$\frac{\operatorname{Sh} u}{u} = \operatorname{Ch}\frac{u}{2}\operatorname{Ch}\frac{u}{2^2}\operatorname{Ch}\frac{u}{2^3}\dots,$$

et, par division,

$$\frac{\sin u}{\operatorname{Sh} u} = \frac{\cos\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2^2}\cos\frac{u}{2^3}\cdots}{\operatorname{Ch}\frac{u}{2}\operatorname{Ch}\frac{u}{2^2}\operatorname{Ch}\frac{u}{2^3}\cdots}.$$

46. De la formule

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{\operatorname{tang} u} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{u}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{u}{2^2} + \ldots$$

on tire

$$\frac{1}{\operatorname{Th} u} - \frac{1}{u} = \frac{1}{2}\operatorname{Th}\frac{u}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{Th}\frac{u}{2^2} + \ldots,$$

et, par addition,

$$\frac{1}{\operatorname{Th} u} - \frac{1}{\operatorname{tang} u} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Th}\frac{u}{2} + \operatorname{tang}\frac{u}{2}\right) + \frac{1}{2^2}\left(\operatorname{Th}\frac{u}{2^2} + \operatorname{tang}\frac{u}{2^2}\right) + \ldots.$$

47. On a aussi

$$1 - \frac{\sin^2 u}{u^2} = \left(\frac{1-\cos u}{u}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\frac{u}{2^2}}{\frac{u}{2^2}}\right)^2 + \ldots,$$

d'où

$$\frac{\operatorname{Sh}^2 u}{u^2} - 1 = \left(\frac{\operatorname{Ch} u - 1}{u}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Ch}\frac{u}{2} - 1}{\frac{u}{2}}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Ch}\frac{u}{2^2} - 1}{\frac{u}{2^2}}\right)^2 + \ldots.$$

On peut mettre aussi ces relations sous la forme suivante :

$$u^2 - \sin^2 u = 2^2\sin^4\frac{u}{2} + 2^4\sin^4\frac{u}{2^2} + 2^6\sin^4\frac{u}{2^3} + \ldots,$$

$$\operatorname{Sh}^2 u - u^2 = 2^2\operatorname{Sh}^4\frac{u}{2} + 2^4\operatorname{Sh}^4\frac{u}{2^2} + 2^6\operatorname{Sh}^4\frac{u}{2^3} + \ldots,$$

et, par addition,

$$\operatorname{Sh}^2 u - \sin^2 u = 2^2\left(\operatorname{Sh}^4\frac{u}{2} + \sin^4\frac{u}{2}\right) + 2^4\left(\operatorname{Sh}^4\frac{u}{2^2} + \sin^4\frac{u}{2^2}\right) + \ldots.$$

48. De la formule

$$\frac{3}{4}(u - \sin u) = 3\sin^3\frac{u}{3} + 3^2\sin^3\frac{u}{3^2} + \ldots$$

on tire

$$\frac{3}{4}(\mathrm{Sh}\,u - u) = 3\,\mathrm{Sh}^3\frac{u}{3} + 3^2\,\mathrm{Sh}^3\frac{u}{3^2} + \ldots,$$

et, par addition,

$$\frac{3}{4}(\mathrm{Sh}\,u - \sin u) = 3\left(\mathrm{Sh}^3\frac{u}{3} + \sin^3\frac{u}{3}\right) + 3^2\left(\mathrm{Sh}^3\frac{u}{3^2} + \sin^3\frac{u}{3^2}\right) + \ldots.$$

On a également la formule suivante, en termes finis, analogue à la précédente :

$$\frac{3}{4}\left(\sin u - \frac{1}{3^m}\sin 3^m u\right) = \sin^3 u + \frac{1}{3}\sin^3 3u + \ldots + \frac{1}{3^{m-1}}\sin^3 3^{m-1} u.$$

On en déduit, en faisant croître m indéfiniment,

$$\frac{3}{4}\sin u = \sin^3 u + \frac{1}{3}\sin^3 3u + \frac{1}{3^2}\sin^3 3^2 u + \ldots.$$

On aurait la formule correspondante, en termes finis,

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3^m}\mathrm{Sh}\,3^m u - \mathrm{Sh}\,u\right) = \mathrm{Sh}^3 u + \frac{1}{3}\mathrm{Sh}^3 3u + \ldots + \frac{1}{3^{m-1}}\mathrm{Sh}^3 3^{m-1} u.$$

Mais, si l'on voulait faire tendre m vers l'infini, le résultat obtenu n'aurait plus de sens, le second nombre n'étant plus convergent.

49. De la formule en termes finis

$$\frac{3}{4}\left(\cos u \pm \frac{1}{3^m}\cos 3^m u\right)$$
$$= \cos^3 u - \frac{1}{3}\cos^3 3u + \frac{1}{3^2}\cos^3 3^2 u - \ldots \pm \frac{1}{3^{m-1}}\cos^3 3^{m-1} u$$

on déduit, en faisant croître m indéfiniment,

$$\frac{3}{4}\cos u = \cos^3 u - \frac{1}{3}\cos^3 3u + \frac{1}{3^2}\cos^3 3^2 u - \ldots.$$

On a aussi la formule en termes finis

$$\frac{3}{4}\left(\mathrm{Ch}\,u \pm \frac{1}{3}\mathrm{Ch}\,3^m u\right) = \mathrm{Ch}^3 u - \frac{1}{3}\mathrm{Ch}^3 3u + \frac{1}{3^2}\mathrm{Ch}^3 3^2 u - \ldots$$
$$\pm \frac{1}{3^{m-1}}\mathrm{Ch}^3 3^{m-1} u.$$

Mais, comme au numéro précédent, on n'en déduirait rien en faisant croître m indéfiniment.

50. Citons enfin, pour terminer ce chapitre, les produits infinis :

$$\frac{\sin u}{u} = \left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{u}{3}\right)\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{u}{3^2}\right)\cdots$$

$$= \left(\frac{4\cos^2\frac{u}{3} - 1}{3}\right)\left(\frac{4\cos^2\frac{u}{3^2} - 1}{3}\right)\cdots,$$

$$\cos u = \left(4\cos^2\frac{u}{3} - 3\right)\left(4\cos^2\frac{u}{3^2} - 3\right)\cdots$$

$$= \left(1 - 4\sin^2\frac{u}{3}\right)\left(1 - 4\sin^2\frac{u}{3^2}\right)\cdots.$$

On déduira de là

$$\frac{\operatorname{Sh} u}{u} = \left(1 + \frac{4}{3}\operatorname{Sh}^2\frac{u}{3}\right)\left(1 + \frac{4}{3}\operatorname{Sh}^2\frac{u}{3^2}\right)\cdots$$

$$= \left(\frac{4\operatorname{Ch}^2\frac{u}{3} - 1}{3}\right)\left(\frac{4\operatorname{Ch}^2\frac{u}{3^2} - 1}{3}\right)\cdots,$$

$$\operatorname{Ch} u = \left(4\operatorname{Ch}^2\frac{u}{3} - 3\right)\left(4\operatorname{Ch}^2\frac{u}{3^2} - 3\right)\cdots$$

$$= \left(1 + 4\operatorname{Sh}^2\frac{u}{3}\right)\left(1 + 4\operatorname{Sh}^2\frac{u}{3^2}\right)\cdots.$$

DEUXIÈME PARTIE.

—

Extension de la trigonométrie du cercle et de l'hyperbole équilatère à l'ellipse et à l'hyperbole quelconque.

———

Lignes de l'ellipse et de l'hyperbole quelconque.

51. Nous avons eu jusqu'à présent pour objet l'étude de fonctions algébriques, tirant leur origine géométrique de l'hyperbole équilatère, de la même manière que les fonctions trigonométriques tirent la leur du cercle, et présentant les plus grandes analogies analytiques avec ces dernières. Nous allons nous proposer maintenant d'établir des relations qui peuvent être d'une certaine utilité géométrique, entre l'ellipse et l'hyperbole ayant mêmes axes. On pourrait, il est vrai, se contenter de les établir entre le cercle et l'hyperbole équilatère, et déduire ensuite par projection, des propriétés démontrées pour ces deux figures, celles qui se rapportent à l'ellipse et à l'hyperbole quelconque; mais il nous a semblé préférable, par une extension des définitions et des formules, d'indiquer une méthode de calcul et de recherche qui s'applique directement à ces courbes.

52. Considérons (*fig. 6*) une ellipse rapportée à ses axes, *et telle que le produit des deux demi-axes a et b soit égal à l'unité.* Appelant u le double du secteur A O M, nous appellerons *lignes elliptiques* de u, les lignes résultant des définitions du n° 1, en remplaçant seulement le mot *cercle* par *ellipse.* Nous désignerons ces lignes par les mêmes caractéristiques que les lignes trigonométriques ordi-

naires, en ayant soin seulement de les distinguer par des caractères italiques. Si l'on craint qu'il y ait ambiguïté sur la nature de l'ellipse

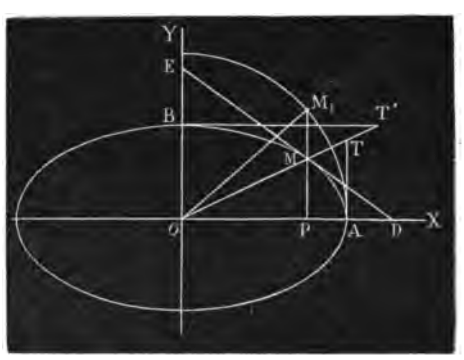


Fig. 6.

considérée, on pourra ajouter en indice le nombre a qui mesure le demi-axe des x. D'après cela, nous aurons

$$OP = cos_a u', \text{ ou, plus simplement, } OP = cos\, u, \quad PM = sin_a u = sin\, u,$$
$$OD = séc_a u = séc\, u, \quad AT = tang_a u = tang\, u,$$
$$BT' = cot_a u = cot\, u, \quad OE = coséc_a u = coséc\, u.$$

53. Cherchons les relations qui lient ces fonctions aux fonctions trigonométriques ordinaires de la même variable u. A cet effet, traçons une circonférence de centre O et de rayon OA; et soit M_1 le point d'intersection de PM avec cette circonférence. Soit en outre u_1 l'angle M_1OA, ou, ce qui revient au même, le double secteur répondant à cet angle dans une circonférence de rayon 1. On aura

$$\frac{u_1}{2AM_1O} = \frac{1}{a^2},$$

et de plus

$$\frac{2AM_1O}{2AMO} = \frac{2AM_1O}{u} = \frac{a}{b} = a^2,$$

puisque $ab = 1$. De là, par multiplication,

$$\frac{u_1}{u} = 1 \quad \text{ou} \quad u = u_1,$$

Or,

$$OP = a\cos u_1, \quad OD = a\,séc\, u_1, \quad BT' = a\cot u_1,$$

comme il est aisé de le voir; et, de même,

$$\mathrm{PM}=\mathrm{PM}_1\times\frac{b}{a}=\frac{\mathrm{PM}_1}{a^2}=\frac{a\sin u_1}{a^2}=\frac{\sin u_1}{a},\ \mathrm{AT}=\frac{\operatorname{tang} u_1}{a},\ \mathrm{OE}=\frac{\operatorname{coséc} u_1}{a}.$$

Donc, en résumé,

$$\mathit{cos}\,a = a\cos u,\qquad \mathit{séc}\,u = a\,\mathrm{séc}\,u,\qquad \mathit{cot}\,u = a\cot u,$$

$$\mathit{sin}\,u = \frac{1}{a}\sin u,\qquad \mathit{tang}\,u = \frac{1}{a}\operatorname{tang} u,\qquad \mathit{coséc}\,u = \frac{1}{a}\operatorname{coséc} u.$$

54. Si nous considérons enfin une hyperbole dont le demi-axe transverse a soit dirigé suivant OX, le demi-axe inaginaire b suivant OY, *et telle que le produit ab soit égal à 1*, nous définirons encore les lignes résultant de cette courbe comme dans le numéro précédent, et nous emploierons pour les représenter les notations

$$\mathit{Ch}_a u,\quad \mathit{Séch}_a u,\quad \mathit{Coth}_a u,\quad \mathit{Sh}_a u,\quad \mathit{Th}_a u,\quad \mathit{Coséch}_a u,$$

ou plus simplement

$$\mathit{Ch}\,u,\quad \mathit{Séch}\,u.\quad \mathit{Coth}\,u,\quad \mathit{Sh}\,u,\quad \mathit{Th}\,u,\quad \mathit{Coséch}\,u.$$

On verrait, en suivant une marche identique à celle qui a été employée au nº 53, qu'on a entre les fonctions de l'hyperbole équilatère et celles de l'hyperbole quelconque, les relations suivantes :

$$\mathit{Ch}\,u = a\,\mathrm{Ch}\,u,\qquad \mathit{Séch}\,u = a\,\mathrm{Séch}\,u,\qquad \mathit{Coth}\,u = a\,\mathrm{Coth}\,u,$$

$$\mathit{Sh}\,u = \frac{1}{a}\,\mathrm{Sh}\,u,\qquad \mathit{Th}\,u = \frac{1}{a}\,\mathrm{Th}\,u,\qquad \mathit{Coséch}\,u = \frac{1}{a}\,\mathrm{Coséch}\,u.$$

Formules relatives aux lignes de l'ellipse et de l'hyperbole quelconque.

55. En faisant les substitutions résultant des formules qui viennent d'être établies, et les portant dans les relations entre les lignes trigonométriques d'un même arc, on a

$$\mathit{séc}\,u = \frac{a^2}{\mathit{cos}\,u},\qquad \mathit{tang}\,u = a\frac{\mathit{sin}\,u}{\mathit{cos}\,u},\qquad \mathit{cot}\,u = \frac{1}{a}\frac{\mathit{cos}\,u}{\mathit{sin}\,u},$$

$$\mathit{coséc}\,u = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\mathit{sin}\,u},\qquad \frac{\mathit{cos}^2 u}{a^2} + a^2\,\mathit{sin}^2 u = 1.$$

Cette dernière formule peut s'écrire

$$\frac{cos\,u}{séc\,u} + \frac{sin\,u}{coséc\,u} = 1\,.$$

Nous pouvons remarquer aussi que le produit

$$tang\,u\;cot\,u$$

sera égal à l'unité, tout comme tang u cot u.

Au moyen de ces relations, il sera toujours aisé de ramener une fonction donnée de ces diverses lignes à ne plus renfermer que les deux lignes principales, *sin* et *cos*.

Par analogie, on a, pour les lignes de l'hyperbole quelconque,

$$Séch\,u = \frac{a^2}{Ch\,u}\,,\quad Th\,u = a\,\frac{Sh\,u}{Ch\,u}\,,\quad Coth\,u = \frac{1}{a}\,\frac{Ch\,u}{Sh\,u}\,,$$

$$Coséch\,u = \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{Sh\,u}\,,\quad \frac{Ch^2 u}{a^2} - a^2\,Sh^2 u = 1\,,$$

$$\frac{Ch\,u}{Séch\,u} - \frac{Sh\,u}{Coséch\,u} = 1\,,\quad Th\,u \cdot Coth\,u = 1\,,$$

et par ces relations, il sera possible d'exprimer toutes les lignes en fonction des deux principales, *Sh* et *Ch*.

Par une substitution pareille, on aurait immédiatement les lignes *sin*, *cos*, ..., *Sh*, *Ch*, ... sous forme exponentielle et sous forme de séries. On tomberait ainsi identiquement sur les valeurs du n° 4, à des facteurs près, et on en tirerait les formules suivantes, analogues de celle de Moivre :

$$(cos\,u \pm a^2 i\,sin\,u)^n = a^{n-1}\,(cos\,nu \pm a^2 i\,sin\,nu)\,,$$

$$(Ch\,u \pm a^2\,Sh\,u)^n = a^{n-1}\,(Ch\,nu \pm a^2\,Sh\,nu)\,.$$

Il est bon de remarquer que le coefficient a^2 qui s'introduit n'est autre que le rapport $\frac{a}{b}$ des deux axes de l'ellipse ou de l'hyperbole, puisque par hypothèse $ab = 1$.

56. On peut s'assurer sans peine que les formules du n° 8 subsistent intégralement, tant pour les fonctions directes que pour les fonctions inverses, si on y écrit en italique toutes les caractéristiques.

On verrait aussi, sans qu'il soit nécessaire de s'y arrêter davan-

tage, que les dérivées successives de *sin u* sont

$$\frac{1}{a^2} cos\, u, \quad -sin\, u, \quad -\frac{1}{a^2} cos\, u, \quad sin\, u, \ldots,$$

et celles de *cos u*,

$$-a^2 sin\, u, \quad -cos\, u, \quad a^2 sin\, u, \quad cos\, u, \ldots.$$

Pour les dérivées de *Sh u*, et *Ch u*, on a respectivement les deux suites analogues

$$\frac{1}{a^2} Ch\, u, \quad Sh\, u, \ldots,$$

$$a^2 Sh\, u, \quad Ch\, u, \ldots.$$

Les fonctions inverses donnent lieu aux relations

$$\text{arc}\, sin\, x = \text{arc}\sin a x, \quad \text{arc}\, Sh\, x = \text{arc}\,\text{Sh}\, a x,$$

$$\text{arc}\, cos\, x = \text{arc}\cos \frac{x}{a}, \quad \text{arc}\, Ch\, x = \text{arc}\,\text{Ch}\, \frac{x}{a},$$

$$\text{arc}\, tang\, x = \text{arc}\,\text{tang}\, a x, \quad \text{arc}\, Th\, x = \text{arc}\,\text{Th}\, a x,$$

et, partant de là, on trouve, pour leurs dérivées,

1° $u = \text{arc}\, sin\, x$, $\quad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} - x^2}}$,

2° $u = \text{arc}\, cos\, x$, $\quad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$,

3° $u = \text{arc}\, tang\, x$, $\quad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a^2} + x^2}$,

4° $u = \text{arc}\, Sh\, x$, $\quad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{a^2}}}$,

5° $u = \text{arc}\, Ch\, x$, $\quad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$,

6° $u = \text{arc}\, Th\, x$, $\quad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a^2} - x^2}$.

La connaissance de ces diverses dérivées peut être utile pour faciliter l'intégration d'expressions où seraient engagées les diverses fonctions que nous avons étudiées, ou qui contiendraient les résultats que nous venons d'obtenir comme dérivées des fonctions inverses.

Relations entre les variables τ et u. — Conséquences géométriques.

57. Reprenons les formules précédentes

$$\frac{\cos^2 u}{a^2} + a^2 \sin^2 u = 1, \tag{1}$$

$$\frac{Ch^2 u}{a^2} - a^2 Sh^2 u = 1. \tag{2}$$

En les divisant respectivement par $\frac{\cos^2 u}{a^2}$, $\frac{Ch^2 u}{a^2}$, on aura

$$\frac{séc^2 u}{a^2} - a^2 tang^2 u = 1, \tag{3}$$

$$\frac{Séch^2 u}{a^2} + a^2 Th^2 u = 1. \tag{4}$$

Nous pourrons identifier (1) avec (4), et (2) avec (3), comme nous l'avons dejà fait au n° 10, en posant

$$\cos \tau = Séch\, u, \quad \sin \tau = Th\, u, \tag{5}$$

$$Ch\, u = séc\, \tau, \quad Sh\, u = tang\, \tau. \tag{6}$$

On voit sans peine que l'une quelconque de ces relations entraîne toutes les autres, et entraîne en même temps les relations analogues du n° 10. Donc la liaison entre τ et u que nous avons étudiée précédemment subsiste pour une ellipse et une hyperbole quelconque ayant mêmes axes, identiquement comme entre le cercle et l'hyperbole équilatère.

Cette liaison entre un double secteur hyperbolique et son *amplitude hyperbolique* prend ainsi un caractère de généralité bien supérieur à celui qui lui est généralement attribué, puisqu'elle se rapporte à l'ellipse et l'hyperbole quelconque, au lieu de se restreindre au cercle et à l'hyperbole équilatère.

Nous aurons aussi les formules

$$tang\,\frac{\tau}{2} = \frac{a\,sin\,\tau}{a + cos\,\tau} = \frac{a\,tang\,\tau}{a + séc\,\tau},$$

$$Th\,\frac{u}{2} = \frac{a\,Sh\,u}{a + Ch\,u} = \frac{a\,Th\,u}{a + Séch\,u},$$

et par suite

$$tang\,\frac{\tau}{2} = Th\,\frac{u}{2}.$$

58. Cherchons à interpréter ces résultats au point de vue géométrique, et à nous rendre compte de la manière dont se représentent les valeurs correspondantes de τ et de u. A cet effet, traçons une ellipse et une hyperbole *quelconques* de mêmes axes (la moyenne proportionnelle des deux demi-axes étant supposée prise pour unité de longueur). Soit OA le demi-axe transverse, AC la tangente commune au sommet et

$$2\,\text{sect.}\,OAM = \tau, \quad 2\,\text{sect.}\,OAM' = u.$$

Construisons les lignes répondant aux points M et M' *(fig. 7)*.

Puisque $Sh\,u = tang\,\tau$ et $sin\,\tau = Th\,u$, on voit que les droites M'T, MT' seront parallèles à OA.

Les deux autres égalités $Ch\,u = séc\,\tau$, $cos\,\tau = Séch\,u$ nous montrent que la tangente à l'ellipse en M passe par le pied P' de l'ordonnée M'P', et que la tangente à l'hyperbole en M' passe par le pied P de l'ordonnée MP.

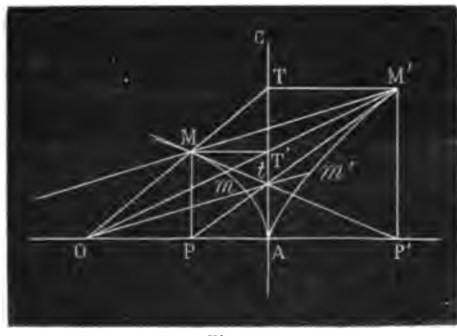


Fig. 7.

Proposons-nous de trouver le point de rencontre t des droites MP', AC. On a

$$\frac{At}{MP}=\frac{AP'}{PP'}=\frac{séc\,\tau-a}{séc\,\tau-cos\,\tau}=\frac{\frac{a^2}{cos\,\tau}-a}{\frac{a^2}{cos\,\tau}-cos\,\tau}=\frac{a}{a+cos\,\tau},$$

$$At=\frac{a\,sin\,\tau}{a+cos\,\tau}=tang\,\frac{\tau}{2}=Th\,\frac{u}{2}.$$

On trouve cette même valeur en cherchant l'intersection de M′ P avec AC. Donc ces deux tangentes se coupent en t sur la tangente commune au sommet, et la droite $Omtm'$ divise en parties équivalentes les deux secteurs OAM, OAM′.

Des relations ci-dessus résultent immédiatement les suivantes :

$$\frac{AP'}{PP'}=\frac{OA}{OA+OP},\quad \frac{AP'}{AP}=\frac{OA}{OP}=\frac{OP'}{OA}.$$

Enfin

$$\frac{Sh\,\tau}{Th\,\tau}=\frac{cos\,\tau}{a}=\frac{a+cos\,\tau}{a+séc\,\tau},$$

ou

$$\frac{MP}{M'P'}=\frac{a+OP}{a+OP'}.$$

Cette égalité nous montre que la droite MM′ prolongée passe par le sommet A_1, opposé au point A. Cette propriété permet de construire très simplement les points M et M′, correspondant à τ et à u, lorsque les deux courbes sont construites. Il suffit, comme on le voit, de mener par le sommet A_1 une droite quelconque coupant les deux courbes en M et M′.

59. Une des propriétés précédentes consiste en ce que, si par un point t, pris sur la tangente au sommet, on mène à l'une ou l'autre des deux courbes une seconde tangente tM (ou tM′) les secteurs O A m, O m M (ou O A m', O m' M′) sont équivalents. On peut s'assurer

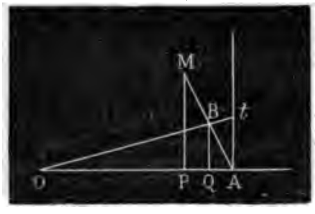


Fig. 8.

qu'il en est de même pour les triangles O A t, O t M (ou O A t, O t M′). Cherchons, en effet, dans l'ellipse, par exemple, l'intersection B des

droites Ot, MA (*fig.* 8). Soit BQ l'ordonnée de B. On a

$$\frac{BQ}{QA}=\frac{MP}{PA}, \quad \text{d'où} \quad QA = BQ\frac{PA}{MP},$$

$$\frac{BQ}{OQ}=\frac{At}{OA}, \quad \text{d'où} \quad OQ = BQ\frac{OA}{At}.$$

Par addition

$$QA+OQ=a=BQ\left(\frac{PA}{MP}+\frac{OA}{At}\right)=BQ\left(\frac{a-\cos\tau}{\sin\tau}+\frac{a}{\tang\frac{1}{2}\tau}\right)$$

$$=BQ\left(\frac{a-\cos\tau}{\sin\tau}+\frac{a+\cos\tau}{\sin\tau}\right)=\frac{2aBQ}{\sin\tau}.$$

Donc

$$BQ=\frac{\sin\tau}{2}=\frac{MP}{2}, \quad AB=BM.$$

Une démonstration toute semblable s'appliquerait à l'hyperbole, et l'on voit que, pour chacune de ces deux courbes, les aires $OAmM$, $OAtM$, OAM (ou $OAm'M'$, $OAtM'$, OAM') sont partagées par la droite $Omtm'$ en deux parties équivalentes. Cette propriété aurait pu s'établir bien facilement pour l'ellipse en la considérant comme projection d'un cercle; mais il eût peut-être été plus pénible de la démontrer géométriquement pour l'hyperbole.

Remarquons aussi l'équivalence des triangles OtM, OtM' (tous deux équivalents à OAt); il en résulte que MM' est parallèle à Ot.

60. Les propriétés ci-dessus, relatives à un point t, situé sur la tangente au sommet, peuvent s'étendre à un point quelconque, pourvu, s'il s'agit de l'hyperbole, qu'il reste situé dans la région comprise entre les asymptotes et l'une des branches de la courbe. Il suffit pour le voir de mener les deux tangentes par ce point, et de projeter la figure de telle sorte que l'angle formé par l'une de ces tangentes avec le diamètre aboutissant au point de contact se projette suivant un angle droit. Les aires étant altérées ainsi dans un même rapport, on voit que les propriétés obtenues subsisteront.

61. Ces divers résultats peuvent être de quelque utilité dans certains problèmes sur les coniques à centre. Pour ne pas étendre trop cette digression géométrique, nous nous bornerons à un seul exemple :

Une ellipse et une hyperbole ont mêmes axes AA_1, BB_1. *Par l'un des*

sommets réels A_1 *passe une sécante* A_1MM', *et les tangentes aux deux courbes en* M *et* M' *se coupent en* t. *On demande de construire ces courbes connaissant les points* A_1, M *et* t.

On voit immédiatement, d'après ce qui précède, qu'il suffira de mener : 1° une droite parallèle à A_1M et à égale distance du point t, du côté opposé; 2° une demi-circonférence sur A_1t comme diamètre, pour avoir par l'intersection de ces deux lignes le second sommet réel A, après quoi l'ellipse A_1MA est entièrement déterminée, puisqu'on en connaît un axe et un point. En donnant le point M' de l'hyperbole au lieu du point de l'ellipse, la solution serait la même.

D'après la construction indiquée, le problème comporte en général deux solutions, qui peuvent se réduire à une seule et même disparaître.

Expressions des lignes de variables complexes. — Périodicité.

62. La substitution des valeurs de sin u, Shu, ... en fonction de *sin u, Sh u*, ..., faite dans les formules du n° 12, donne immédiatement

$$\sin(u+v) = \frac{1}{a}(\sin u \cos v + \cos u \sin v), \tag{1}$$

$$\cos(u+v) = \frac{1}{a}\cos u \cos v - a^2 \sin u \sin v, \tag{2}$$

$$Sh(u+v) = \frac{1}{a}(Sh u\, Ch v + Ch u\, Sh v), \tag{3}$$

$$Ch(u+v) = \frac{1}{a}\, Ch u\, Ch v + a^2 Sh u\, Sh v \tag{4}$$

$$\sin(u+vi) = \frac{1}{a}(\sin u\, Ch v + i \cos u\, Sh v), \tag{5}$$

$$\cos(u+vi) = \frac{1}{a}\cos u\, Ch v - i a^2 \sin u\, Sh v, \tag{6}$$

$$Sh(u+vi) = \frac{1}{a}(Sh u \cos v + i\, Ch u \sin v), \tag{7}$$

$$Ch(u+vi) = \frac{1}{a}\, Ch u \cos v + i a^2 Sh u \sin v. \tag{8}$$

En introduisant dans ces relations, comme au n° 13, des valeurs

τ et u telles que $\tau = Amh\ u$, il vient

$$sin(\tau + ui) = tang\tau + isin\tau = Shu + iThu = Shu + isin\tau,$$
$$cos(\tau + ui) = a(1 - ia^2 sin\tau\, tang\tau) = a(1 - ia^2 Shu\, Thu) = a(1 - ia^2 sin\tau\, Shu),$$
$$Sh(u + \tau i) = Thu + iShu = sin\tau + i\, tang\tau = sin\tau + iShu,$$
$$Ch(u + \tau i) = a(1 + ia^2 Shu\, Thu) = a(1 + ia^2 sin\tau\, tang\tau) = a(1 + ia^2 Shu\, sin\tau).$$

63. Il est évident que toutes les observations faites plus haut relativement à la périodicité des fonctions $\sin u$, $\mathrm{Sh} u$, s'appliquent aux fonctions $sin\ u$, Shu, ..., qui sont identiques aux premières aux facteurs constants près a ou $\frac{1}{a}$. La période est la même, savoir 2π pour les lignes de l'ellipse, et $2\pi i$ pour celles de l'hyperbole; et les tangentes ou cotangentes admettent même la période π ou πi, suivant qu'il s'agit de l'ellipse ou de l'hyperbole.

Multiplication et division des secteurs d'ellipse ou d'hyperbole quelconque.

64. Si l'on veut bien suivre l'analogie, je pourrais presque dire l'identité, entre les considérations précédentes et celles de la première partie de ce travail, on verra qu'il serait possible de fonder une trigonométrie sur la mesure des angles par secteurs elliptiques ou hyperboliques quelconques. Pour obtenir les formules générales de ces deux trigonométries nouvelles, il suffit de suivre la marche indiquée au n° 18.

65. En appliquant ce procédé à la multiplication et à la division des secteurs, on obtiendra les relations suivantes, qui donneront lieu à des observations analogues à celles que fournissent les formules correspondantes du n° 19 :

1° $$sin2u = \frac{2}{a} sinu\, cosu, \qquad Sh2u = \frac{2}{a} Shu\, Chu,$$

2° $$cos2u = \frac{cos^2 u}{a} - a^2 sin^2 u, \qquad Ch2u = \frac{Ch^2 u}{a} + a^2 Sh^2 u,$$

3° $$tang2u = \frac{2 tangu}{1 - a^2 tang^2 u}, \qquad Th2u = \frac{2Thu}{1 + a^2 Th^2 u},$$

4° $$sin3u = 3sinu - 4a^2 sin^3 u, \qquad Sh3u = 3Shu + 4a^2 Sh^3 u,$$

$$5^\circ \qquad \cos 3u = \frac{4}{a^2}\cos^3 u - 3\cos u, \qquad Ch\,3u = \frac{4}{a^2}Ch^3 u - 3\,Ch\,u,$$

$$6^\circ \qquad \mathrm{tang}\,3u = \frac{3\,\mathrm{tang}\,u - a^2\,\mathrm{tang}^3 u}{1 - 3a^2\,\mathrm{tang}^2 u}, \qquad Th\,3u = \frac{3\,Th\,u + a^2\,Th^3 u}{1 + 3a^2\,Th^2 u},$$

$$7^\circ \begin{cases} \sin mu = m a^{1-m}\cos^{m-1}u\sin u - \dfrac{m!}{3!(m-3)!}a^{3-m}\cos^{m-3}u\sin^3 u + \ldots, \\ Sh\,mu = m a^{1-m}Ch^{m-1}u\,Sh\,u + \dfrac{m!}{3!(m-3)!}a^{3-m}Ch^{m-3}u\,Sh^3 u + \ldots, \end{cases}$$

$$8^\circ \begin{cases} \cos mu = a^{1-m}\cos^m u - \dfrac{m!}{2!(m-2)!}a^{3-m}\cos^{m-2}u\sin^2 u + \ldots, \\ Ch\,mu = a^{1-m}Ch^m u + \dfrac{m!}{2!(m-2)!}a^{3-m}Ch^{m-2}u\,Sh^2 u + \ldots. \end{cases}$$

Dans toutes les séries ou formules diverses étudiées précédemment, les substitutions indiquées conduiraient à autant de relations nouvelles, que le lecteur peut écrire immédiatement et qui allongeraient inutilement cette exposition.

TROISIÈME PARTIE.

Applications diverses.

Étude de la chaînette.

66. *Équation.* — On sait que l'équation de la chaînette est

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right).$$

D'après nos notations, nous pouvons la mettre sous la forme

$$x = m \operatorname{Ch} \frac{x}{m} = Ch_m \frac{x}{m}.$$

Pour étudier les propriétés de la courbe, nous pouvons prendre pour unité de longueur le paramètre m, si bien que l'équation devient

$$y = \operatorname{Ch} x.$$

Il est aisé de prendre immédiatement une idée de la forme générale de la courbe d'après cette équation, qui nous montre en particulier la symétrie de la chaînette par rapport à l'axe des y.

67. *Tangente.* — En différentiant l'équation de la chaînette, on a

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{Sh} x = \sqrt{y^2 - 1}\,;$$

de sorte que le coefficient angulaire de la tangente en chaque point se trouve déterminé complètement.

68. *Rectification de la chaînette.* — Soit s un arc de chaînette, compté à partir du point le plus bas, situé sur l'axe des y. On a

$$\frac{ds^2}{dx^2} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2} = y^2,$$

$$ds = y\, dx = \mathrm{Ch}x\, dx.$$

Intégrant depuis 0 jusqu'à x

$$s = \mathrm{Sh}x = \sqrt{y^2 - 1}.$$

On a donc la double égalité

$$\frac{ds}{y} = \frac{dy}{s} = \frac{dx}{1},$$

et

$$s^2 + 1 = y^2,$$

ce qui nous montre (*fig. 9*) que la projection MT de l'ordonnée MP sur la tangente est égale en longueur à l'arc CM, et que la projec-

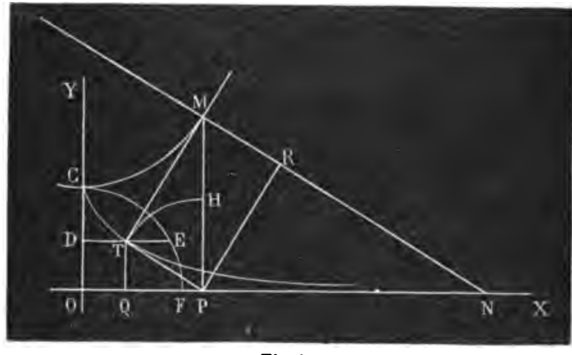


Fig. 9.

tion MR sur la normale est égale au paramètre OC. Le triangle MTP, rectangle en T, est donc formé par trois côtés dont les longueurs sont l'ordonnée, l'arc CM, et le paramètre.

69. *Aire de la chaînette.* — L'aire OCMP est donnée par

$$\int_0^x y\, dx = \mathrm{Sh}x.$$

Donc OCMP=MTPR.

70. *Rayon de courbure* — On a $\frac{dy}{dx} = \mathrm{Sh}x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{Ch}x$. Donc

$$\rho = \mathrm{Ch}^2x = y^2 = y\frac{ds}{dx}.$$

Le rayon de courbure est donc égal à la normale MN (mais de sens opposé). Il est en outre proportionnel au carré de l'ordonnée.

71. *Centre de gravité d'un segment compris entre une ordonnée et l'axe des y.* Le centre de gravité $(\bar{x}, \bar{y})$ de l'aire OCMP peut facilement s'obtenir. On a

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\frac{\int_0^x y^2\,dx}{\int_0^x y\,dx} = \frac{1}{4}\frac{x + \operatorname{Sh}x\operatorname{Ch}x}{\operatorname{Sh}x} = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{\operatorname{Sh}x} + \operatorname{Ch}x\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{s} + y\right),$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^x xy\,dx}{\int_0^x y\,dx} = \frac{x\operatorname{Sh}x - (\operatorname{Ch}x - 1)}{\operatorname{Sh}x} = x - \operatorname{Th}\frac{x}{2} = x - \frac{y-1}{s}.$$

Ces deux coordonnées pourraient se construire géométriquement.

De là on déduit immédiatement le centre de gravité $(\bar{x}', \bar{y}')$ de l'arc CM correspondant. Car, cet arc étant mesuré par le même nombre que l'aire OCMP, chacun des moments élémentaires par rapport à l'axe des x ne différera qu'en ce que le bras de levier sera doublé, et les moments par rapport à l'axe des y resteront identiquement les mêmes. On aura donc

$$\bar{y}' = 2\bar{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{s} + y\right),$$

$$\bar{x}' = \bar{x} = x - \frac{y-1}{s}.$$

72. *Tractoire.* — Puisque MT = MC, le lieu du point T est une développante de la chaînette ayant son origine en C. Cette développante est appelée *tractoire,* et l'on voit que sa tangente TP est constamment égale au paramètre OC.

Les coordonnées x_1, y_1 du point T sont

$$y_1 = \frac{1}{y}, \qquad x_1 = x - \frac{s}{y} = x - \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}.$$

Éliminant x, y entre ces deux équations et celle de la chaînette, on obtient l'équation de la tractoire

$$x_1 = \operatorname{arc}\operatorname{Ch}\frac{1}{y_1} - \sqrt{1-y_1^2},$$

L'equation différentielle de la même courbe est

$$\frac{dx_1}{dy_1} = -\frac{\sqrt{1-y_1^2}}{y_1},$$

et l'on a de plus les relations

$$\frac{ds_1}{y} = -dy_1 = \frac{dx_1}{s},$$

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{dy}{dx_1} = -\frac{dx}{dy_1} = \frac{y^2}{s} = \frac{1}{y_1\sqrt{1-y_1^2}}.$$

73. *Rectification et quadrature de la tractoire.* — La tractoire est rectifiable, car on a

$$ds_1 = \frac{s.ds}{y^2} = \frac{y.dy}{y^2} = \frac{dy}{y},$$

$$s_1 = \log y = \log \frac{1}{y_1}.$$

On peut remarquer la relation

$$e^{s_1} = y = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

ou

$$\operatorname{Ch} s_1 + \operatorname{Sh} s_1 = \operatorname{Ch} x.$$

L'aire COQT est fournie par l'intégrale

$$\int_0^{x_1} y_1\,dx_1 = \int_{y_1}^1 \sqrt{1-y_1^2}\,dy_1.$$

Elle s'évaluera donc au moyen du segment de cercle CDE correspondant, et l'aire totale comprise entre la courbe et l'axe des x sera équivalente au quart de cercle COF.

L'aire CMT$=\sigma$, comprise entre l'arc CM de la chaînette, la tangente MT et l'arc correspondant de la tractoire, peut aussi s'évaluer sans peine. On a

$$d\sigma = \frac{1}{2} s\,ds_1 = \frac{1}{2} s\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\frac{s^2 ds}{y^2} = \frac{1}{2}\frac{s^2 ds}{s^2+1},$$

et, en intégrant,

$$\sigma = \frac{1}{2}(s - \text{arc tang } s).$$

Ce résultat s'interprète géométriquement de la manière suivante. Décrivons l'arc TH du point P comme centre. Nous aurons

$$\mathrm{MTP} = \frac{1}{2}s, \quad \mathrm{HTP} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} s,$$

d'où

$$\sigma = \mathrm{MTP} - \mathrm{HTP},$$

ou bien

$$\mathrm{MTC} = \mathrm{MTH},$$

c'est-à-dire que *le quadrilatère mixtiligne* MCTH *est divisé par la diagonale* MT *en deux parties équivalentes.*

Propriétés de quelques autres courbes.

74. La forme d'équilibre d'un fil pesant, dont la densité est en chaque point proportionnelle à la racine carrée de l'arc qui sépare ce point du point le plus bas, est donnée par l'équation

$$2\beta y = \frac{1}{2}(x+2\beta)\sqrt{x^2+4\beta x} - 2\beta^2 \log \frac{x+2\beta+\sqrt{x^2+4\beta x}}{2\beta} \text{ [1]}.$$

En posant $\frac{x}{2\beta}+1 = \mathrm{Ch}\,u$, cette équation se remplace par les deux suivantes :

$$\frac{y}{\beta} = \mathrm{Ch}\,u\,\mathrm{Sh}\,u - u,$$
$$\frac{x}{2\beta} + 1 = \mathrm{Ch}\,u,$$

qui se prêtent peut-être plus facilement à l'étude des propriétés de la courbe. En les différentiant, on a

$$dy = 2\beta\,\mathrm{Sh}^2 u\,du,$$
$$dx = 2\beta\,\mathrm{Sh}\,u\,du.$$

Le coefficient angulaire de la tangente en (x, y) est

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{Sh}\,u = \frac{1}{2\beta}\sqrt{x^2+4\beta x}.$$

---

[1] *Voir*, par exemple, les *Problèmes de Mécanique rationnelle* du P. Jullien, 2e édition, t. I, p. 142.

La différentielle de l'aire d'un segment est

$$d\sigma = x\,dy = 4\beta^2 \operatorname{Ch} u \operatorname{Sh}^2 u\,du,$$

et, en intégrant, on a ce segment lui-même

$$\sigma = \int_0^y x\,dy = 4\beta^2 \int_0^u \operatorname{Ch} u \operatorname{Sh}^2 u\,du = \frac{4}{3}\beta^2 \operatorname{Sh}^3 u$$
$$= \frac{(x^2+4\beta x)^{\frac{3}{2}}}{6\beta}.$$

En faisant $x = 2\beta$, on trouve, comme valeur particulière correspondante,

$$\beta^2\sqrt{3}.$$

Enfin la courbe se rectifie sans peine; au moyen des valeurs précédentes de dy et dx, on trouve

$$ds = \beta \operatorname{Sh} 2u\,du,$$
$$s = \frac{\beta}{2}(\operatorname{Ch} 2u - 1) = \beta \operatorname{Sh}^2 u = x\left(\frac{x}{4\beta}+1\right).$$

Le rayon de courbure en un point quelconque s'obtient en tirant des valeurs précédentes celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$. On a

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{Sh} u, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{du}\frac{du}{dx} = \frac{\operatorname{Ch} u}{2\beta \operatorname{Sh} u},$$

$$\rho = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 2\beta \operatorname{Sh} u \operatorname{Ch}^2 u = \left(\frac{x}{2\beta}+1\right)^2\sqrt{x^2+4\beta x}.$$

Cette valeur s'annule pour $x = 0$; à l'origine, la courbe présente, en effet, un point de rebroussement.

75. La forme d'une chaîne homogène pesante, présentant partout égale chance de rupture, est donnée par l'équation

$$e^{\frac{y}{k}}\cos kx = 1 \text{ (}^1\text{)}.$$

---

(1) *Voir* l'Ouvrage déjà cité, t. I, p. 150.

Prenant pour unité de longueur le paramètre k, nous pouvons donner à cette équation la forme

$$\cos x = e^{-y} = \operatorname{Ch} y - \operatorname{Sh} y.$$

En la différentiant, on a

$$-\sin x\, dx = (\operatorname{Sh} y - \operatorname{Ch} y)\, dy = -\cos x\, dy,$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} x.$$

Si l'on déduit de là $\frac{d^2y}{dx^2}$, puis, qu'on substitue ces valeurs dans la formule qui donne le rayon de courbure, on trouve

$$\rho = \frac{1}{\cos x} = e^y.$$

Ainsi le rayon de courbure est proportionnel à la sécante de l'abcisse, et l'ordonnée est proportionnelle au logarithme du rayon de courbure.

76. La courbe affectée par une corde élastique et pesante, suspendue par ses deux extrémités, s'obtient ([1]) en éliminant p entre les deux équations

$$e^{\frac{mgx}{\tau} - \lambda\tau p} = p + \sqrt{1+p^2},$$

$$mgy = \tau\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\lambda\tau^2 p^2.$$

En prenant pour unité de longueur le paramètre $\frac{\tau}{mg}$, et en posant $p = \operatorname{Sh} u$, ce qui donne

$$p + \sqrt{1+p^2} = \operatorname{Sh} u + \operatorname{Ch} u = e^u,$$

ces équations prennent les formes plus simples

$$x = u + k \operatorname{Sh} u,$$

$$y = \operatorname{Ch} u + \frac{1}{2} k \operatorname{Ch}^2 u,$$

k étant égal à $\lambda\tau$.

On tire de ces équations, en les différentiant,

$$dx = (1 + k \operatorname{Ch} u)\, du, \quad dy = \operatorname{Sh} u (1 + k \operatorname{Ch} u)\, du,$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{Sh} u,$$

([1]) *Voir* l'Ouvrage déjà cité, t. I, p. 172.

$$ds = \mathrm{Ch}\,u(1 + k\,\mathrm{Ch}\,u)\,du,$$

$$s = \frac{ku}{2} + \mathrm{Sh}\,u + \frac{k}{4}\mathrm{Sh}\,2u = \frac{ku}{2} + \mathrm{Sh}\,u\left(1 + \frac{k}{2}\mathrm{Ch}\,u\right).$$

On voit que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y, et l'on peut déterminer, en chaque point répondant à une valeur donnée de u, la direction de la tangente, et la longueur de l'arc à partir de l'axe des y.

Le rayon de courbure ρ se déduit de la valeur

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathrm{Ch}\,u}{1 + k\,\mathrm{Ch}\,u},$$

qui donne

$$\rho = \mathrm{Ch}^2 u(1 + k\,\mathrm{Ch}\,u).$$

Au point le plus bas, ce rayon de courbure est

$$1 + k.$$

La normale est

$$n = y\frac{ds}{dx} = \mathrm{Ch}^2 u\left(1 + \frac{k}{2}\mathrm{Ch}\,u\right),$$

et l'élimination de u entre cette relation et celle qui donne ρ conduit à celle-ci

$$\rho - n = \frac{k}{2}(2n - \rho)^{\frac{3}{2}}.$$

L'aire de la courbe comprise entre deux parallèles à l'axe des x a pour différentielle

$$d\sigma = x\,dy = (u + k\,\mathrm{Sh}\,u)(1 + k\,\mathrm{Ch}\,u)\,\mathrm{Sh}\,u\,du,$$

et, en intégrant cette expression entre 0 et u, on trouve

$$\sigma = u\left(\mathrm{Ch}\,u + \frac{k}{4}\mathrm{Ch}\,2u - \frac{k}{2}\right) + \mathrm{Sh}\,u\left(\frac{k^2}{3}\mathrm{Sh}^2 u + \frac{k}{4}\mathrm{Ch}\,u - 1\right).$$

Courbes analogues à la cycloïde.

77. On sait que la cycloïde ordinaire peut être considérée comme engendrée par un point d'une circonférence O (*fig. 10*) dont le centre se meut en ligne droite, tandis que le rayon aboutissant au point mobile tourne autour du centre.

Ces mouvements sont tels que l'arc A_1M décrit sur la circonférence par le point mobile est équivalent à la translation OO_1 du centre. Cela revient à dire que le secteur A_1O_1M est équivalent au

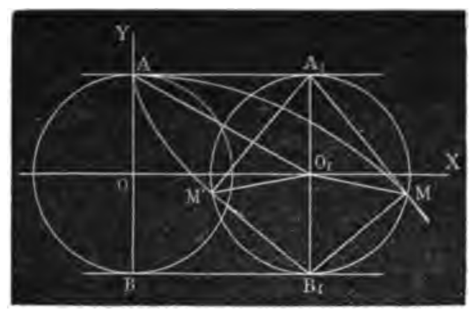


Fig. 10.

triangle rectangle AOO_1 ayant pour côtés de l'angle droit OO_1 et le rayon OA. Car

$$\text{sect. } A_1OM = A_1M \times \frac{OA}{2},$$

$$AOO_1 = OO_1 \times \frac{OA}{2}.$$

Si l'on suppose que le rayon mobile soit à l'origine perpendiculaire à la droite OO_1 comme cela se présente dans la figure, et si l'on appelle u l'angle A_1O_1M, ou, ce qui revient au même, le double secteur correspondant à cet angle dans un cercle de rayon 1, et r le rayon OA, la cycloïde sera déterminée par les deux équations

$$(1) \qquad x = r(u + \sin u), \qquad y = r\cos u,$$

ou

$$(2) \qquad x = r(u - \sin u), \qquad y = r\cos u,$$

suivant que la rotation du rayon mobile s'effectue dans un sens ou dans l'autre.

L'élimination du u entre les équations (1) donne

$$x = r \arccos \frac{y}{r} + \sqrt{r^2 - y^2},$$

et entre les équations (2),

$$x = r \arccos \frac{y}{r} - \sqrt{r^2 - y^2},$$

La première de ces deux équations représente une cycloïde droite

AM, et la seconde une cycloïde renversée AM', partant du même point A. La première serait engendrée par le roulement de la circonférence O sur BB_1, et la seconde, par le roulement de la même circonférence sur AA_1. A proprement parler, ces deux courbes n'en font qu'une au point de vue algébrique, c'est-à-dire qu'on les obtient à la fois en donnant, dans l'une quelconque des équations, le double signe au radical $\sqrt{r^2-y^2}$. Mais, en conservant les deux couples d'équations (1) et (2), il est possible de déterminer séparément les propriétés des deux branches, qui se trouvent être identiques.

C'est ainsi qu'on trouve, par exemple, que la tangente en M à la courbe M passe par A_1, que la tangente en M' à la courbe M' (M'M étant parallèle à OO_1) passe par B_1. On déduit enfin de cette discussion les diverses propriétés bien connues de la cycloïde, sur lesquelles nous n'avons pas à insister ici.

78. Nous pouvons imaginer maintenant qu'une courbe soit engendrée exactement d'après la même définition, mais par une ellipse au lieu d'un cercle, de telle sorte (*fig. 11*) que

$$\text{sect. } O_1A_1M = OAO_1.$$

Appelons u le double-secteur répondant à A_1OM dans une ellipse homothétique et de même centre, dont les deux demi-axes a et b auraient pour produit l'unité, et soit $OA = r$. Nous aurons

$$MP = r\cos_a u, \qquad OP = r\sin_a u, \qquad OO_1 \times \frac{r}{2} = u\frac{r^2}{2a^2},$$

d'où

$$OO_1 = \frac{ru}{a^2},$$

et, par suite,

$$x = r\left(\frac{u}{a^2} + \frac{1}{a}\sin_a u\right), \qquad y = \frac{r}{a}\cos_a u,$$

ou bien

$$x = r\left(\frac{u}{a^2} - \frac{1}{a}\sin_a u\right), \qquad y = \frac{r}{a}\cos_a u,$$

suivant le sens dans lequel s'opère le mouvement du rayon mobile.

On voit toute l'analogie qui existe entre ces équations et celles de la cycloïde ordinaire. Elles représentent deux cycloïdes, l'une droite,

l'autre renversée, partant du même point A. Si $a>1$ (ou $OA>OC$) les cycloïdes sont raccourcies; elles sont allongées au contraire si $a<1$ (ou $OA<OC$). Ces mots *cycloïde raccourcie, cycloïde allongée*

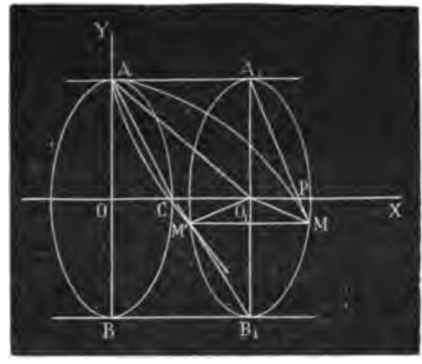


Fig. 11.

ne doivent pas être pris ici dans le sens qu'on leur attribue communément, et il est facile de reconnaître que ces courbes ne sont autre chose que des projections de cycloïdes ordinaires.

Si l'on remplace $\sin_a u$ et $\cos_a u$ par leurs valeurs en $\sin u$ et $\cos u$, les équations deviennent

$$x=\frac{r}{a^2}(u+\sin u), \qquad y=r\cos u,$$

ou

$$x=\frac{r}{a^2}(u-\sin u), \qquad y=r\cos u,$$

et l'élimination de u donne

$$x=\frac{r}{a^2}\left(\operatorname{arc}\cos\frac{y}{r}\pm\sqrt{r^2-y^2}\right).$$

Il suit de là que la sinusoïde

$$y=r\cos\frac{a^2x}{r}$$

est un diamètre de la courbe, et divise également les cordes parallèles à l'axe des x, et terminées aux deux branches. Celles-ci, du reste, sont identiques et superposables l'une à l'autre, comme les deux branches de cycloïde ordinaire dont elles sont les projections.

La tangente en un point quelconque s'obtient au moyen des équations précédentes, et l'on a

$$\frac{dy}{dx} = -a^2 \frac{\sqrt{r^2-y^2}}{r+y}, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -a^2 \frac{\sqrt{r^2-y^2}}{r-y},$$

selon qu'il s'agit de la branche droite AM ou de la branche renversée AM'. On conclut facilement de là que la tangente en M passe par le point A_1, la tangente en M' par B_1, et qu'aux points où les deux branches coupent la droite OO_1, les tangentes sont parallèles entre elles et à la droite AC.

Enfin, la quadrature de la courbe pourrait s'obtenir sans peine au moyen des équations. On verrait qu'elle se réduit à celle de segments d'ellipse, et par suite de segments circulaires, tout comme la quadrature de la cycloïde ordinaire. Mais il n'y a pas lieu d'insister plus longuement sur ces propriétés des cycloïdes elliptiques, qui s'obtiennent aussi d'une façon immédiate par projection.

79. Cherchons maintenant à construire d'autres courbes, qui soient, par rapport à l'hyperbole équilatère ou à l'hyperbole quelconque, ce que sont les précédentes par rapport au cercle ou à l'ellipse.

Soit d'abord une hyperbole équilatère, dont l'axe transverse $AB = 2r$ (*fig. 12*) est dirigé suivant l'axe des y. Cette hyperbole subit un mouvement de translation suivant l'axe des x, et le rayon

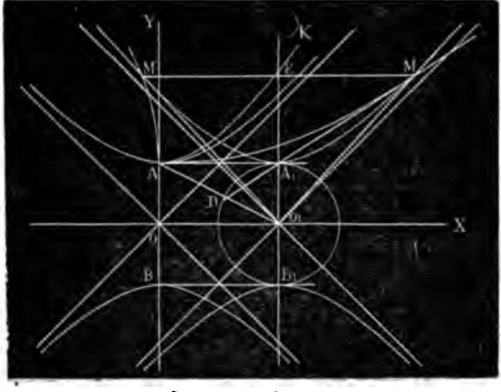


Fig. 12.

mobile OM, primitivement dirigé suivant OA, tourne en même temps autour du centre, de telle sorte que le triangle AA_1O_1 et le secteur O_1A_1M soient constamment équivalents.

Ce mode de génération donnera deux courbes pour le lieu du point M, selon que le mouvement de rotation se fera dans un sens ou dans l'autre. On aura ainsi, pour chaque position de l'hyperbole mobile, deux points M, M', de même ordonnée.

La courbe M sera représentée par les deux équations

$$(1) \qquad x = r(u + \mathrm{Sh}\, u), \qquad y = r\,\mathrm{Ch}\, u,$$

et la courbe M' par

$$(2) \qquad x = r(u - \mathrm{Sh}\, u), \qquad y = r\,\mathrm{Ch}\, u.$$

L'élimination de u donne

$$x = \mathrm{arc\,Ch}\,\frac{y}{r} \pm \sqrt{y^2 - r^2},$$

et cette équation représente à la fois les deux courbes considérées.

Elles sont entièrement situées au dessus de AA_1. La branche AM s'étend à droite de AY, et la branche AM' à gauche. Toutes deux sont infinies. La chaînette AK, ayant pour équation

$$\frac{y}{r} = \mathrm{Ch}\,\frac{x}{r}$$

est évidemment un diamètre, relativement aux cordes parallèles à l'axe des x.

80. La tangente en un point quelconque s'obtient en différentiant les équations précédentes; on a, pour la branche AM,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{Sh}\, u}{1 + \mathrm{Ch}\, u} = \sqrt{\frac{y-r}{y+r}},$$

et pour la branche AM',

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{Sh}\, u}{1 - \mathrm{Ch}\, u} = -\sqrt{\frac{y+r}{y-r}}.$$

L'interprétation géométrique de ces résultats nous montre que la tangente en M passe par le point A_1, et la tangente en M' par B_1. Le produit des coefficients angulaires étant -1, ces deux tangentes sont perpendiculaires entre elles, et leur point d'intersection D se trouve par conséquent sur la circonférence ayant pour diamètre l'axe de l'hyperbole mobile.

81. Les deux branches sont aisément quarrables. Évaluons, en effet, un segment infiniment petit compris entre un élément de la

branche AM, et deux ordonnées infiniment voisines, *au-dessus de la droite* AA_1. Nous aurons

$$(y-r)\,dx = \sqrt{y^2-r^2}\,dy\,.$$

De même, pour la branche AM', *au-dessus de la droite* BB_1,

$$-(y+r)\,dx = \sqrt{y^2-r^2}\,dy\,.$$

Les aires des deux branches s'évaluent donc par des segments correspondants de l'hyperbole équilatère, d'une façon tout à fait analogue à l'aire de la cycloïde ordinaire par rapport au cercle générateur.

L'examen des valeurs de $\frac{dy}{dx}$ montre que les deux branches AM, AM' n'ont pas d'asymptotes. Elles tendent de plus en plus à devenir parallèles, l'une à la droite $y=x$, l'autre à la droite $y=-x$.

82. Pour avoir le rayon de courbure ρ en M, différentions la relation

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{y-r}{y+r}\,.$$

Il viendra

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2r}{(y+r)^2}\frac{dy}{dx}\,,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r}{(y+r)^2}\,, \qquad \rho = 2\frac{y}{r}\sqrt{2y(y+r)}\,,$$

et, pour l'autre branche, au point M',

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r}{(y-r)^2}\,, \qquad \rho' = -2\frac{y}{r}\sqrt{2y(y-r)}\,.$$

Le rapport des deux rayons est

$$\frac{\rho}{\rho'} = -\sqrt{\frac{y+r}{y-r}}\,.$$

On peut donner à ces valeurs une interprétation géométrique assez simple. En effet,

$$\sqrt{2y(y+r)} = B_1M'\,, \qquad \sqrt{2y(y-r)} = A_1M\,,$$

et

$$\frac{2y}{r} = \frac{2O_1E}{O_1A_1} = \frac{2y(y-r)}{r(y-r)} = \frac{\overline{A_1M}^2}{O_1A_1.A_1E} = \frac{2A_1M}{A_1D} = \frac{2B_1M'}{B_1D}\,.$$

Donc

$$\rho = 2\frac{O_1E}{O_1A_1}B_1M' = 2\frac{A_1M.B_1M'}{A_1D},$$

et de même

$$\rho' = -2\frac{O_1E}{O_1A_1}A_1M = -2\frac{A_1M.B_1M'}{B_1D},$$

$$-\frac{\rho}{\rho'} = \frac{B_1M'}{A_1M} = \frac{B_1D}{A_1D}.$$

Donc les rayons de courbure en M et en M' sont en raison inverse des droites A_1M, B_1M', et aussi en raison inverse des cordes interceptées sur le cercle A_1B_1 par les tangentes en M et en M'.

En A, le rayon de courbure de la branche AM est égal à 2AB, et celui de la branche AM' est nul.

83. La courbe peut se rectifier. On a, en effet, pour la branche AM,

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{y-r}{y+r},$$

d'où

$$ds = \sqrt{\frac{2y}{y-r}}\,dy.$$

Intégrant, et comptant les arcs à partir du point A, on a

$$s = \frac{r}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\left(\frac{2y}{r}-1\right)^2-1} + \text{arc Ch}\left(\frac{2y}{r}-1\right)\right].$$

Pour la branche AM', on a

$$ds' = \sqrt{\frac{2y'}{y'+r}}\,dy',$$

$$s' = \frac{r}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\left(\frac{2y}{r}+1\right)^2-1} - \text{arc Ch}\left(\frac{2y}{r}+1\right) - 2\sqrt{2} + \text{arc Ch}\,3\right].$$

En posant

$$\frac{2y}{r}-1 = \text{Ch}\,v, \qquad \frac{2y'}{r}+1 = \text{Ch}\,v', \qquad 3 = \text{Ch}\,\alpha,$$

ces valeurs prennent les formes

$$s = \frac{r}{\sqrt{2}}(v + \text{Sh}\,v),$$

$$s' = \frac{r}{\sqrt{2}}[(\mathrm{Sh}\,v' - v') - (\mathrm{Sh}\,\alpha - \alpha)].$$

Si l'on considère deux valeurs y et y' telles que $y - y' = r$, il en résulte $v = v'$; et

$$s + s' = \frac{r}{\sqrt{2}}[2\,\mathrm{Sh}\,v - (\mathrm{Sh}\,\alpha - \alpha)].$$

Tous ces résultats se prêtent à de faciles interprétations géométriques. Mais nous n'y insistons pas pour éviter de trop longs développements.

84. En supposant une génération de courbes analogue, mais produite par une hyperbole quelconque, au lieu d'une hyperbole équilatère, on trouve que cette courbe aurait ses deux branches représentées respectivement par

$$x = \frac{r}{a^2}(u + \mathrm{Sh}\,u), \qquad y = r\,\mathrm{Ch}\,u,$$

et

$$x = \frac{r}{a^2}(u - \mathrm{Sh}\,u), \qquad y = r\,\mathrm{Ch}\,u.$$

On peut remarquer que les courbes ainsi obtenues se déduisent par projection de celle que nous venons d'étudier, et qu'on pourrait nommer *cycloïde hyperbolique*. Les propriétés relatives aux tangentes et aux aires se déduiraient aisément de cette remarque. Nous n'avons pas, du reste, à insister sur ce sujet après avoir indiqué les propriétés des courbes analogues provenant de l'ellipse ; car l'analogie est tellement grande que ce serait une pure répétition.

Résolution de l'équation du 3e degré.

85. Soit une équation du 3e degré, privée de son second terme,

$$(1) \qquad x^3 + \mathrm{P}x + \mathrm{Q} = 0,$$

et supposons d'abord que ses trois racines soient réelles, c'est-à-dire qu'on ait

$$4\mathrm{P}^3 + 27\mathrm{Q}^2 < 0,$$

ce qui implique la condition $\mathrm{P} < 0$.

Il sera toujours possible d'identifier l'équation (1) avec la suivante, qu'on a établie plus haut (nº 65, 4º),

$$\sin^3\frac{u}{3}-\frac{3}{4a^2}\sin\frac{u}{3}+\frac{\sin u}{4a^2}=0.$$

On n'aura pour cela qu'à poser

$$\frac{\sin u}{4a^2}=\mathrm{Q},\qquad \frac{3}{4a^2}=-\mathrm{P},$$

d'où

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{\mathrm{P}}},\qquad \sin u=-\frac{3\mathrm{Q}}{\mathrm{P}},\qquad \sin u=-\frac{3\mathrm{Q}}{2\mathrm{P}}\sqrt{-\frac{3}{\mathrm{P}}}.$$

La condition de réalité sera remplie; car sin u est plus petit que 1. Les trois racines seront

$$x_1=\sin\frac{u}{3},\qquad \left.\begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}\right\}=\sin\left(\frac{u}{3}\pm\frac{2\pi}{3}\right),$$

ou

$$x_1=\frac{1}{a}\sin\frac{u}{3},\qquad \left.\begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}\right\}=\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{u}{3}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{u}{3}\right),$$

ou encore

$$x_1=2\sqrt{-\frac{\mathrm{P}}{3}}\sin\frac{u}{3},\qquad \left.\begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}\right\}=-\frac{x_1}{2}\pm\sqrt{-\mathrm{P}}\cos\frac{u}{3}.$$

Si, au contraire, l'équation (1) n'a qu'une racine réelle, il peut arriver que P soit positif ou négatif.

Supposons le premier cas ($\mathrm{P}>0$). On identifiera l'équation donnée avec la suivante (nº 65, 4º):

$$Sh^3\frac{u}{3}+\frac{3}{4a^2}Sh\frac{u}{3}-\frac{Sh\,u}{4a^2}=0.$$

Il faudra poser pour cela

$$\frac{3}{4a^2}=\mathrm{P},\qquad \frac{Sh\,u}{4a^2}=-\mathrm{Q},$$

d'où

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\mathrm{P}}},\qquad Sh\,u=-\frac{3\mathrm{Q}}{\mathrm{P}},\qquad \mathrm{Sh}\,u=-\frac{3\mathrm{Q}}{2\mathrm{P}}\sqrt{\frac{3}{\mathrm{P}}},$$

et les trois racines seront

$$x_1=Sh\frac{u}{3},\qquad \left.\begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}\right\}=Sh\left(\frac{u}{3}\pm\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}\right),$$

ou, en introduisant les lignes de l'hyperbole équilatère,

$$x_1 = \frac{1}{a}\,\mathrm{Sh}\,\frac{u}{3}, \quad \left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{Sh}\,\frac{u}{3} \pm \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{Ch}\,\frac{u}{3}\right),$$

ou encore

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{P}{3}}\,\mathrm{Sh}\,\frac{u}{3}, \quad \left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{-1}\,\sqrt{P}\,\mathrm{Ch}\,\frac{u}{3}.$$

Soit maintenant $P<0$: nous pourrons toujours, en changeant x en $-x$, s'il y a lieu, rendre négatif le dernier terme Q. Cela fait, nous assimilerons l'équation (1) à la suivante (n° 65, 5°) :

$$Ch^3\,\frac{u}{3} - \frac{3a^2}{4}\,Ch\,\frac{u}{3} - \frac{a^3}{4}\,Ch\,u = 0,$$

en posant

$$\frac{3a^2}{4} = -P, \quad \frac{a^3\,Ch\,u}{4} = +Q,$$

d'où

$$a = 2\sqrt{-\frac{P}{3}}, \qquad Ch\,u = -\frac{3Q}{P}, \qquad \mathrm{Ch}\,u = -\frac{3Q}{2P}\sqrt{-\frac{3}{P}},$$

et les trois racines seront

$$x_1 = Ch\,\frac{u}{3}, \quad \left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = Ch\left(\frac{u}{3} \pm \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}\right),$$

ou, en introduisant les lignes de l'hyperbole équilatère,

$$x_1 = a\,\mathrm{Ch}\,\frac{u}{3}, \quad \left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = a\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{Ch}\,\frac{u}{3} \pm \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{Sh}\,\frac{u}{3}\right),$$

ou encore

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{P}{3}}\,\mathrm{Ch}\,\frac{u}{3}, \quad \left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{-1}\,\sqrt{-P}\,\mathrm{Sh}\,\frac{u}{3}.$$

Il peut arriver, enfin, que l'équation donnée ait deux racines égales, auquel cas on a $4P^3 + 27Q^2 = 0$. La méthode employée dans le cas où les trois racines sont réelles et inégales conduirait encore au résultat. On aurait $\sin u = 1$, et les trois racines seraient

$$x_1 = \sqrt{-\frac{P}{3}}, \quad x_2 = \sqrt{-\frac{P}{3}}, \quad x_3 = -2\sqrt{-\frac{P}{3}},$$

en supposant Q positif, ce qui est toujours permis.

On voit ainsi que l'équation du 3e degré peut se résoudre, dans tous les cas, d'une façon très simple, au moyen des fonctions trigonométriques ou hyperboliques.

86. On peut ramener la trisection d'un angle par la tangente, à celle d'un secteur elliptique, par les cosinus, et par suite à celle d'un autre angle, au moyen de la méthode précédente. Si, en effet, on pose $\operatorname{tang} u = f$, $\operatorname{tang} \frac{u}{3} = z$, on a, comme on l'a vu plus haut (nº 65, 6º),

$$(1) \qquad z^3 - 2fz^2 - 3z + f = 0.$$

En posant

$$(2) \qquad z = x + f,$$

on donne à cette équation la forme

$$(3) \qquad x^3 - 3(f^2+1)x - 2f(f^2+1) = 0.$$

On identifie cette équation avec celle qui donne le cosinus elliptique du tiers d'un double secteur v, en posant,

$$f^2 + 1 = \frac{a^2}{4}, \qquad \cos v = 2f = 2 \operatorname{tang} u;$$

d'où

$$a = \frac{2}{\cos u}, \qquad \cos v = \sin u.$$

Les trois racines de l'équation (1) sont

$$z_1 = \operatorname{tang} \frac{u}{3}, \qquad z_2 = \operatorname{tang} \left(\frac{u}{3} + 60^\circ\right), \qquad z_3 = \operatorname{tang} \left(\frac{u}{3} + 120^\circ\right),$$

et celles de l'équation (3),

$$x_1 = a \cos \frac{v}{3}, \quad x_2 = a \cos \left(\frac{v}{3} + 120^\circ\right), \quad x_3 = a \cos \left(\frac{v}{3} + 240^\circ\right).$$

Or, on satisfait à la relation $\cos v = \sin u$ en posant $v = 90^\circ - u$, d'où $\frac{v}{3} = 30^\circ - \frac{u}{3}$. On aura donc

$$x_1 = a \cos \left(30^\circ - \frac{u}{3}\right) = \frac{2}{\cos u} \cos \left(30^\circ - \frac{u}{3}\right),$$

$$x_2 = a \cos \left(150^\circ - \frac{u}{3}\right) = \frac{2}{\cos u} \cos \left(150^\circ - \frac{u}{3}\right),$$

$$x_3 = a \cos \left(270^\circ - \frac{u}{3}\right) = \frac{2}{\cos u} \cos \left(270^\circ - \frac{u}{3}\right) = - \frac{2 \sin \frac{u}{3}}{\cos u}.$$

La relation (2) existe respectivement entre z_2 et x_1, z_3 et x_2, z_1 et x_3, de sorte qu'on a

$$z_2 = x_1 + f, \qquad z_3 = x_2 + f, \qquad z_1 = x_3 + f.$$

Cette dernière relation, en particulier, donne

$$\operatorname{tang} u - \operatorname{tang} \frac{u}{3} = \frac{2 \sin \frac{u}{3}}{\cos u}, \text{ ou } \frac{\sin u}{\sin \frac{u}{3}} - \frac{\cos u}{\cos \frac{u}{3}} = 2.$$

Cette formule aurait pu s'obtenir directement. Elle n'est qu'un cas particulier de la suivante, qui s'obtiendrait immédiatement aussi,

$$\frac{\sin mu}{\sin u} - \frac{\cos mu}{\cos u} = \frac{2 \sin (m-1) u}{\sin 2u}.$$

On aurait trouvé ces mêmes résultats, en appliquant une méthode semblable à la recherche de *tang* $\frac{u}{3}$, connaissant *tang u*.

Enfin, en agissant pareillement sur les fonctions hyperboliques, on serait parvenu à des conclusions analogues. On a ainsi, par exemple, les formules

$$\frac{\operatorname{Sh} u}{\operatorname{Sh} \frac{u}{3}} - \frac{\operatorname{Ch} u}{\operatorname{Ch} \frac{u}{3}} = 2, \qquad \frac{\operatorname{Sh} mu}{\operatorname{Sh} u} - \frac{\operatorname{Ch} mu}{\operatorname{Ch} u} = \frac{2 \operatorname{Sh} (m-1) u}{\operatorname{Sh} 2u},$$

qui, du reste, se déduisent immédiatement des précédentes.

Applications au calcul intégral.

87. Dans ce qui précède, nous avons eu plusieurs fois occasion d'effectuer des intégrations dans lesquelles figuraient les fonctions que nous avons étudiées. Ces fonctions, en effet, comme le fait très justement remarquer M. Bertrand dans son *Calcul intégral,* ne présentent pas, à proprement parler, de ressources absolument nouvelles; mais elles constituent un système de notation plus simple dans beaucoup de cas, et qui peut faire ressortir, par ses analogies avec les lignes trigonométriques, des rapprochements qui, sans cela, passeraient souvent inaperçus.

Si l'on considère une différentielle quelconque dont l'intégrale soit

connue, et qui renferme des fonctions circulaires, il est clair qu'en appliquant les propriétés d'analogie, et suivant la méthode indiquée aux n°s 18 et 64, il sera possible d'en déduire immédiatement des intégrales semblables contenant les lignes de l'ellipse, de l'hyperbole équilatère ou de l'hyperbole quelconque.

En ce qui concerne l'ellipse et l'hyperbole quelconque, l'emploi des lignes étudiées ne donnera pas en réalité des résultats nouveaux, puisqu'elles ne diffèrent de celles du cercle et de l'hyperbole équilatère que par des facteurs constants. Cependant, il pourra souvent y avoir avantage à procéder comme nous le disons, sauf à substituer les lignes ordinaires dans les résultats; on n'aura pas, en effet, à se préoccuper de ces facteurs, qui sont souvent une gêne dans les calculs d'intégrales, et une source féconde d'erreurs.

En ce qui regarde les lignes hyperboliques, il est bon de remarquer qu'une intégrale connue pourra souvent en fournir deux distinctes, si les parties imaginaires qui s'introduisent par substitution ne se détruisent pas.

Toutes les expressions intégrées de la sorte seraient évidemment intégrables par les notations ordinaires; mais le calcul et surtout l'expression finale pourraient souvent être plus pénibles et plus compliqués. Ainsi les expressions

$$\text{arc Ch}\, z, \qquad \text{arc Sh}\, z, \qquad \text{arc Th}\, z$$

sont assurément plus simples que celles-ci, auxquelles elles sont équivalentes,

$$\log\left(z+\sqrt{z^2-1}\right), \qquad \log\left(z+\sqrt{z^2+1}\right), \qquad \log\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}:$$

Se priver des ressources que présente, à ce point de vue, la notation des fonctions hyperboliques, c'est à peu près agir comme si l'on voulait ne jamais employer les lignes trigonométriques ordinaires sin, cos, ... sous prétexte qu'elles ne font que remplacer certaines exponentielles imaginaires.

Enfin, les différentielles des fonctions hyperboliques inverses, que nous avons données précédemment (n°s 9 et 56), peuvent rendre très facile et très directe l'intégration d'expressions pour lesquelles on est habituellement forcé de recourir à des artifices plus ou moins compliqués.

88. A titre d'exemple, nous allons indiquer rapidement comment on peut intégrer les expressions irrationnelles du second degré de la forme $\frac{dx}{\sqrt{a+bx\pm x^2}}$.

Prenons d'abord le signe $+$, et mettons l'expression donnée sous la forme

$$\frac{dx}{\sqrt{a-\frac{b^2}{4}+\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}},$$

Soit $x+\frac{b}{2}=z$; si $a-\frac{b^2}{4}$ est positif et égal à α^2, on a (n° 56)

$$\int\frac{dz}{\sqrt{\alpha^2+z^2}}=\text{arc}\,Sh_{\alpha}z+C=\text{arc Sh}\,\frac{z}{\alpha}+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}=\text{arc Sh}\,\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{a-\frac{b^2}{4}}}+C.$$

Si $a-\frac{b^2}{4}$ est négatif et égal à $-\alpha^2$,

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-\alpha^2}}=\text{arc}\,Ch_{\alpha}z+C=\text{arc Ch}\,\frac{z}{\alpha}+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}=\text{arc Ch}\,\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}}+C.$$

Si le terme x^2 est précédé du signe $-$, on a

$$\frac{dx}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4}-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}},$$

et, posant $x-\frac{b}{2}=z$, $a+\frac{b^2}{4}=\alpha^2$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{\alpha^2-z^2}}=C-\text{arc}\,cos_{\alpha}z=C-\text{arc cos}\,\frac{z}{\alpha}=C'+\text{arc sin}\,\frac{z}{\alpha},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=C'+\text{arc sin}\,\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4}}}.$$

QUATRIÈME PARTIE

Coordonnées polaires elliptiques et hyperboliques.

Coordonnées polaires elliptiques.

89. Supposons qu'on représente un point M d'un plan par le système suivant de coordonnées :

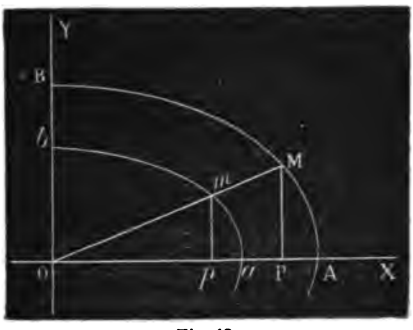


Fig. 13.

Soit OX (*fig. 13*) une droite fixe, Oab une ellipse de centre O, dont l'axe Oa est dirigé suivant OX, et dont le produit des deux demi-axes $Oa \times Ob$ est égal à 1.

Pour représenter un point M, menons par ce point une ellipse AB, homothétique à ab par rapport au point O, et joignons OM, qui coupe en m l'ellipse ab. Soit

$$\frac{OM}{Om} = \frac{OA}{Oa} = \frac{OB}{Ob} = \frac{\sqrt{OA.OB}}{1} = r_1,$$

et

$$2 \operatorname{sect} Oam = \theta_1.$$

Les valeurs r_1, θ_1 seront les deux coordonnées polaires elliptiques

du point M, et fixeront évidemment la position de ce point sur le plan.

On voit qu'en supposant que l'ellipse donnée se réduise à une circonférence, on retombe sur le système des coordonnées polaires habituelles.

90. Il est facile de rattacher ce système aux coordonnées orthogonales. Prenons, en effet, OX pour axe des x, Ob pour axe des y; nous aurons

$$\mathrm{OP} = x, \qquad \mathrm{MP} = y.$$

Mais

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{O}p} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O}m} = r_1,$$

et

$$\frac{\mathrm{MP}}{mp} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O}m} = r_1,$$

d'où

$$x = r_1 . \mathrm{O}p, \qquad y = r_1 . mp.$$

Or, par définition, Op et mp sont le cosinus et le sinus elliptiques de θ_1. Donc on aura

$$x = r_1 \mathit{cos}\,\theta_1, \qquad y = r_1 \mathit{sin}\,\theta_1. \tag{1}$$

Ces formules permettent de passer du système orthogonal à celui que nous étudions. On leur donne une forme plus commode en remplaçant *cos* et *sin* par leurs valeurs en cos et sin. Elles deviennent alors

$$x = a r_1 \cos\theta_1, \qquad y = \frac{1}{a} r_1 \sin\theta_1. \tag{2}$$

Les formules inverses, permettant de passer aux coordonnées orthogonales, se tirent immédiatement de celles-là, en les résolvant par rapport à r_1 et θ_1, ce qui donne

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{a^2}x^2 + a^2 y^2}, \qquad \operatorname{tang}\theta_1 = a^2 \frac{y}{x}. \tag{3}$$

Il est facile aussi d'établir des formules pour passer du système considéré aux coordonnées polaires ordinaires, ou inversement. On trouve

$$r = r_1 \sqrt{a^2 \cos^2\theta_1 + \frac{1}{a^2}\sin^2\theta_1}, \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{1}{a^2}\operatorname{tang}\theta_1 \tag{4}$$

et

(5) $$r_0 = r\sqrt{\frac{1}{a^2}\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}\,, \qquad \operatorname{tang}\theta_0 = a^2 \operatorname{tang}\theta\,.$$

91. Cherchons à étudier la relation qui existe entre une ligne représentée par l'équation

$$f(r_0, \theta_0) = 0$$

dans le système polaire elliptique, et la ligne représentée par la même équation

$$f(r, \theta) = 0$$

dans le système polaire ordinaire. Supposons qu'on attribue à r, θ, puis à r_0, θ_0, un même couple de valeurs particulières r_1, θ_1 dans ces deux équations, et voyons quelles seront les positions du point représenté dans l'une et l'autre hypothèse.

S'il s'agit du système polaire habituel, on a les équations

$$x = r_1 \cos\theta_1\,, \qquad y = r_1 \sin\theta_1\,,$$

et, au contraire, dans le système polaire elliptique,

$$x' = a r_1 \cos\theta_1\,, \qquad y' = \frac{1}{a} r_1 \sin\theta_1\,,$$

c'est-à-dire

(6) $$x' = ax\,, \qquad y' = \frac{y}{a}\,.$$

Il est aisé de voir que l'une des figures est la projection d'une figure homothétique à l'autre, par rapport au point O pris pour centre de similitude.

Les relations (6) font ressortir la conséquence suivante, importante en ce qui concerne les courbes algébriques : *Si l'équation $f(r, \theta) = 0$ en coordonnées polaires représente une courbe de degré n, l'équation $f(r_0, \theta_0) = 0$ en coordonnées polaires elliptiques représentera une courbe du même degré.*

92. La différentiation des équations (6) nous donne

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{1}{a^2}\frac{dy}{dx}$$

ou

$$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x'}{y'}\frac{dy'}{dx'}\,.$$

On voit qu'à une direction déterminée de la tangente à l'une des courbes correspond une direction constante (et différente de la première) pour l'autre, et tout à fait indépendante du point de contact. Ces résultats se prêtent évidemment à de faciles constructions géométriques.

Les équations (6), multipliées l'une par l'autre, donnent

$$x'y' = xy.$$

Donc *tous les points transformés d'un même point* M, *pour tous les systèmes polaires elliptiques possibles, sont avec le premier sur une même hyperbole équilatère, ayant les axes coordonnés pour asymptotes.*

Soient ρ, ρ' les rayons de courbure en M et M'. On a

$$\rho = \frac{\dfrac{ds^3}{dx^3}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}, \qquad \rho' = \frac{\dfrac{ds'^3}{dx'^3}}{\dfrac{d^2y'}{dx'^2}}.$$

Mais

$$dx' = a\,dx, \qquad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{1}{a^3}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Donc

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{ds^3}{ds'^3}.$$

Comme $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dx'}{x'}$ et $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dy'}{y'}$, on peut aussi mettre le rapport $\dfrac{\rho}{\rho'}$ sous la forme

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{y^3\dfrac{ds^3}{dy^3}}{y'^3\dfrac{ds'^3}{dy'^3}} = \frac{x^3\dfrac{ds^3}{dx^3}}{x'^3\dfrac{ds'^3}{dx'^3}},$$

ce qui montre que *les rayons de courbure en deux points correspondants sont entre eux comme les cubes des tangentes terminées soit à l'axe des x, soit à l'axe des y.*

Une équation $f(r_1, \theta_1) = 0$ étant donnée en coordonnées polaires elliptiques, on pourra déterminer la forme et les principales propriétés de la courbe qu'elle représente, si on sait le faire pour la courbe $f(r, \theta) = 0$ en coordonnées polaires ordinaires. Suivant les cas, la discussion pourra se faire d'une manière directe, ou bien il

vaudra mieux, au moyen des formules (3), revenir aux coordonnées orthogonales.

93. Une des propriétés remarquables du système polaire elliptique consiste en ce que l'expression d'un secteur élémentaire compris entre deux rayons infiniment voisins OM, OM_1 (*fig. 14*) et l'arc élémentaire MM_1, est $\frac{1}{2}r_1^2 d\theta_1$, c'est-à-dire identique à celle qui représente un secteur analogue en coordonnées polaires ordinaires.



Fig. 14.

On le voit géométriquement d'une manière bien simple. Si, en effet, on trace l'arc d'ellipse MM_2, le secteur OMM_2 est égal au secteur cherché, à un infiniment petit près d'ordre supérieur. Mais si OM, OM_2 rencontrent en m, m_2 l'ellipse homothétique dont le produit des demi-axes est égal à 1, on a

$$\frac{MOM_2}{mOm_2} = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{Om}^2} = r_1^2, \qquad mOm_2 = \frac{1}{2}d\theta_1.$$

Donc

$$MOM_2 = \frac{1}{2}r_1^2 d\theta_1.$$

Le calcul conduit au même résultat; en partant des formules (4), on trouve, en effet,

$$\frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}r_1^2 d\theta_1.$$

Il suit de là que, si la courbe $f(r, \theta) = 0$ est quarrable, il en sera de même de la courbe $f(r_1, \theta_1) = 0$, ce que l'on peut d'ailleurs reconnaître *a priori*, puisque l'une est la projection d'une courbe homothétique de l'autre.

94. Le système considéré se prête d'une façon heureuse à la recherche du centre de gravité d'un secteur limité par deux rayons OM_1, OM_2 et un arc M_1M_2. On trouve, en appelant $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ les coordonnées de ce centre de gravité,

$$\bar{x}_e = \frac{2}{3} a \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} r_e^3 \cos\theta_e d\theta_e}{\int_{\theta_1}^{\theta_2} r_e^2 d\theta_e}, \quad \bar{y}_e = \frac{2}{3}\frac{1}{a} \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} r_e^3 \sin\theta_e d\theta_e}{\int_{\theta_1}^{\theta_2} r_e^2 d\theta_e},$$

c'est-à-dire qu'en appelant $\bar{x}, \bar{y}$ les coordonnées du centre de gravité du secteur correspondant de la courbe $f(r, \theta) = 0$, nous avons

$$\bar{x}_e = a\bar{x}, \quad \bar{y}_e = \frac{1}{a}\bar{y},$$

ce qui nous montre que le centre de gravité $\bar{x}_e, \bar{y}_e$ est le transformé du centre de gravité $\bar{x}, \bar{y}$ d'après le système de transformation que nous avons indiqué.

95. Sans pousser plus loin l'examen des propriétés du système polaire elliptique et des analogies qu'il présente avec le système ordinaire, nous ferons seulement remarquer l'équation très simple $r_e = C$, qui représente une ellipse ayant pour centre l'origine, et dont on pourrait tirer quelques-unes des propriétés de cette courbe, comme on tire celles du cercle de $r = C$.

Coordonnées polaires de l'hyperbole équilatère.

96. Considérons maintenant un nouveau mode de représentation d'un point M sur un plan. Soit OX (*fig. 15*) un axe fixe, et O un point de cet axe pris pour origine. Menons par le point M une hyper-

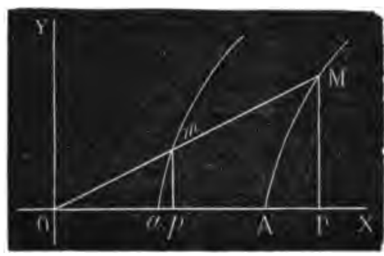


Fig. 15.

bole équilatère dont l'axe transverse OA coïncide avec OX, et traçons aussi l'hyperbole homothétique par rapport au point O, et dont le demi-axe Oa est égal à 1. Joignons OM, qui rencontre en m la seconde hyperbole. Nous prendrons pour coordonnées du point M la longueur OA = R et le double du secteur Oam, double secteur que

nous désignerons par Θ. Nous pourrons appeler ce système *coordonnées polaires de l'hyperbole équilatère,* ou *coordonnées polaires hyperboliques équilatères*.

97. Si nous prenons la perpendiculaire OY à OX pour axe des y, il est aisé de trouver des formules reliant les coordonnées nouvelles au système orthogonal OX, OY. Nous avons, en effet,

$$\frac{OP}{Op}=\frac{OM}{Om}=\frac{OA}{Oa},$$

et

$$\frac{MP}{mp}=\frac{OM}{Om}=\frac{OA}{Oa},$$

d'où

$$OP=\frac{OA.Op}{Oa}, \quad MP=\frac{OA.mp}{Oa},$$

c'est-à-dire

$$x=R\,\mathrm{Ch}\,\Theta, \quad y=R\,\mathrm{Sh}\,\Theta.$$

On tire de là les formules inverses

$$R=\sqrt{x^2-y^2}, \quad \mathrm{Th}\,\Theta=\frac{y}{x}.$$

On peut passer aussi du système polaire ordinaire au système considéré, et inversement, au moyen des formules suivantes, qui se déduisent de celles qui précèdent,

$$r=R\sqrt{\mathrm{Ch}\,2\Theta}, \quad \mathrm{tang}\,\theta=\mathrm{Th}\,\Theta$$

et

$$R=r\sqrt{\cos 2\theta}, \quad \mathrm{Th}\,\Theta=\mathrm{tang}\,\theta.$$

Remarquons aussi la relation

$$\mathrm{Ch}\,2\Theta\cos 2\theta=1.$$

Il est facile de voir qu'en s'en tenant aux valeurs réelles de Θ, on ne peut représenter ainsi que des points du plan, compris entre deux droites passant par l'origine et inclinées à 45° de part et d'autre de l'axe.

98. Dans le système que nous considérons, l'expression d'un secteur élémentaire d'une courbe compris entre deux rayons infiniment voisins OM, OM' (*fig. 16*) s'exprime par $\frac{R^2}{2}\,d\Theta$. On le démontre sans peine soit géométriquement, soit par le calcul.

Il en résulte que si la courbe $f(r, \theta) = 0$ en coordonnées polaires ordinaires est quarrable, il en sera de même de la courbe repré-

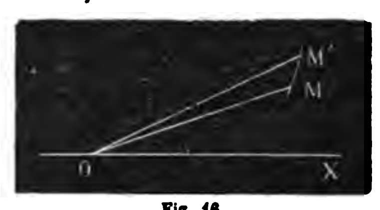


Fig. 16.

sentée par $f(\mathrm{R}, \Theta) = 0$ dans le système considéré; car les deux aires seront déterminées par la même intégrale.

Le centre de gravité d'un secteur compris entre deux rayons, correspondant aux valeurs Θ_1 et Θ_2, sera déterminé par les deux équations

$$\bar{x}_h = \frac{2}{3}\frac{\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \mathrm{R}^3 \mathrm{Ch}\,\Theta . d\Theta}{\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \mathrm{R}^2 d\Theta}, \qquad \bar{y}_h = \frac{2}{3}\frac{\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \mathrm{R}^3 \mathrm{Sh}\,\Theta . d\Theta}{\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \mathrm{R}^2 d\Theta}.$$

En raison de l'analogie qui existe entre les fonctions Ch, Sh et cos, sin, on pourra déterminer les intégrales en numérateurs, lorsqu'on connaîtra $\int r^3 \cos\theta . d\theta$, $\int r^3 \sin\theta . d\theta$. Il sera donc possible de déterminer le centre de gravité d'un secteur d'une courbe $f(\mathrm{R}, \Theta) = 0$ lorsqu'on saura déjà déterminer celui d'un secteur de la courbe $f(r, \theta) = 0$.

99. Signalons rapidement les analogies suivantes :

1° Les équations $r = k \sin\theta$, $r = k\cos\theta$ représentent, en coordonnées polaires, des *circonférences* tangentes en O à OX ou à OY, et les équations $\mathrm{R} = k\,\mathrm{Sh}\,\Theta$, $\mathrm{R} = k\,\mathrm{Ch}\,\Theta$ représentent, dans le système considéré, des *hyperboles équilatères* tangentes à l'origine à OX ou à OY.

2° $r = k\,\text{séc}\,\theta$, $r = k\,\text{coséc}\,\theta$ représentent des droites perpendiculaires ou parallèles à l'axe polaire; il en est de même des équations $\mathrm{R} = k\,\text{Séch}\,\Theta$, $\mathrm{R} = k\,\text{Coséch}\,\Theta$.

3° L'équation générale de la ligne droite est en coordonnées polaires

$$r = \frac{m}{n \sin\theta + p\cos\theta},$$

et, dans le système considéré,

$$R = \frac{m}{n \operatorname{Sh} \theta + p \operatorname{Ch} \theta}.$$

4° L'équation générale de la *circonférence* est en coordonnées polaires

$$r^2 + (m \sin \theta + n \cos \theta) r + p = 0,$$

et, dans le système considéré, l'équation générale des *hyperboles équilatères* ayant leurs axes parallèles à OX et OY est

$$R^2 + (m \operatorname{Sh} \theta + n \operatorname{Ch} \theta) R + p = 0.$$

5° L'équation générale des courbes du second degré est en coordonnées polaires

$$(m \sin^2 \theta + n \sin \theta \cos \theta + p \cos^2 \theta) r^2 + (q \sin \theta + s \cos \theta) r + t = 0,$$

et, en coordonnées polaires hyperboliques,

$$(m \operatorname{Sh}^2 \theta + n \operatorname{Sh} \theta \operatorname{Ch} \theta + p \operatorname{Ch}^2 \theta) R^2 + (q \operatorname{Sh} \theta + s \operatorname{Ch} \theta) R + t = 0.$$

6° Il existe aussi une analogie facile à saisir entre les courbes représentées par les équations

$$r = \frac{m}{1 + n \cos \theta}$$

et

$$R = \frac{m}{1 + n \operatorname{Ch} \theta}.$$

Si la première représente une ellipse, la seconde représente une hyperbole de mêmes axes, et inversement. Si la première représente une parabole, la seconde représente une parabole égale opposée par le sommet.

7° Enfin, les deux courbes $r = k$, $R = k$ sont, la première une circonférence ayant pour centre l'origine, et la seconde une hyperbole équilatère de même diamètre ayant pour axe réel l'axe des x.

100. Comme application bien simple de ce que nous avons dit un peu plus haut sur les centres de gravité, cherchons à déterminer le centre de gravité d'un secteur d'hyperbole équilatère compris entre deux rayons aboutissant au centre.

Les formules établies précédemment nous donneront, en faisant $R = k$,

$$\bar{x}_h = \frac{2}{3} k \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{Ch}\,\theta\, d\theta}{\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta}, \qquad \bar{y}_h = \frac{2}{3} k \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{Sh}\,\theta\, d\theta}{\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta},$$

ou

$$\bar{x}_h = \frac{2}{3} k \frac{\mathrm{Sh}\,\theta_2 - \mathrm{Sh}\,\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}, \qquad \bar{y}_h = \frac{2}{3} k \frac{\mathrm{Ch}\,\theta_2 - \mathrm{Ch}\,\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}.$$

Soient M_2OM_1 (*fig.* 17) le secteur en question, S son aire, M_2D

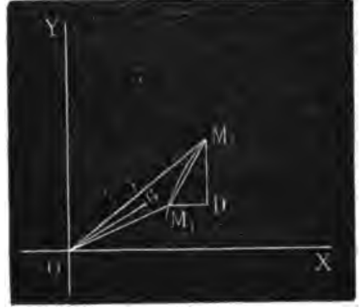


Fig. 17.

et M_1D deux droites respectivement parallèles à OY et OX. On aura

$$S = \frac{k^2}{2}(\theta_2 - \theta_1), \quad \text{d'où} \quad \theta_2 - \theta_1 = \frac{2S}{k^2},$$

$$M_2D = k(\mathrm{Sh}\,\theta_2 - \mathrm{Sh}\,\theta_1), \qquad M_1D = k(\mathrm{Ch}\,\theta_2 - \mathrm{Ch}\,\theta_1).$$

Par suite,

$$\bar{x}_h = \frac{1}{3} k^2 \frac{M_2D}{S}, \qquad \bar{y}_h = \frac{1}{3} k^2 \cdot \frac{M_1D}{S},$$

et, si G est le centre de gravité cherché,

$$OG = \frac{1}{3} k^2 \frac{M_1M_2}{S}.$$

De plus,

$$\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} = \frac{\mathrm{Ch}\,\theta_2 - \mathrm{Ch}\,\theta_1}{\mathrm{Sh}\,\theta_2 - \mathrm{Sh}\,\theta_1} = \mathrm{Th}\,\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{M_1D}{M_2D}.$$

De là les conséquences suivantes :

La droite OG *prolongée divise le secteur donné en deux parties équivalentes.*

Cette droite est inclinée sur l'axe des x du même angle que la corde M_1M_2 du secteur sur l'axe des y; c'est-à-dire que OG *est un diamètre conjugué de la direction de la corde M_1M_2.*

La longueur OG *est une quatrième proportionnelle au carré du demi-axe, à la surface des secteurs et au tiers de la corde.*

Les distances du centre de la courbe aux centres de gravité de deux secteurs équivalents sont entre elles comme les cordes de ces secteurs.

Les distances du centre de la courbe aux centres de gravité de deux secteurs ayant des cordes égales sont en raison inverse des aires de ces secteurs.

Si l'on fait $s = \pi k^2$, c'est-à-dire si l'on considère un secteur *équivalent au cercle ayant pour diamètre l'axe réel de l'hyperbole,* il vient

$$OG = \frac{1}{3}\frac{M_1M_2}{\pi}, \qquad 2\pi.OG = \frac{2}{3}M_1M_2.$$

Donc, *pour tout secteur de ce genre, la circonférence ayant pour rayon la distance* OG *est équivalente aux deux tiers de la corde du secteur.*

101. En multipliant par 2π les valeurs de $\bar{x}_h, \bar{y}_h$ écrites plus haut, on a

$$2\pi\bar{x}_h.S = \frac{2}{3}\pi k^2.M_2D, \qquad 2\pi\bar{y}_h.S = \frac{2}{3}\pi k^2.M_1D.$$

Nous pouvons, appliquant à ces résultats le théorème de Guldin, comparer les volumes représentés par ces diverses expressions. Dans ce but, menons (*fig. 18*) par le sommet réel A une parallèle AY'

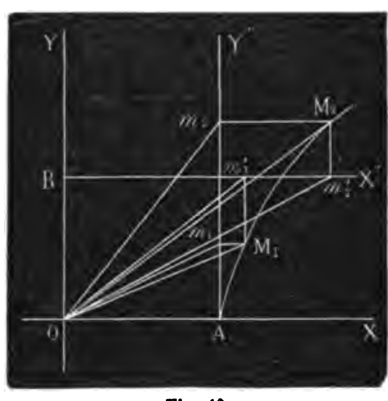


Fig. 18.

à OY, et par le sommet imaginaire B une parallèle BX' à OX. Proje-

jetons M_1, M_2 en m_1, m_2, sur AY' et en m'_1, m'_2 sur BX', et nous aurons les résultats suivants :

Les volumes engendrés par le secteur OM_1M_2 *et par le triangle* Om_1m_2, *tournant autour de* OY, *sont équivalents.*

Les volumes engendrés par le secteur OM_1M_2 *et par le triangle* $Om'_1m'_2$, *tournant autour de* OX, *sont équivalents.*

102. La même recherche du centre de gravité, appliquée à un secteur du cercle $r = k$, donnerait la solution connue

$$\bar{x} = \frac{2}{3} k \frac{\sin\theta_2 - \sin\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}, \quad \bar{y} = \frac{2}{3} k \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{\theta_2 - \theta_1},$$

et l'on tirerait de là des conséquences analogues à celles qui précèdent, et qui ne présenteraient d'ailleurs aucune nouveauté.

En appelant M'_1, M'_2, D' les points analogues à M_1, M_2, D, et supposant $\theta_1 = \Theta_1$, $\theta_2 = \Theta_2$, on aura aussi

$$\frac{\bar{x}_h}{\bar{x}} = \frac{M_2D}{M'_2D'}, \quad \frac{\bar{y}_h}{\bar{y}} = \frac{M_1D}{M'_1D'}.$$

Coordonnées polaires hyperboliques quelconques.

103. Nous pourrions considérer enfin un système de coordonnées tout à fait analogue à celui qui précède, mais fondé sur l'emploi d'une hyperbole quelconque, au lieu d'une hyperbole équilatère. Les coordonnées d'un point M seraient le demi-axe transverse R_h de l'hyperbole conduite par ce point, et le double secteur Θ_h répondant au même rayon, dans une hyperbole homothétique dont le produit des deux demi-axes serait égal à 1. Mais les explications que nous avons données sur le système polaire elliptique nous dispensent de plus longs développements.

Le système de coordonnées que nous indiquons jouerait, en effet, par rapport au système polaire équilatère, *identiquement* le même rôle que celui que joue le système polaire elliptique par rapport au système polaire ordinaire. Ayant une courbe représentée par l'équation $f(R, \Theta) = 0$, on la *contractera* dans le sens de l'axe polaire, et on la *dilatera* dans le sens perpendiculaire dans le même rapport (ou inversement), en écrivant $f(R_h, \Theta_h) = 0$. Les relations entre les coor-

données orthogonales des points des deux figures seront celles qu'on a trouvées précédemment.

Il y aura enfin une analogie complète entre les relations qui lient, d'une part, le système ordinaire au système équilatère, et d'autre part, le système elliptique au système fondé sur l'emploi d'une hyperbole de mêmes axes que l'ellipse.

Il serait possible d'étendre à l'hyperbole quelconque plusieurs des questions traitées plus haut relativement à l'hyperbole équilatère; mais, pour ne pas allonger ces développements outre mesure, nous laissons au lecteur le soin d'examiner lui-même ces applications.

APPENDICE

Applications numériques des fonctions hyperboliques.

Le grand intérêt que présente l'emploi des fonctions hyperboliques consiste surtout dans leur application aux calculs numériques. De nombreuses tables de ces fonctions ont été construites et publiées, à l'étranger surtout. En France, les tables dont l'usage est le plus pratique et le plus simple sont celles que contient le *Recueil de Formules et de Tables numériques* de M. Hoüel [1].

Pour donner une idée complète de l'utilité des fonctions hyperboliques, nous ne croyons pouvoir mieux faire que de reproduire ici quelques-uns des exemples indiqués par M. Hoüel, soit dans l'Introduction qui précède son *Recueil,* soit dans la *Notice* publiée par lui en 1864 dans les *Nouvelles Annales,* mais en renvoyant exclusivement à ses Tables, que le lecteur pourra se procurer sans peine, et dont les quatre décimales suffisent dans la plupart des cas.

Si l'on désirait une approximation plus grande dans les calculs, on pourrait soit employer les Tables de M. Vladimir Vassal, soit avoir recours à celles de Callet, pour pousser plus loin les approximations.

Tout en profitant de l'autorisation gracieuse que nous accorde M. Hoüel de reproduire les exemples dont il vient d'être question, nous nous permettons de les modifier un peu pour les approprier

---

[1] Paris, Gauthier-Villars. — 2e édition, 1868; un volume grand in-8°.

uniquement à ses Tables; nous en ajouterons aussi quelques autres, de manière à varier le plus possible les applications numériques.

I. — Résolution d'une équation du troisième degré n'ayant qu'une seule racine réelle.

Soit l'équation

$$x^3 - 901{,}5 \,.\, x - 13502{,}8 = 0\,.$$

Nous avons $P = -901{,}5$, $Q = -13502{,}8$, et nous poserons

$$\mathrm{Ch}\, u = \frac{3Q}{2P}\sqrt{-\frac{3}{P}}\,.$$

Les racines seront

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{P}{3}}\,\mathrm{Ch}\,\frac{u}{3}, \qquad \left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{-P}\,\mathrm{Sh}\,\frac{u}{3}\,.\,i\,.$$

Calcul de x_1.

$$\frac{P}{3} = -300{,}5$$
$$\frac{Q}{2} = -6751{,}4$$

$$\frac{P}{3} \;\ldots\ldots\; -2{,}47784$$

$$-\frac{3}{P} \;\ldots\ldots\; \bar{3}{,}52216$$
$$\sqrt{-\frac{3}{P}} \;\ldots\; \bar{2}{,}76108$$
$$\frac{Q}{2} \;\ldots\ldots\ldots\; 3{,}81766$$

$$\mathrm{Ch}\, u \;\ldots\ldots\; 0{,}1009$$

$$\mathrm{M}u = 0{,}3077$$
$$\frac{\mathrm{M}u}{3} = 0{,}10256$$

$$\mathrm{Ch}\,\frac{u}{3} \;\ldots\ldots\; 0{,}0120$$
$$\sqrt{-\frac{P}{3}} \;\ldots\; 1{,}2389$$

$$\frac{x_1}{2} \;\ldots\ldots\ldots\; 1{,}2509$$
$$\frac{x_1}{2} = 17{,}82$$
$$x_1 = 35{,}64\,.$$

Calcul de x_2 et x_3.

$$\sqrt{-\frac{P}{3}} \;\ldots\ldots\; 1{,}2389$$
$$\mathrm{Sh}\,\frac{u}{3} \;\ldots\ldots\; \bar{1}{,}3769$$
$$\sqrt{3} \;\ldots\ldots\; 0{,}2386$$

$$\log \;\ldots\ldots\; 0{,}8544$$

Nombre $= 7{,}15$.

$$\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = -17{,}82 \pm 7{,}15\,.\,i\,.$$

II. — Surface d'un sphéroïde aplati.

Soient a le demi-axe équatorial, b le demi-axe polaire d'un sphéroïde aplati, e l'excentricité de l'ellipse méridienne, p le demi-paramètre $= a(1-e^2)$. La surface de la zone comprise entre l'équateur et le parallèle situé à la distance y a pour expression

$$S = \pi b^2 \left[\frac{y}{p} \sqrt{1 + \frac{e^2 y^2}{p^2}} + \frac{1}{e} \log \left(\frac{ey}{p} + \sqrt{1 + \frac{e^2 y^2}{p^2}} \right) \right].$$

Pour calculer cette expression, posons

$$\frac{ey}{p} = \operatorname{Sh} u.$$

Il viendra

$$S = \frac{\pi b^2}{e} \left(\frac{1}{2} \operatorname{Sh} 2u + u \right).$$

S'il s'agit de la surface totale du sphéroïde, on fera $y = b$, d'où

$$\operatorname{Sh} u = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}},$$

et on doublera le résultat.

Qu'on demande, par exemple, la surface du sphéroïde terrestre, dont l'aplatissement est

$$\alpha = 1 - \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{299,15},$$

d'où

$$e = \sqrt{\alpha(2-\alpha)} = \frac{\sqrt{597,30}}{299,15}.$$

On prendra

$$\operatorname{Sh} u = \frac{\sqrt{\alpha(2-\alpha)}}{1-\alpha} = \frac{\sqrt{597,30}}{298,15}.$$

597,30 2,77619	$2u = 0,1638$	$\sqrt{597,30}$ ... 1,38809
$\sqrt{597,30}$ ... 1,38810	$\operatorname{Sh} 2u = 0,1645$	$\frac{1}{299,15}$ ..... $\bar{3},52411$
$\frac{1}{298,15}$ ..... $\bar{3},52556$	$\frac{1}{2}\operatorname{Sh} 2u = 0,0822$	e .... $\bar{2},91220$
	$u = 0,0819$	$\frac{1}{e}$ 1,0878
$\operatorname{Sh} u$ .... $\bar{2},91366$	Somme $= 0,1641$	.... $\bar{1},2151$
$u = 0,0819$	log ...... $\bar{1},2151$	Somme 0,3029
		Nombre $= 2,009$

$$\text{Surf. totale} = 2\pi b^2 \times 2,009 = 4\pi b^2 \times 1,0045.$$

On peut écrire également

$$\text{Surf. totale} = 2\pi a^2 \times 2{,}009 \times (1 - e^2) = 2\pi a^2 \times 2{,}009 \times \left(\frac{298{,}15}{299{,}15}\right)^2.$$

2,009	0,3029
$(298{,}15)^2$	4,9489
$\frac{1}{(299{,}15)^2}$	$\bar{5}{,}0482$
log	0,300
Nombre =	1,9954

$$\text{Surf. totale} = 2\pi a^2 \times 1{,}9954$$
$$= 4\pi a^2 \times 0{,}9977.$$

On a ainsi les rapports de la surface du sphéroïde aux surfaces des deux sphères ayant pour diamètres le diamètre polaire et le diamètre équatorial.

III. — Mouvement vertical d'un corps pesant dans un milieu résistant.

En supposant la résistance du milieu proportionnelle au carré de la vitesse, les temps de l'ascension et de la chute d'un mobile pesant, lancé verticalement, sont donnés par les formules

$$t_1 = \frac{k}{g} \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{k}, \qquad t_2 = \frac{k}{g} \operatorname{arc\,Sh} \frac{a}{k},$$

a étant la vitesse initiale, et k un coefficient constant.

Soient, par exemple,

$$a = 340^{m}, \quad \log \frac{k}{g} = 1{,}0792, \quad \text{d'où} \quad \log \frac{a}{k} = 0{,}4607.$$

Voici le calcul des deux formules précédentes :

$\frac{a}{k}$ 0,4607	arc tang $\frac{a}{k}$ (en quadr.) ... $\bar{1}{,}8964$	arc Sh $\frac{a}{k}$ ... 0,2511
arc tg $\frac{a}{k}$ = 0,7878	$\frac{\pi}{2}$ 0,1961	$\frac{k}{g}$ 1,0792
arc Sh $\frac{a}{k}$ = 1,7825	$\frac{k}{g}$ 1,0792	t_2 1,3303
	t_1 1,1717	

d'où

$$t_1 = 14^{s}{,}85, \qquad t_2 = 21^{s}{,}39.$$

On peut remarquer que, en posant $\frac{a}{k} = \text{Sh}\,u = \text{tang}\,\tau$, il vient

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\tau}{u} = \frac{\text{Amh}\,u}{u}.$$

Donc l'abcisse et l'ordonnée d'un point quelconque de la courbe des τ et des u (*fig. 3*) mesurent le temps de l'ascension et celui de la chute dans un mouvement vertical tel que celui que nous venons de considérer.

IV. — Détermination de divers éléments d'une chaînette ordinaire.

Supposons que deux points soient sur une même horizontale, à 200 mètres de distance l'un de l'autre, et réunis entre eux par une corde homogène, telle que la flèche au milieu soit de 79 mètres. Nous allons nous proposer de résoudre divers problèmes relatifs à la chaînette ainsi déterminée.

1° *Inclinaison de la tangente extrême sur l'horizon.* — Soit φ l'inclinaison cherchée. L'équation de la courbe peut s'écrire

$$y = a\,\text{Ch}\frac{x}{a},$$

d'où

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{dy}{dx} = \text{Sh}\frac{x}{a}.$$

Posant $\frac{x}{a} = u$, on a $\varphi = \text{Amh}\,u$, et

$$\frac{x}{y-a} = \frac{100}{79} = \frac{u}{\text{Ch}\,u - 1},$$

$$\frac{100}{79} = 1{,}26, \quad \log\frac{100}{79} = 0{,}10237.$$

Après quelques essais qui se font très rapidement en s'aidant de la règle à calcul, on trouve que u est compris entre

$$u_1 = 1{,}3434 \quad \text{et} \quad u_2 = 1{,}3760,$$
Diff. 326.

Or,

$$\log\frac{u_1}{\text{Ch}\,u_1 - 1} = 0{,}10843, \quad \log\frac{u_2}{\text{Ch}\,u_2 - 1} = 0{,}09490,$$
Diff. + 606. Diff. — 747.

Donc

$$u = 1{,}3434 + \frac{606}{606+747} \times 326 = 1{,}3580,$$

d'où

$$\varphi = \text{Amh}\, u = 0^{q},6795 = 61°9'18'',$$

valeur exacte à 2 ou 3 secondes près.

2° *Paramètre.* — De $\frac{x}{a} = u$ on tire

$$a = \frac{x}{u} = \frac{100}{1{,}3580}, \quad a = 73^{m},64.$$

3° *Longueur de l'arc.* — On a $y = 73{,}64 + 79 = 152{,}64$, et la longueur totale l de la courbe considérée est $2y \sin\varphi = 2y\, \text{Th}\, u$.

y	2,18367
2	0,30103
Th u ...	$\bar{1}$,94250
l	2,4272

$$l = 267^{m},43.$$

4° *Centre de gravité.* — Pour la moitié de l'arc considéré, on a, en appelant $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ les coordonnées du centre de gravité cherché, et conservant les notations ci-dessus,

$$\bar{y}_1 = \frac{a^2}{l}\left(u + \frac{1}{2}\text{Sh}\, 2u\right), \quad \bar{x}_1 = \frac{2a^2}{l}(u\, \text{Sh}\, u - \text{Ch}\, u + 1).$$

$u = 1{,}358$	u 0,1329
$2u = 2{,}716$	Sh u 0,2590
Sh $2u = 7{,}528$	u Sh u ... 0,3919
$\frac{1}{2}$ Sh $2u = 3{,}764$	u Sh u = 2,4655
$u = 1{,}358$	1
Somme = 5,122	3,4655
	Ch u = 2,0728
log 0,70944	Diff. = 1,3927
a^2 3,73422	log 0,14386
$\frac{1}{l}$ .... $\bar{3}$,57280	2 0,30103
	a^2 3,73422
$\bar{y}_1$ 2,01646	$\frac{1}{l}$ ...... $\bar{3}$,57280
$\bar{y}_1 = 103^{m},86$	$\bar{x}_1$ 1,75191
$\bar{y}_1 - a = 30^{m},22$	$\bar{x}_1 = 56^{m},48$

Le centre de gravité est donc à 30m,22 au-dessus du point le plus bas de la courbe.

Pour l'arc entier, l'ordonnée serait la même et l'abcisse évidemment nulle.

5° *Surface engendrée par la révolution de la courbe autour de son axe.* — Le théorème de Guldin nous donnera pour cette surface

$$\pi \bar{x}_1 l = 47458^{mq}.$$

6° *Moment d'inertie.* — Si nous cherchons le moment d'inertie I par rapport à l'axe horizontal passant par les deux points de suspension, nous aurons, en appelant X, Y les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, et μ la masse de la courbe par unité de longueur,

$$I = 2\mu \int_{s=0}^{s=\frac{l}{2}} (y - Y)^2 ds,$$

ou, en posant $\frac{X}{a} = U$,

$$I = 2\mu a^3 \int_0^u (\text{Ch}\, u - \text{Ch}\, U)^2 \,\text{Ch}\, U . dU.$$

L'expression sous le signe $\int$ peut s'écrire

$$\left[\frac{1}{4}\,\text{Ch}\, 3U - \text{Ch}\, u . \text{Ch}\, 2U + \left(\text{Ch}^2 u + \frac{3}{4}\right) \text{Ch}\, U - \text{Ch}\, u\right] dU,$$

et, en l'intégrant entre les limites indiquées, on a

$$\frac{1}{12}\,\text{Sh}\, 3u + \frac{3}{4}\,\text{Sh}\, u - u\,\text{Ch}\, u.$$

$u =$ 1,3580	u 0,1329	$\frac{1}{12}\text{Sh}\,3u =$ 2,4491
$\text{Sh}\,u =$ 1,8156	$\text{Ch}\,u$ 0,31655	$\frac{3}{4}\text{Sh}\,u =$ 1,3617
$3u =$ 4,0740		3,8108
$\text{Sh}\,3u =$ 29,39	$u\,\text{Ch}\,u$ ... 0,44945	$u\,\text{Ch}\,u =$ 2,8148
	$u\,\text{Ch}\,u =$ 2,8148	0,9960

$$I = 2\mu a^3 \times 0{,}996.$$

Le rayon de giration

$$R = \sqrt{\frac{I}{\mu l}} = \sqrt{\frac{2a^3 \times 0{,}996}{l}} = 73{,}64 \sqrt{\frac{73{,}64 \times 1{,}992}{267{,}43}} = 54^m{,}54.$$

V. — Détermination de divers éléments d'une parabole.

Supposons qu'une parabole à axe vertical (courbe des ponts suspendus) ait une corde horizontale de 200 mètres de longueur, et que la distance de cette corde au sommet soit de 79 mètres, comme dans la chaînette étudiée précédemment. Nous essaierons de résoudre les questions analogues à celles que nous venons de passer en revue.

1° *Inclinaison de la tangente extrême sur l'horizon.* — Soit $y = \frac{x^2}{2p}$ l'équation de la courbe

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{p} = \frac{2y}{x} = \frac{158}{100}, \qquad \varphi = 57^\circ 40' 12'' = 0^q,6408 .$$

2° *Paramètre.* — De $\frac{100}{p} = \frac{158}{100}$ on tire

$$p = \frac{10000}{158} = 63^m,29 .$$

3° *Longueur de l'arc.* — En posant

$$\frac{X}{p} = \operatorname{Sh} U, \qquad \frac{x}{p} = \operatorname{Sh} u,$$

on a

$$ds = p \operatorname{Ch}^2 U . dU,$$

et, pour la longueur totale de l'arc considéré,

$$l = 2p \int_0^u \operatorname{Ch}^2 U . dU = p\left(u + \frac{1}{2} \operatorname{Sh} 2u\right).$$

$u = 1,2384$	$u = 1,2384$	log 0,62262
$2u = 2,4768$	$\frac{1}{2}\operatorname{Sh} 2u = 2,9555$	p 1,80134
$\operatorname{Sh} 2u = 5,9110$	Somme $= 4,1939$	l 2,42396
	log 0,62262	$l = 265^m,44$

4° *Centre de gravité.* — Pour la moitié de l'arc considéré, on trouve

$$\bar{y}_1 = \frac{p^2}{8l}\left(\frac{\operatorname{Sh} 4u}{4} - u\right), \qquad \bar{x}_1 = \frac{2}{3}\frac{p^2}{l}(\operatorname{Ch}^3 u - 1).$$

$4u = 4{,}9536$	$\mathrm{Ch}\,u$ 0,2719	$\mathrm{Ch}^2 u - 1$ ... 0,74367
$\mathrm{Sh}\,4u = 70{,}9100$	$\mathrm{Ch}^2 u$ 0,8157	p^2 3,60268
$\frac{1}{4}\mathrm{Sh}\,4u = 17{,}7275$	$\mathrm{Ch}^2 u = 6{,}542$	2 0,30103
$u = 1{,}2384$	$\mathrm{Ch}^2 u - 1 = 5{,}542$	$\frac{1}{s}$ .... $\bar{1}{,}52288$
Diff. $= 16{,}4891$		$\frac{1}{l}$ .... $\bar{3}{,}57604$
log 1,21719		$\bar{x}_1$ 1,74630
p^2 3,60268		$\bar{x}_1 = 55^m{,}76$
$\frac{1}{8}$ .... $\bar{1}{,}09691$		
$\frac{1}{l}$ .... $\bar{3}{,}57604$		
$\bar{y}_1$ 1,49282		
$\bar{y}_1 = 31^m{,}104$		

Le centre de gravité est donc à $31^m{,}104$ au-dessus du point le plus bas de la courbe.

Pour l'arc entier, l'ordonnée serait la même et l'abcisse nulle.

5° *Surface engendrée par la révolution de la courbe autour de son axe.* — Le théorème de Guldin nous donnera pour cette surface

$$\pi \bar{x}_1 l = 46495^{mq}.$$

6° *Moment d'inertie.* — Cherchons le moment d'inertie I par rapport à l'axe horizontal passant par les points de suspension (qui n'est autre que celui d'une chaîne de pont suspendu dans ses oscillations). On a

$$\mathrm{I} = 2\mu \int_{s=0}^{s=\frac{l}{2}} (y - \mathrm{Y})^2 ds,$$

ou, en conservant les mêmes notations que ci-dessus,

$$\mathrm{I} = \mu \left[yl(y - 2\bar{y}_1) + \frac{p^3}{2} \int_0^u \mathrm{Sh}^4 \mathrm{U} . \mathrm{Ch}^2 \mathrm{U} . d\mathrm{U} \right].$$

L'intégrale du second membre a pour valeur

$$\frac{1}{16}\left(u - \frac{1}{4}\mathrm{Sh}\,2u - \frac{1}{4}\mathrm{Sh}\,4u + \frac{1}{12}\mathrm{Sh}\,6u\right).$$

Calculons-la tout d'abord

$2u = 2{,}4768$	$\mathrm{Sh}\,2u = 5{,}855$	$u = 1{,}24$	$\frac{1}{4}\mathrm{Sh}\,2u = 1{,}46$
$4u = 4{,}9536$	$\mathrm{Sh}\,4u = 70{,}88$	$\frac{1}{12}\mathrm{Sh}\,6u = 69{,}96$	$\frac{1}{4}\mathrm{Sh}\,4u = 17{,}72$
$6u = 7{,}4304$	$\mathrm{Sh}\,6u = 839{,}50$	71,20	19,18
		19,18	
		Diff. $= 52{,}02$	

$$\frac{1}{16}\,\text{Diff.} = 3{,}2512 = \int_0^u.$$

Donc

$$I = \mu\,[y l (y - 2\bar{y}_1) + 1{,}6256\,p^2].$$

En faisant

$$y = 79^{m}, \quad l = 265^{m},44, \quad \bar{y}_1 = 31^{m},104, \quad p = 63^{m},29,$$

on trouve

$$I = 764250\,\mu,$$

et, pour le rayon de giration,

$$R = \sqrt{\frac{I}{\mu l}} = \sqrt{\frac{764250}{265{,}44}} = 53^{m},66.$$

VI. — Anomalie vraie d'une comète.

L'anomalie vraie d'une comète, dans le mouvement parabolique, est donnée par l'équation (¹)

$$\tang^3 \frac{v}{2} + 3 \tang \frac{v}{2} = \frac{3kt}{\sqrt{2q^3}},$$

où l'on a

$$\log \frac{3k}{\sqrt{2}} = \bar{2},5621877.$$

Soient donnés, par exemple,

$$\log q = \bar{1},76565, \qquad t = 49^{j},2528,$$

d'où

$$\log \frac{3kt}{\sqrt{2q^3}} = 0{,}6061.$$

Les formules pour la résolution de l'équation du 3ᵉ degré donnent, en prenant

$$\frac{P}{3} = 1, \quad \log\left(-\frac{Q}{2}\right) = 0{,}3051,$$

$$\log \operatorname{Sh} u = 0{,}3051, \quad \text{d'où} \quad Mu = 0{,}6306, \quad \tfrac{1}{3} Mu = 0{,}2102,$$

$$\log \operatorname{Sh} \frac{u}{3} = \bar{1},7017, \quad \log \tang \frac{v}{2} = \log\left(2 \operatorname{Sh} \frac{u}{3}\right) = 0{,}0027,$$

$$\frac{v}{2} = 45^{\circ}10',8, \quad v = 90^{\circ}21',6,$$

valeur exacte à moins de $\frac{1}{10}$ de minute près.

(¹) GAUSS. *Theoria motus corporum cœlestium*, Art. 20.

VII. — Mouvement hyperbolique d'un astre.

Le mouvement hyperbolique d'un astre dépend des formules [1]

$$e\frac{u-u^{-1}}{2}-\log\text{nat}\,u=\frac{kt}{b^{\frac{3}{2}}},$$

$$r\cos v=b\left(e-\frac{u+u^{-1}}{2}\right),\qquad r\sin v=b\sqrt{e^2-1}\,\frac{u-u^{-1}}{2}.$$

En faisant d'abord $e=\text{Ch}\,\varepsilon$, on en conclut $\sqrt{e^2-1}=\text{Sh}\,\varepsilon$.

Posons maintenant

$$\log\text{nat}\,u=z.$$

Les formules deviendront

$$e\,\text{Sh}\,z-z=\frac{kt}{b^{\frac{3}{2}}}. \tag{1}$$

$$\begin{cases} r\cos v=b\,(e-\text{Ch}\,z).\\ r\sin v=b\sqrt{e^2-1}\,\text{Sh}\,z.\end{cases} \tag{2}$$

Si la valeur de z ne doit pas être trop considérable, il sera commode, pour faire les premiers essais qui conduisent à la résolution de l'équation (1), de mettre cette équation sous la forme

$$(e-1)\,\text{Sh}\,z+(\text{Sh}\,z-z)=0. \tag{3}$$

Dans l'exemple traité par Gauss (*Theoria motus*, Art. 26), on a

$$\log\frac{kt}{b^{\frac{3}{2}}}=\bar{1},14815,\qquad \log e=0,10102,$$

d'où

$$\frac{kt}{b^{\frac{3}{2}}}=0,1406,\qquad e-1=0,2619.$$

En négligeant d'abord $\text{Sh}\,z-z$, on voit que la valeur de z doit se trouver environ entre 0,43 et 0,49. On trouve ensuite, par un très petit nombre d'essais, que z est compris entre les arguments

0,4547 et 0,4634,

auxquels correspondent les valeurs de $e\,\text{Sh}\,z-z$,

0,1391 et 0,1425.

---

[1] *Theoria motus*, Art. 21 et 22.

La règle de fausse position donne alors, en opérant comme dans l'exemple IV (1°) ci-dessus

$$z = 0,4585.$$

On achève enfin le calcul comme il suit :

$e = 1,2619$	b 0,6021	b 0,6021
$\mathrm{Ch}\,z = 1,1070$	$e-\mathrm{Ch}\,z$ ... $\bar{1},1901$	$\sqrt{e^2-1}$ ... $\bar{1},8883$
$e-\mathrm{Ch}\,z = 0,1549$	$r\cos v$ .... $\bar{1},7922$	$\mathrm{Sh}\,z$ ...... $\bar{1},6765$
		$r\sin v$ 0,1649

d'où

$$\log\operatorname{tang} v = 0,3727, \quad v = 67°2'40'', \quad \log r = 0,2008.$$

On pourrait pousser l'approximation plus loin, en se servant des Tables de Gudermann.

VIII. — Quadrature de courbes planes.

1° Soit la courbe représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$(x^2-y^2)^3 = (a^2x + b^2y)^2,$$

et proposons-nous de trouver l'aire du secteur compris entre l'axe des x, une droite inclinée au-dessus de cet axe de l'angle τ ($< 45°$) et l'arc de courbe correspondant.

Écrivons l'équation en coordonnées polaires hyperboliques au moyen des formules de transformation établies plus haut

$$x = \mathrm{R}\,\mathrm{Ch}\,\theta, \quad y = \mathrm{R}\,\mathrm{Sh}\,\theta.$$

On trouvera

$$\mathrm{R}^2 = a^2\,\mathrm{Ch}\,\theta + b^2\,\mathrm{Sh}\,\theta,$$

et l'aire A du secteur cherché est

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_0^\theta \mathrm{R}^2\,d\theta = \frac{1}{2}(a^2\,\mathrm{Sh}\,\theta + b^2\,\mathrm{Ch}\,\theta - b^2).$$

Quant à la limite θ, elle est donnée par l'inclinaison τ du rayon limitant le secteur, puisque

$$\mathrm{Th}\,\theta = \operatorname{tang}\tau, \quad \text{d'où} \quad 2\tau = \mathrm{Amh}\,2\theta.$$

Supposons, par exemple,

$$a = 23^{\mathrm{m}}, \quad b = 15^{\mathrm{m}}, \quad \tau = 27° = 0^{\mathrm{q}},3;$$

on aura

$$2\tau = 0^q,6, \quad M.2\theta = 0,4882, \quad M\theta = 0,2441,$$

Sh θ ...... $\bar{1}$,7725	Ch θ 0,0653	313,34
a^2 2,7235	b^2 2,3522	261,52
log 2,4960	log 2,4175	574,86
Nombre = 313,34	Nombre = 261,52	b^2 = 225,00
		2 A = 349,86

$$A = 174^{mq},93.$$

2° Considérons la courbe ayant pour équation

$$\sqrt{x^2-y^2} = a.\log\text{nat}\sqrt{\frac{x+y}{x-y}},$$

et cherchons l'aire du secteur analogue à celui que nous venons d'évaluer dans la courbe précédente.

La transformation en coordonnées polaires hyperboliques donne

$$R = a\theta,$$

d'où

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\theta R^2 d\theta = \frac{a^2}{6}\theta^3 = \frac{R^3}{6a} = \frac{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{6a},$$

θ étant lié comme ci-dessus à l'inclinaison τ par la relation

$$2\tau = \text{Amh}\, 2\theta.$$

En supposant

$$a = 2^m,57, \quad \tau = 34°39' = 0^q,385,$$

on a

$$2\tau = 0,770, \quad 2\theta = 1,7003, \quad \theta = 0,8501,$$

a^2 0,81986	
θ^3 .... $\bar{1}$,78841	
$\frac{1}{6}$ ..... $\bar{1}$,22185	
A ..... $\bar{1}$,83012	$A = 0^{mq},6763$.

Il ne serait pas bien difficile non plus de calculer les coordonnées du centre de gravité de ce secteur, en suivant la méthode indiquée plus haut.

PRINCIPES D'UNE THÉORIE

DES

SYSTÈMES SYMÉTRIQUES D'ÉLÉMENTS

PAR LE Dr EM. WEYR

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE BOHÊME

I

Notions générales.

1. Si les divers éléments d'un système d'éléments simplement infini peuvent être déterminés uniformément par les diverses valeurs d'un paramètre, nous dirons que le système d'éléments est *rationnel.* Nous ne nous occuperons, dans ce qui va suivre, que de systèmes de cette nature.

Comme exemples de ces systèmes, on peut citer les systèmes de points sur des courbes rationnelles, les systèmes de tangentes sur ces mêmes courbes, ou les systèmes de plans d'inflexion sur les surfaces développables rationnelles (ou les courbes rationnelles dans l'espace); ou encore, les faisceaux de courbes et de surfaces, dans lesquels les courbes ou les surfaces doivent être considérées comme éléments.

2. Si entre deux systèmes d'éléments il existe une relation telle que, à chaque élément de l'un correspondent m éléments de l'autre, et à chaque élément du second n éléments du premier, les deux systèmes seront *m-n-formes* ou *correspondants suivant m, n* (1). Le premier système est n-forme, et le

(1) *In m-n-deutiger Beziehung.*

second m-forme. Entre les paramètres x,y de deux éléments correspondants de ces systèmes il existe une équation

$$F(x,y)=0,$$

du $n^{\text{ième}}$ degré en x et du $m^{\text{ième}}$ degré en y. Nous appellerons cette équation l'*équation de correspondance* (¹).

3. L'équation de correspondance renfermant, en général, $mn+(m+n)$ constantes indépendantes entre elles, on en conclut que les deux systèmes seront déterminés par $mn+(m+n)$ couples d'éléments correspondants.

4. Une transformation linéaire laisse invariable le degré d'une équation; de là résulte que, par des transformations homographiques, deux systèmes correspondants suivant m,n se changeront en deux systèmes de même nature.

5. Si les éléments de l'un des systèmes sont en même temps des éléments de l'autre (systèmes *conlocaux* (²)), on pourra attribuer aux paramètres x,y la même signification, et dans l'équation

$$F(x,y)=0$$

faire $y=x$; de là on tire une équation du $(m+n)^{\text{ième}}$ degré, faisant connaître ceux des éléments qui coïncident avec un de leurs correspondants. Deux systèmes conlocaux correspondants suivant m,n ont donc $m+n$ *éléments communs*. Si, parmi les éléments communs, r coïncident entre eux, il en résulte un élément commun r-uple.

6. Si à un élément de l'un des systèmes correspondent deux éléments coïncidants de l'autre système, nous nommerons le premier élément un *élément de ramification* ou *élément tangentiel*, et les deux autres formeront un *élément double* du second système. Pour que l'équation

$$F(x,y)=0$$

(¹) *Voir* les travaux de M. Chasles, relatifs à cette question.

(²) *Systeme auf demselben Träger, conlocale Systeme.*

ait deux racines y égales entre elles, il faudra que l'on ait aussi

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

En éliminant y entre ces deux équations, on obtiendra une équation en x du degré $2n(m-1)$, d'où il s'ensuit que *le système n-forme renferme $2n(m-1)$ éléments de ramification, auxquels répondent autant d'éléments doubles dans le système m-forme. De même, ce dernier renferme $2m(n-1)$ éléments de ramification, et le premier autant d'éléments doubles correspondants.* Si, parmi les éléments correspondants à un élément, $p+1$ coïncident entre eux, l'élément de ramification est dit *du $p^{\text{ième}}$ ordre*, les éléments coïncidants forment un élément $(1+p)$-uple.

7. Pour $m=1$, l'équation $F(x,y)=0$ devient

$$(ax^n+bx^{n-1}+\ldots)+y\,(\alpha x^n+\beta x^{n-1}+\ldots)=0,$$

et dans ce cas le système n-forme constitue une *involution* du $n^{\text{ième}}$ degré. A chaque élément y correspond un groupe de n éléments x, que l'on peut aussi considérer comme correspondants entre eux (involutoires). Un groupe formant un ensemble complet en lui-même, il existe dans ce groupe une *propriété commutative (Vertauschungsfähigkeit)* : c'est là le caractère principal des involutions. Une involution du $n^{\text{ième}}$ degré possède $2(n-1)$ éléments doubles [6], et est déterminée dès que l'on fait correspondre $2n+1$ de ses éléments à autant d'éléments d'un système uniforme [3].

On peut déterminer une involution, considérée isolément en elle-même, au moyen de deux groupes de ses éléments, que l'on peut considérer alors comme ceux de la dernière équation qui correspondent à $y=0$ et à $y=\infty$. Les couples d'éléments d'une involution quadratique partagent, comme on sait, harmoniquement le couple d'éléments doubles $(n=2)$.

8. Si les deux systèmes m-n-uples sont conlocaux, on pourra rechercher quel est le nombre des *couples involutoires*

d'éléments, c'est-à-dire des couples d'éléments tels que chacun d'eux corresponde à l'autre, soit qu'on le considère comme appartenant au premier système, ou comme appartenant au second. Si dans l'équation $F(x,y)=0$ on échange entre eux les paramètres x,y, on obtiendra l'équation $F(y,x)=0$, qui aura avec la première $(m+n)^2$ couples de racines communes. Mais parmi ces couples se trouvent $m+n$ racines de l'équation $F(x,x)=0$, ainsi que les valeurs $0,\infty$, dont chacune représente $m.n$ couples de racines; de sorte qu'il ne reste que

$$(m+n)^2-m-n-2mn=m(m-1)+n(n-1)$$

couples de racines différents. Chacun de ces couples de racines figure deux fois, savoir, dans la combinaison xy et dans la combinaison yx. On voit donc que deux systèmes m-n-formes conlocaux renferment

$$\frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}$$

couples d'éléments involutoires.

9. Si deux systèmes m-n-formes sont conlocaux, on peut rechercher quel est le nombre des couples d'éléments correspondants qui divisent harmoniquement un couple donné a,b d'éléments du système. Si l'on fait en sorte (ce qui n'altère pas la généralité) que, aux éléments donnés a,b, correspondent les valeurs $0,\infty$, des paramètres, deux éléments x,y seront harmoniques lorsqu'on aura $y=-x$. Si donc on pose, dans $F(x,y)=0$, $y=-x$, il en résulte une équation du $(m+n)^{\text{ième}}$ degré, d'où l'on tire $m+n$ valeurs pour x et autant pour $y=-x$. Il existe donc $m+n$ couples harmoniques. Comme les éléments qui divisent harmoniquement a,b forment une involution quadratique, on peut dire aussi que *deux systèmes m-n-formes conlocaux ont avec une involution quadratique conlocale $m+n$ couples d'éléments communs.*

10. Une considération très féconde est celle des systèmes de points et de tangentes dans les sections coniques. Nous

pourrons nous borner à l'étude des systèmes de points, celle des systèmes de tangentes s'en déduisant en vertu des lois de réciprocité; et *vice versa*. Si l'on a sur une conique C_2 deux systèmes de points m-n-formes, et que l'on joigne chaque point x avec le point y correspondant, on obtiendra une série de droites enveloppant la *courbe directrice* D des deux systèmes. Comme tout point de C_2 peut être regardé comme faisant partie aussi bien de l'un des deux systèmes que de l'autre, il passera par ce point $m+n$ tangentes de D; c'est-à-dire que la courbe directrice est de la $(m+n)^{\text{ième}}$ classe. On arrive au même résultat en cherchant quel est le nombre des tangentes de D qui passent par un point quelconque o.

Les rayons passant par o déterminent sur C_2 une involution ponctuelle quadratique, qui possède avec les deux systèmes $m+n$ couples communs [9], chacun de ces couples donnant une tangente de D qui passe par o. Chacun des couples involutoires donne une tangente double de D. On voit donc que la courbe directrice possède $\frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}$ tangentes doubles.

11. Parmi les $m+n$ tangentes à la courbe directrice qui passent par un point de C_2, il y en a deux qui coïncident, lorsque le point est un point de ramification de l'un des deux systèmes. Dans ce cas, ce point de ramification est un point de la courbe directrice. On reconnaît ainsi que la courbe directrice D coupe la conique C en

$$2m(n-1)+2n(m-1)=4mn-2(m+n)$$

points de ramification [6] des deux systèmes.

12. Chacun des $m+n$ éléments communs [5] représente deux éléments correspondants qui coïncident; de là résulte que D touche la conique aux points communs. D étant de $(m+n)^{\text{ième}}$ classe, il s'ensuit que D et C_2, en dehors des tangentes aux $m+n$ points de contact communs, n'ont *aucune autre* tangente commune.

13. Chacun des $m+n$ points communs des deux systèmes

compte donc, en qualité de point de contact, pour deux points d'intersection. Les courbes D, C_2 ont ainsi

$$4mn - 2(m+n) + 2(m+n) = 4mn$$

points d'intersection communs, et comme C_2 est du second ordre, il faut que D soit du $(2mn)^{\text{ième}}$ ordre. La courbe directrice est donc de l'ordre $2mn$.

A cause de

$$(m+n)(m+n-1) - 2\left[\frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\right] = 2mn,$$

D ne possède, en général, outre les tangentes doubles que nous avons indiquées, aucune autre tangente multiple ni aucune tangente d'inflexion.

14. De la classe $m+n$, de l'ordre $2mn$, et du nombre des tangentes doubles $\frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$, on peut déduire, d'après les formules de Plücker, les autres singularités de D. On trouve ainsi :

Nombre des tangentes d'inflexion $= 0$;
Nombre des points doubles $= 2mn(mn-5) + 4(m+n)$;
Nombre des points de rebroussement $= 6mn - 3(m+n)$;
Genre $= (m-1)(n-1)$.

15. Si, outre les deux systèmes m-n-formes, il se trouve encore sur C_2 deux systèmes m'-n'-formes, ceux-ci donneront une courbe directrice D', de $(m'+n')^{\text{ième}}$ classe, qui aura, avec D, $(m+n)(m'+n')$ tangentes communes. On conclut de là que deux couples de systèmes d'éléments conlocaux m-n-formes et m'-n'-formes ont $(m+n)(m'+n')$ couples d'éléments communs.

Si l'un de ces couples d'éléments communs est involutoire pour l'un des couples de systèmes, ce couple d'éléments comptera pour deux couples communs; et si un couple d'éléments est involutoire pour les deux couples de systèmes, il comptera de même pour quatre couples simples d'éléments communs.

II

Systèmes symétriques d'éléments.

16. Quand l'équation $F(x,y)=0$ est symétrique, les deux systèmes, s'ils sont conlocaux, et que x,y aient la même signification, ne pourront plus être distingués l'un de l'autre. Il est indifférent, dans ce cas, de rapporter x soit à un système, soit à l'autre; car, à cause de la symétrie de $F(x,y)=0$, ce seront les mêmes éléments y qui lui correspondront dans les deux cas, et *vice versa*. Il est clair que l'on devra avoir $m=n$.

Nous dirons dans ce cas que les deux systèmes n-n-formes constituent un ***système symétrique d'éléments*** du $n^{\text{ième}}$ degré.

Un système d'éléments est donc un système symétrique du $n^{\text{ième}}$ degré, lorsqu'à chaque élément du système correspondent suivant une loi quelconque n éléments du même système.

17. Si l'on ordonne l'équation de deux systèmes n-n-formes suivant les puissances de y, cette équation prend la forme

$$(A_0x^n+B_0x^{n-1}+\ldots+L_0)\,y^n+(A_1x^n+B_1x^{n-1}+\ldots)\,y^{n-1}+\ldots=0.$$

Pour que cette équation soit symétrique, il faut que l'on ait

$$\begin{array}{lll} B_0=A_1, & & \\ C_0=A_2, & C_1=B_2, & \\ D_0=A_3. & D_1=B_3. & D_2=C_3, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ L_0=A_n, & L_1=B_n, & L_2=C_n,\ldots. \end{array}$$

Les coefficients différents entre eux sont donc

$$\begin{array}{llr} A_0, & A_1, & A_2,\ldots,A_n, \\ & B_1, & B_2,\ldots,B_n, \\ & & C_2,\ldots,C_n, \\ & & \ldots\ldots \\ & & L_n, \end{array}$$

Leur nombre est évidemment

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

et comme on peut faire disparaître de l'équation un de ces coefficients par division, l'équation ne contient que

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\frac{n(n+3)}{2}$$

constantes indépendantes. De là résulte qu'un système symétrique d'éléments du $n^{ième}$ ordre est déterminé par $\frac{n(n+3)}{2}$ couples d'éléments.

Deux systèmes symétriques d'éléments sont donc identiques, quand ils ont $\frac{n(n+3)}{2}$ couples indépendants d'éléments communs.

18. Un système symétrique d'éléments du $n^{ième}$ degré devant être considéré seulement comme un cas particulier de deux systèmes conlocaux n-n-formes, les théorèmes démontrés sur les éléments communs et sur les éléments doubles auront encore lieu ici.

Les éléments communs deviendront ici des éléments correspondants à eux-mêmes, c'est-à-dire des éléments dont chacun est son propre correspondant. Leur nombre est $n+n=2n$, et nous leur donnerons aussi le nom d'*éléments doubles de première espèce.*

19. Outre les éléments doubles de première espèce, il y a encore les éléments doubles proprement dits [6], c'est-à-dire ceux qui résultent de la coïncidence de deux éléments correspondants à un seul et même élément. Leur nombre est [6] égal à $2n(n-1)$, et nous les appellerons *éléments doubles de seconde espèce.* A chaque élément double de seconde espèce correspond un élément de ramification, de sorte que, dans un système symétrique d'éléments du $n^{ième}$ ordre, il existe $2n(n-1)$ éléments de ramification, autant d'éléments doubles

de seconde espèce, et $2n$ éléments doubles de première espèce.

20. Lorsqu'une involution quadratique est conlocale avec un système symétrique d'éléments du $n^{\text{ième}}$ ordre, on peut encore chercher quel est le nombre des couples d'éléments qui sont communs au système et à l'involution. Si dans l'équation symétrique $F(x,y)=0$ on pose, comme dans l'article 9, $y=-x$, on obtient une équation du degré $2n$, dans laquelle il n'entre que des puissances paires de x, puisque $F(x,y)$ est symétrique et qu'on a fait $y=-x$. On a donc une équation en x^2 du $n^{\text{ième}}$ degré, qui donne, pour x^2, n valeurs, et, pour x, n couples de valeurs égales et de signe contraire (savoir $+\sqrt{x^2}$ et $-\sqrt{x^2}$). A cause de $y=-x$, aux valeurs $+\sqrt{x^2}$, $-\sqrt{x^2}$ de x correspondront les valeurs respectives $-\sqrt{x^2}$, $+\sqrt{x^2}$ de y. On a donc en tout n couples d'éléments de l'involution quadratique, qui appartiennent aussi au système symétrique d'éléments du $n^{\text{ième}}$ degré.

21. A l'aide de ce dernier résultat, il est aisé de déterminer la nature de la courbe directrice d'un système symétrique de points du $n^{\text{ième}}$ degré, situé sur une section conique. En joignant chaque point x de la conique avec les n points y qui lui correspondent, on obtient n tangentes, passant par x, de la courbe directrice D. Comme il ne peut y avoir d'autres tangentes que celles-là qui passent par x, on serait déjà en droit d'en conclure que la courbe D est de la $n^{\text{ième}}$ classe. On peut encore s'en convaincre en déterminant le nombre des tangentes qui passent par un point arbitraire p. Les rayons qui passent par p coupent la section conique en des couples de points d'une involution quadratique qui, d'après l'article précédent, a n couples d'éléments communs avec le système symétrique; chacun de ces couples fournit ainsi une des tangentes à la courbe directrice qui passent par le point p; cette courbe est donc bien de la $n^{\text{ième}}$ classe. Ainsi :

La courbe directrice d'un système symétrique de points du $n^{\text{ième}}$ degré, situé sur une conique, est une courbe de la $n^{\text{ième}}$ classe.

Chaque tangente à cette courbe coupe la conique en deux points mutuellement correspondants.

Chacune des $2n$ tangentes communes à la courbe directrice et à la conique touche donc cette dernière en un des $2n$ points doubles de première espèce.

Si v est un point d'intersection de la conique C_2 avec la courbe directrice D, deux des n tangentes menées par v à la courbe directrice coïncident naturellement avec la tangente T à D au point v. Le point v est donc un point de ramification, et le second point d'intersection de C_2 avec T est le point double de seconde espèce correspondant à v.

Comme il y a $2n(n-1)$ points de ramification, la courbe directrice sera du $n(n-1)^{\text{ième}}$ ordre; elle n'aura donc, en général, aucune tangente double, ni aucune tangente d'inflexion.

Que D est une courbe tout à fait générale de $n^{\text{ième}}$ classe, cela résulte de ce qu'on peut choisir $\frac{n(n+3)}{2}$ tangentes arbitraires à cette courbe; car, d'après l'article 17, on peut choisir $\frac{n(n+3)}{2}$ couples d'éléments d'un système symétrique du $n^{\text{ième}}$ degré. On a donc ce théorème :

La courbe directrice* D *est une courbe générale de la* $n^{\text{ième}}$ *classe et du* $n(n-1)^{\text{ième}}$ *ordre, qui touche les* $2n$ *tangentes de la conique, que l'on peut mener à celle-ci aux* $2n$ *points doubles de première espèce; elle passe par les* $2n(n-1)$ *points de ramification, et touche en ces points les droites qui joignent chacun de ces points avec le point double de seconde espèce qui lui correspond.

Et réciproquement :

Les couples de points que les tangentes à une courbe quelconque* D *de* $n^{\text{ième}}$ *classe déterminent sur une conique* C_2, *forment un système de points symétrique du* $n^{\text{ième}}$ *degré.

Si D présente des singularités (tangentes doubles ou multiples, tangentes d'inflexion, etc.), le système de points symétrique correspondant présentera aussi des singularités.

22. Des théorèmes connus sur les courbes résultent immédiatement les suivants :

Si deux systèmes symétriques d'éléments se trouvent sur un même lieu (s'ils sont conlocaux), l'un étant du $n^{\text{ième}}$ ordre, l'autre du $n'^{\text{ième}}$, ils auront $n.n'$ couples d'éléments communs.

— *Les n^2 couples d'éléments communs à deux systèmes symétriques conlocaux du $n^{\text{ième}}$ degré sont communs à une infinité d'autres systèmes du même degré.*

— *Tous les systèmes symétriques d'éléments du $n^{\text{ième}}$ degré qui ont $\frac{n(n+3)}{2}-1$ couples d'éléments communs, ont en outre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ autres couples d'éléments communs.*

— *Parmi les couples d'éléments qui déterminent un système symétrique du $n^{\text{ième}}$ degré, il y en a au plus $np-\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ qui puissent appartenir à un système du $p^{\text{ième}}$ degré ($p<n$).*

Si la limite indiquée était dépassée, le système du $n^{\text{ième}}$ degré se décomposerait en deux systèmes conlocaux, l'un du $(n-p)^{\text{ième}}$ degré, l'autre du $p^{\text{ième}}$.

Le lecteur ne pourra manquer de reconnaître qu'à chaque proposition empruntée à la théorie des courbes planes correspond une proposition analogue sur les systèmes symétriques d'éléments; et réciproquement, il est clair que, en partant des systèmes symétriques d'éléments, on pourrait arriver à la théorie des courbes planes.

23. Une involution ne doit évidemment être considérée que comme un cas particulier d'un système symétrique d'éléments. Car une involution admettant une commutativité complète des éléments d'un même groupe, il faut que l'équation qui a lieu entre les paramètres x, y de deux éléments correspondants, c'est-à-dire appartenant au même groupe, soit symétrique par rapport à x et à y. Chaque groupe d'une involution du $m^{\text{ième}}$ degré contient m éléments qui se correspondent mutuellement; donc à chaque élément correspondent $m-1$ éléments, c'est-à-dire que :

Une involution du $m^{\text{ième}}$ degré représente un système symétrique (spécial) d'éléments, du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré.

Les $2(m-1)$ *éléments doubles de l'involution* représentent évidemment les éléments doubles de première espèce. Chaque groupe renfermant un de ces éléments doubles contient en outre $m-2$ autres éléments, qui correspondent tous à l'élément double. C'est donc dans ces $2(m-1)$ *groupes de ramification* que nous devons chercher les $2(m-1)(m-2)$ *éléments de ramification de l'involution;* d'où il s'ensuit que chacun des $2(m-1)$ éléments doubles de première espèce joue aussi le rôle de $m-2$ éléments doubles de seconde espèce.

24. De ce qui précède, il s'ensuit maintenant immédiatement que les lignes de jonction des points correspondants d'une involution de points du $m^{\text{ième}}$ degré, située sur une conique C_2, enveloppent une courbe de la $(m-1)^{\text{ième}}$ classe et du $(m-1)(m-2)^{\text{ième}}$ ordre, sans tangentes doubles ni tangentes d'inflexion, et que nous appellerons la *courbe d'involution* I. Cette courbe I touche celles des tangentes de C_2 que l'on peut mener à C_2 aux $2(m-1)$ points doubles de l'involution; et, de plus, I coupe la conique C_2 aux $2(m-1)(m-2)$ points de ramification qui appartiennent aux $2(m-1)$ groupes de ramification comme éléments simples. On reconnaît de même que I est touchée, en tous les points simples d'un groupe de ramification, par des droites passant par le point double qui appartient au groupe de ramification.

On voit déjà par là que les courbes I (courbes d'involution) déterminées par des involutions ne sont pas des courbes générales, bien qu'elles ne possèdent ni tangentes doubles, ni tangentes d'inflexion.

25. Si, sur la conique C_2, outre l'involution du $m^{\text{ième}}$ degré, il existe encore un système symétrique d'éléments du $n^{\text{ième}}$ degré, on peut se demander quels sont les couples d'éléments communs à ce système et à l'involution. Comme la courbe directrice D du système est de la $n^{\text{ième}}$ classe, et la courbe d'involution de la $(m-1)^{\text{ième}}$ classe, ces deux courbes ont $n(m-1)$ tangentes communes; c'est-à-dire que :

Un système symétrique d'éléments du $n^{\text{ième}}$ degré a, avec une

involution conlocale du $m^{\text{ième}}$ degré, $n(m-1)$ couples d'éléments communs.

26. Par les mêmes considérations on obtient les résultats suivants :

Si sur un même lieu (Träger) se trouvent à la fois deux systèmes m-n-formes d'éléments et un système symétrique d'éléments du $p^{\text{ième}}$ degré, il y aura $(m+n)p$ couples d'éléments du dernier système qui appartiendront aussi aux deux systèmes multiformes comme couples d'éléments correspondants.

— *Si sur un même lieu se trouvent à la fois deux systèmes m-n-formes d'éléments et une involution du $q^{\text{ième}}$ degré, il y aura $(m+n)(q-1)$ couples d'éléments communs aux systèmes et à l'involution.*

— *Si sur un même lieu se trouvent à la fois une involution du $q^{\text{ième}}$ degré et un système symétrique d'éléments du $p^{\text{ième}}$ degré, il y aura $(q-1)p$ couples d'éléments communs à l'involution et au système.*

— *Deux involutions conlocales des ordres respectifs q, q_1 ont $(q-1)(q_1-1)$ couples d'éléments communs.*

Pour $q_1=q$, le nombre des couples d'éléments communs sera $=(q-1)^2$.

27. Si, sur un même lieu, outre une involution du $p^{\text{ième}}$ degré, il se trouve encore une involution du $q^{\text{ième}}$ degré, et qu'à chaque groupe d'une de ces involutions corresponde, suivant une loi (linéaire) quelconque, *un seul* groupe de l'autre involution, nous appellerons ces involutions des *involutions projectives.* Deux éléments appartenant à des groupes correspondants entre eux peuvent être dits des éléments correspondants, et il est clair alors que les deux involutions ne sont qu'un cas particulier de deux systèmes p-q-formes. Ces deux systèmes ont donc $p+q$ éléments communs, que l'on nomme les *éléments communs* des involutions projectives.

Évidemment, on peut parler aussi de deux involutions m-n-formes et de leurs éléments communs; quel est le nombre de ces éléments?

28. Si, sur la conique C_2 il se trouve une involution du $m^{\text{ième}}$ degré, chaque groupe contiendra m points qui donneront $\frac{m(m-1)}{2}$ lignes de jonction. Ces lignes sont les côtés d'un polygone complet de m sommets, déterminé par le groupe de points. Comme nous l'avons démontré, ces lignes de jonction touchent la courbe d'involution I, laquelle est de $(m-1)^{\text{ième}}$ classe. Deux groupes d'une involution pouvant être choisis arbitrairement, et déterminant dès lors tous les autres groupes, on aura ce théorème :

Les $m(m-1)$ côtés de deux polygones complets de m sommets inscrits à une conique sont tangents à une courbe de $(m-1)^{\text{ième}}$ classe, à laquelle sont circonscrits une infinité de polygones complets de m sommets, inscrits en même temps à la conique C_2.

Une courbe de $(m-1)^{\text{ième}}$ classe est déterminée par $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$ tangentes; les deux polygones de m sommets fournissent donc

$$m(m-1)-\frac{(m-1)(m+2)}{2}=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

tangentes de plus qu'il n'est nécessaire pour la détermination de la courbe.

29. Si un polygone de m sommets est inscrit à la conique C_2, et que I soit une courbe de $(m-1)^{\text{ième}}$ classe, tangente à tous les $\frac{m(m-1)}{2}$ côtés du polygone complet de m sommets, il est facile de démontrer que I est une courbe d'involution. Imaginons que d'un point quelconque X_1 de la conique C_2 on mène à I les $m-1$ tangentes, qui coupent C_2 aux points $X_2, X_3, \ldots, X_m$, et considérons les m sommets du polygone et les m points $X_1, X_2, \ldots, X_m$ comme deux groupes d'une involution du $m^{\text{ième}}$ degré. La courbe d'involution correspondante aura évidemment, avec I,

$$\frac{m(m-1)}{2}+(m-1)=\frac{(m-1)(m+2)}{2}$$

tangentes communes, c'est-à-dire précisément autant qu'il en faut pour la détermination d'une courbe de $(m-1)^{\text{ième}}$ classe. Les deux courbes doivent donc être identiques, si les $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$ tangentes n'appartiennent pas à un système de $(m-1)^2$ tangentes communes à deux courbes de $(m-1)^{\text{ième}}$ classe. Or c'est, en effet, ce qui n'a pas lieu; car, puisque $m-1$ de ces tangentes passent par le point X_1, il faudrait que les $\frac{m(m-1)}{2}$ restantes, dont il y aura $m-1$ autres qui passent par un même point, appartinssent à une courbe de $(m-2)^{\text{ième}}$ classe, laquelle devrait, par suite, être représentée par les m sommets du polygone, ce qui est impossible. Il est donc démontré par là que :

Si à un polygone complet de m sommets, inscrit dans une conique C_2, on inscrit une courbe quelconque I de $(m-1)^{\text{ième}}$ classe, il y a une infinité de polygones complets de m sommets qui sont inscrits à C_2 et circonscrits à I. Les groupes des sommets de ces polygones forment une involution du $m^{\text{ième}}$ degré.

30. Un groupe complet de points d'une involution du $m^{\text{ième}}$ degré située sur C_2 fournit $\frac{m(m-1)}{2}$ tangentes de la courbe d'involution I, laquelle est de $(m-1)^{\text{ième}}$ classe, et pour la détermination de laquelle on a besoin en tout de $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$ tangentes. On peut donc, outre ces $\frac{m(m-1)}{2}$ tangentes, en choisir encore arbitrairement $m-1$ autres, dont chacune est déterminée par un couple de points de l'involution, choisi à volonté sur C_2. On a ainsi ce théorème :

Une involution du $m^{\text{ième}}$ degré est complètement déterminée par un groupe complet et par $m-1$ autres couples d'éléments pris arbitrairement.

31. De ce théorème il résulte immédiatement que la courbe directrice d'un système symétrique d'éléments du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré, en tant qu'inscrite à un polygone complet de m sommets, sera une courbe d'involution, s'il existe dans le système symé-

trique un groupe de m éléments, dont les éléments soient tous mutuellement correspondants (commutatifs). Dans ce cas, le système d'éléments du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré est aussi une involution du $m^{\text{ième}}$ degré.

Si, dans un système symétrique d'éléments du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré, il existe un groupe de m éléments tels que chacun d'eux ait tous les autres pour éléments correspondants, le système sera une involution du $m^{\text{ième}}$ degré; c'est-à-dire qu'il y a une infinité de groupe tels que, etc.

Ainsi se trouve démontré de nouveau que les involutions du $m^{\text{ième}}$ degré ne doivent être considérées que comme des cas particuliers des systèmes symétriques d'éléments du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré, et qu'un tel système se change en une involution, lorsqu'un groupe de m éléments est complètement commutatif.

32. Imaginons qu'on ait un polygone fixe de m sommets inscrit à la conique C_2, et que parmi les sommets d'un autre polygone inscrit de m sommets, déterminant avec le premier une involution du $m^{\text{ième}}$ degré, $m-1$ soient fixes, le $m^{\text{ième}}$ étant mobile; il y aura une infinité de courbes d'involution I, correspondantes aux diverses positions du sommet mobile. Toutes ces courbes de $(m-1)^{\text{ième}}$ classe ont pour tangentes les $\frac{m(m-1)}{2}$ côtés du polygone fixe de m sommets et les $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ côtés fixes du second polygone de m sommets, c'est-à-dire qu'elles auront en tout $(m-1)^2$ tangentes communes. Ces courbes forment donc une série de courbes (figure réciproque du faisceau de courbes). Les sommets fixes du second polygone de m sommets représentant un polygone de $m-1$ sommets, nous avons ce théorème :

Les côtés d'un polygone complet de m sommets et d'un polygone complet de $m-1$ sommets, inscrits tous les deux à une même conique, représentent un système de $(m-1)^2$ tangentes communes à deux (et à une infinité de) courbes de $(m-1)^{\text{ième}}$ classe.

33. Les systèmes symétriques d'éléments se présentent aussi, entre autres, dans les figures élémentaires (systèmes

élémentaires) multiformes. Si G_m, G_n sont deux figures élémentaires m-n-formes, c'est-à-dire si à chaque élément x de G_m correspondent n éléments y de G_n, les couples d'éléments de G_n qui correspondent à un même élément de G_m formeront évidemment un système symétrique d'éléments du degré $m(n-1)$. Car, si l'on choisit dans G_n un y quelconque, il aura pour correspondants m éléments x de G_m, et à chacun de ces éléments x correspondront, outre y, $n-1$ autres éléments y' de G_n. Il y a donc en tout $m(n-1)$ éléments y' de G_n qui forment, avec un élément quelconque y, des couples d'éléments correspondants à certains éléments de G_m.

Si deux figures sont en relation m-n-forme, la figure n-forme, prise en elle-même, représentera un système symétrique d'éléments du $m(n-1)^{ième}$ degré; et la figure m-forme un système symétrique d'éléments du $n(m-1)^{ième}$ degré.

Dans ces systèmes symétriques, il y a, en effet, des éléments qui se présentent deux à deux comme mutuellement correspondants, de manière à correspondre à un même élément de la seconde figure.

Le système symétrique d'éléments du $n(m-1)^{ième}$ degré qui se présente dans G_m a $2n(m-1)$ éléments doubles de première espèce, qui sont évidemment les éléments doubles de la figure m-forme G_m; pareillement, les $2m(n-1)$ éléments doubles de première espèce du système symétrique G_n sont les éléments doubles de la figure n-forme G_n. Nous retrouvons ainsi les résultats de l'article 6.

Quelle est maintenant la signification des éléments doubles de seconde espèce qui se présentent dans les systèmes symétriques d'éléments considérés?

34. Si l'on a un système symétrique d'éléments du $n^{ième}$ degré, et que y, y' soient deux des n éléments correspondants à l'élément x, on pourra aussi considérer y, y' comme des éléments correspondants entre eux, et de plus il est clair que le couple (y, y') appartient lui-même à un système symétrique d'éléments, dont le degré se déterminera très facilement

comme il suit. A y correspondent n éléments x; à chacun de ces x correspondent, outre y, $n-1$ autres éléments y', de sorte que à chaque y correspondent $n(n-1)$ éléments y'. Le couple d'éléments (y, y') forme donc un nouveau système symétrique d'éléments du $n(n-1)^{\text{ième}}$ degré, que nous nommerons le ***système symétrique dérivé.*** Si un y coïncide avec un y', y sera évidemment un élément double de seconde espèce pour le système primitif du $n^{\text{ième}}$ degré; cela s'accorde complètement aussi quant aux nombres; car le ***système dérivé*** a $2n(n-1)$ éléments doubles de première espèce, lesquels sont en même temps les éléments doubles de seconde espèce pour le système primitif d'éléments du $n^{\text{ième}}$ degré.

Si deux éléments y, y', qui correspondent à un même élément x dans un système symétrique du $n^{\text{ième}}$ degré, sont considérés comme deux éléments mutuellement corrrespondants, on obtiendra un système symétrique d'éléments du $n(n-1)^{\text{ième}}$ degré (le système dérivé), qui a pour éléments doubles de première espèce les éléments doubles de seconde espèce du système primitif.

Du système symétrique dérivé du $n(n-1)^{\text{ième}}$ degré on peut de rechef déduire un nouveau système dérivé, qui sera du degré $n(n-1)[n(n-1)-1]$, et que nous appellerons, par analogie, ***deuxième système dérivé;*** et ainsi de suite.

35. Pour étudier de plus près les systèmes dérivés, imaginons que ce soient des systèmes de points sur une conique fixe C_2. Soient S_n le système symétrique primitif de points du $n^{\text{ième}}$ degré sur C_2, et $S_{n(n-1)}$ le système symétrique dérivé de points du $n(n-1)^{\text{ième}}$ degré. Deux points correspondants quelconques y, y' de $S_{n(n-1)}$ correspondent à un même point x de S_n. Tandis que les droites $xy, xy', \ldots$ enveloppent la courbe directrice D^n du système S_n, les droites yy' enveloppent la courbe directrice $D^{n(n-1)}$ du système $S_{n(n-1)}$; la courbe D^n est, comme on sait, de $n^{\text{ième}}$ classe, et $D^{n(n-1)}$ de $n(n-1)^{\text{ième}}$ classe. Nous avons donc ce théorème : ***Si, des trois côtés d'un triangle inscrit à une conique fixe, deux roulent sur une courbe fixe de $n^{\text{ième}}$ classe, le troisième côté enveloppera une courbe de $n(n-1)^{\text{ième}}$ classe.***

Si v est un des $2n(n-1)$ points d'intersection de C_2 avec D^n, et d le second point d'intersection de C_2 avec la tangente de D^n au point v, v sera un point de ramification de S_n, et d un point double de seconde espèce; en même temps aussi, d est un point double de première espèce du système symétrique $S_{n(n-1)}$. Les tangentes de C_2 aux $2n(n-1)$ points d sont donc en même temps des tangentes de $D^{n(n-1)}$.

D'où proviennent maintenant les éléments doubles de seconde espèce de $S^{n(n-1)}$? Ils peuvent se former de deux manières :

(*a*). Par chaque point v passent, outre la tangente vd, qui touche D^n en v, $n-2$ autres tangentes a D^n. Soit w le second point d'intersection de C_2 avec une de ces tangentes. Si l'on détermine maintenant les points du système $S^{n(n-1)}$ correspondants à w, on trouve facilement que deux de ces points coïncident en w. En effet, étant donné un point quelconque y, pour trouver les points y' qui lui correspondent dans $S^{n(n-1)}$, il faut mener par y les n tangentes à D^n qui coupent C_2 en n points x. Par chacun de ces points x passent, outre xy, $n-1$ autres tangentes à D_n, qui coupent C_2 aux points y' cherchés.

Chaque point v fournit ainsi $n-2$ points de ramification w de $S^{n(n-1)}$, auxquels en même temps correspond d, comme élément double[$(n-2)$-ple]. Nous avons ainsi en tout $2n(n-1)(n-2)$ de ces éléments de ramification w, qui se distribuent en $2n(n-1)$ groupes de $n-2$ éléments. Chaque groupe a l'un des $2n(n-1)$ éléments doubles de première espèce pour élément double commun [et par suite pour élément $(n-2)$-ple].

(*b*). Par chacun des points d passent, outre dv, $n-1$ autres tangentes à D^n. Soit δ le second point d'intersection d'une de ces tangentes avec la conique C_2. Si l'on construit encore ici les points correspondants au point w dans le système $S^{n(n-1)}$, on trouve que deux d'entre eux coïncident en δ, puisque deux des tangentes menées de v à D^n coïncident avec vd. Les $n-1$ points δ sont donc des points doubles de seconde espèce, et ont v pour élément commun de ramification [$(n-1)$-ple]. Ces points doubles sont donc en tout au nombre de

$2n(n-1)(n-1) = 2n(n-1)^2$. Les $n-1$ droites $v\delta$ étant tangentes à $D^{n(n-1)}$ en v, il s'ensuit de là que chacun des points v est un point $(n-1)$-ple de la courbe directrice $D^{n(n-1)}$. Cette courbe a donc, sur C_2, $2n(n-1)$ points v, dont chacun est un point $(n-1)$-ple.

(c). Enfin, tout quadrilatère simple, inscrit à la conique C_2 et circonscrit à la courbe directrice D^n, fournit quatre points doubles et de ramification. Soit, en effet, $abcd$ un tel quadrilatère, et par suite ab, bc, cd, da des tangentes à D^n; car c, par exemple, représente évidemment deux points coïncidants, qui correspondent dans le système $S^{n(n-1)}$ à l'élément a; pareillement; chacun des trois autres points a, b, d est un point double de seconde espèce de $S^{n(n-1)}$, auquel correspond comme point de ramification le sommet opposé du quadrilatère. Les quatre sommets d'un tel quadrilatère sont donc à la fois des points doubles de seconde espèce et des points de ramification de $S^{n(n-1)}$, et à chacun d'eux, considéré comme point double, correspond, comme point de ramification, le sommet opposé. Or, il résulte de là que les diagonales ac, bd du quadrilatère sont des tangentes doubles de $D^{n(n-1)}$; car, parmi les tangentes menées par a à la courbe $D^{n(n-1)}$, deux coïncident avec ac, et il en est de même des tangentes menées par c. Donc a et c ne peuvent être, en général, des points de $D^{n(n-1)}$; mais ac (de même que bd) doit être une tangente double de $D^{n(n-1)}$.

Le nombre des tangentes doubles peut maintenant se déterminer très facilement; car nous savons maintenant où il faut chercher toutes les intersections de $D^{n(n-1)}$ avec C_2. Nous avons d'abord les $2n(n-1)(n-2)$ points de ramification w; puis les $2n(n-1)$ points v, dont chacun est un point $(n-1)$-ple. En dehors de ces points, il n'y a plus aucun point commun aux courbes $D^{n(n-1)}$ et C_2. Donc C_2 a en tout avec $D^{n(n-1)}$

$$2n(n-1)(n-2) + 2n(n-1)(n-1) = 2n(n-1)(2n-3)$$

intersections, et par suite *la courbe directrice $D^{n(n-1)}$ du système de points symétrique dérivé est du $n(n-1)(2n-3)^{\text{ième}}$ ordre.*

La réduction de l'ordre, qui en général devrait être égal à $n(n-1)[n(n-1)-1]$, puisque $D^{n(n-1)}$ est de $n(n-1)^{\text{ième}}$ classe, est produite par les tangentes doubles dont nous venons de reconnaître l'existence. Si donc Δ est le nombre des tangentes doubles (il n'y aura pas généralement de tangentes d'inflexion), on aura, en vertu de formules connues de Plücker, l'équation

$$\Delta = n(n-1)[n(n-1)-1] - n(n-1)(2n-3),$$

d'où l'on tire

$$\Delta = n(n-1)^2(n-2).$$

La courbe directrice $D^{n(n-1)}$ du système de points symétrique dérivé a ainsi $n(n-1)^2(n-2)$ tangentes doubles.

On serait arrivé au même résultat en cherchant le nombre des points de ramification qui nous manquaient encore dans (*a*) et dans (*b*). Car $S^{n(n-1)}$ doit avoir en tout

$$2n(n-1)[n(n-1)-1]$$

points de ramification; si nous en déduisons les

$$2n(n-1)(n-2) + 2n(n-1)(n-1) = 2n(n-1)(2n-3)$$

points de ramification énumérés dans (*a*) et dans (*b*), il restera encore $2n(n-1)^2(n-2)$ points de ramification qui, pris par couples, fourniront les tangentes doubles de $D^{n(n-1)}$, ce qui s'accorde avec le résultat précédent.

Le lecteur reconnaîtra sans doute facilement qu'un point double de seconde espèce ne peut provenir d'une autre origine que de celles qui ont été énumérées dans (*a*), (*b*) et (*c*). Comme deux quelconques des Δ tangentes doubles appartiennent comme diagonales à un des quadrilatères dont il a été question, il y a en tout $\frac{n(n-1)^2(n-2)}{2}$ de ces quadrilatères. Ainsi :

Il existe $\frac{n(n-1)^2(n-2)}{2}$ quadrilatères simples, inscrits à une

conique fixe C_2 *et circonscrits à une courbe générale de* $n^{ième}$ *classe* D^n, *également fixe.*

Sans entrer plus avant dans ces recherches générales, nous remarquerons seulement, pour terminer, que du nombre trouvé pour les tangentes doubles de $D^{n(n-1)}$ il résulterait que cette courbe se décompose en plusieurs autres. Que sont ces dernières?

36. Les systèmes d'éléments symétriques du second degré présentent un intérêt particulier. Puisque, pour $n=2$, on a aussi $n(n-1)=2$, on conclut de là que

Le système symétrique dérivé d'un système symétrique d'éléments du second degré est pareillement du second degré.

Il s'ensuit de là immédiatement qu'en général tous les systèmes dérivés d'un système symétrique du second degré sont aussi du second degré.

Le nombre des éléments w est, pour $n=2$, égal à zéro; de même pour le nombre des tangentes doubles provenant de $D^{n(n-1)}$, car on a ici $\Delta=0$. Il ne reste donc pour le système dérivé que quatre éléments de ramification v, qui sont aussi des éléments de ramification du système primitif.

De là résultent ensuite immédiatement les théorèmes connus de Poncelet, sur les polygones qui sont à la fois inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique.

III

Les théorèmes de Poncelet sur les polygones à la fois inscrits et circonscrits.

37. Soient C_2 et C'_2 deux coniques quelconques, situées dans un même plan. Par un point quelconque x_1 de C_2 menons à C'_2 une tangente qui coupe C_2 en x_2; par x_2 menons l'autre tangente x_2x_3 à C'_2, qui coupe C_2 en x_3, et ainsi de suite, jusqu'au point x_n. On obtient ainsi un polygone de n sommets

$x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n$, inscrits à la conique C_2, et dont les $n-1$ côtés $x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n$ touchent la conique C'_2. Comme à chaque point x_1 correspondent deux points x_n, x'_n (on peut, en effet, en partant de la seconde tangente $x_1x'_2$ à C'_2 menée par x_1, construire une autre série de tangentes, qui donne un second polygone de n sommets et un second point x'_n), x_1 et x_n, comme points mutuellement correspondants, forment un système de points symétriques du second degré sur C_2, et par suite la droite x_1x_n enveloppera une troisième conique D^2, qui est la conique directrice du système de points symétrique, conique qui passe par les quatre points d'intersection v_1, v_1^1, v_1^2, v_1^3 de C_2 et de C'_2. En effet, ces quatre points d'intersection sont les points de ramification du système symétrique de points. Si l'on veut, par exemple, trouver les points correspondants à v_1, il faudra, en partant des deux tangentes qui se croisent en ce point, mener les $n-1$ tangentes successives à C'_2; mais les tangentes menées par v_1 à C'_2 coïncident en une seule, que nous désignerons par v_1v_2; les autres tangentes des deux séries coïncideront aussi deux à deux, c'est-à-dire que l'on devra mener à C'_2 par v_2 la tangente v_2v_3, puis par v_3 la tangente v_3v_4, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive enfin au point v_n, lequel représentera aussi en même temps v'_n. Le point v_n est donc le point double correspondant au point de ramification v_1, et la conique directrice D^2 aura en même temps pour tangente la tangente de C_2 en v_n. On déduit de même de v_1^1, v_1^2, v_1^3 les trois autres points doubles v_n^1, v_n^2, v_n^3, et l'on obtient aussi par là les trois autres tangentes communes, aux coniques C_2 et D^2.

Les considérations réciproques étant également vraies, nous pourrons énoncer les théorèmes suivants :

I. *Si un polygone (simple) variable est inscrit à une conique fixe* C_2, *et que tous ses côtés, à l'exception d'un seul, touchent une seconde conique fixe* C'_2, *le dernier côté touchera également une conique fixe* D^2, *passant par les quatre points d'intersection de* C_2 *et de* C'_2.

II. *Si un polygone (simple) variable est circonscrit à une conique fixe* C_2, *et que tous ses sommets, à l'exception d'un seul, parcourent une seconde conique fixe* C'_2, *le dernier sommet décrira également une conique fixe* D_2, *qui touche les quatre tangentes communes aux coniques* C_2, C'_2.

Si l'on joint deux sommets quelconques du polygone $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$, par exemple, les sommets a_r et a_{r+k}, le polygone $a_r a_{r+1} a_{r+2} \ldots a_{r+k}$ aura évidemment les mêmes propriétés que le polygone primitif $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$; donc la diagonale $a_r a_{r+k}$ enveloppera ainsi une conique D^2_k, appartenant au faisceau $(C_2 C'_2)$, et qui se présentera aussi comme enveloppe des diagonales $a_1 a_{1+k}, a_2 a_{2+k}, a_3 a_{3+k}, \ldots$. Car ces diagonales ne sont qu'autant de positions particulières de la diagonale $a_r a_{r+k}$. Il faut seulement avoir soin que r ne soit pas égal à n; car alors la position exceptionnelle du côté $a_n a_1$ pourrait introduire la présence d'autres coniques. Sans nous occuper davantage des coniques qui se présentent ici, passons au cas où les deux coniques C_2, C'_2 sont dans une position respective telle que, pour un des polygones inscrits à la conique C_2, le côté $a_n a_1$ soit aussi tangent à C'_2.

38. Si dans le polygone $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ le dernier côté $a_n a_1$ est, lui aussi, tangent à C'_2, c'est-à-dire s'il existe un polygone de n côtés qui soit à la fois inscrit à C_2 et circonscrit à C'_2, la conique D^2 deviendra identique avec la conique C'_2. Car aux quatre tangentes communes aux courbes D^2, C'_2, dont nous avons plus haut reconnu l'existence (ainsi que la position), s'ajoute encore la cinquième tangente $a_n a_1$, qui entraîne immédiatement la coïncidence des coniques C'_2, D^2. Toutes les positions de $a_n a_1$ seront donc tangentes à C'_2, c'est-à-dire que tous les polygones $a_1 a_2 \ldots a_n$ seront à la fois inscrits à C_2 et circonscrits à C'_2. Nous avons ainsi ce théorème (dû à Poncelet) :

Si un polygone de n côtés est inscrit à une conique et en même temps circonscrit à une seconde conique, il y a une infinité d'autres polygones de n côtés qui sont à la fois inscrits à la première conique et circonscrits à la seconde.

De ce qui précède, il résulte aussi immédiatement que toutes les diagonales de ces polygones enveloppent aussi des coniques. De plus, toutes les diagonales *de même espèce*, c'est-à-dire joignant entre eux des sommets de numéros d'ordre équidistants, envelopperont toujours la même conique. Si n est un nombre pair, il y a, comme on sait, $\frac{n}{2}-1$ espèces de diagonales. Il y aura donc aussi $\frac{2}{n}-1$ coniques qui sont enveloppées par toutes les diagonales (selon leur espèce). Si parmi ces coniques on prend celle D_k^2 qui est enveloppée par les diagonales $a_r a_{r+k}$ ($r=1, 2, \ldots; k=$const.), alors, par un point quelconque a_r de C_2 passeront deux tangentes à D_k^2, savoir $a_r a_{r+k}$ et $a_r a_{r-k}$. Mais, si $k=\frac{n}{2}$, a_{r+k} et a_{r-k} ne feront qu'un seul et même point, savoir le sommet $a_{r\pm\frac{n}{2}}$ du polygone, diamétralement opposé au point a_r; donc alors $a_r a_{r+k}$ et $a_r a_{r-k}$ se confondront en une seule droite, qui sera la diagonale *principale* $a_r a_{r\pm\frac{n}{2}}$. La conique $D_{\frac{n}{2}}^2$ se réduira, d'après cela, à un point unique, puisque les tangentes menées d'un point quelconque a_r de C_2 à cette conique $D_{\frac{n}{2}}^2$ se confondent en une seule. Donc,

Si le nombre n des côtés des polygones inscrits à C_2 et circonscrits à C_2' est pair, les diagonales principales (qui joignent entre eux les sommets opposés) passeront par un point fixe, et les autres diagonales envelopperont $\frac{n}{2}-2$ coniques, qui toutes passeront par les points d'intersection de C_2 et de C_2'.

Si n est un nombre impair, les diagonales envelopperont un système de $\frac{n-3}{2}$ coniques, passant toutes par les intersections de C_2 et de C_2'. Car, pour n impair, il y a, comme on sait, $\frac{n-3}{2}$ groupes de diagonales de même espèce dans le polygone de n sommets.

Il est inutile de développer les démonstrations des propositions réciproques, qui sont vraies aussi :

Si un polygone simple de n côtés est circonscrit à une conique et en même temps inscrit à une autre conique, il existe une infinité de polygones de n côtés jouissant des mêmes propriétés.

Si n est un nombre pair, les côtés opposés du polygone se couperont sur une droite fixe. Les autres intersections mutuelles des côtés décriront $\frac{n}{2} - 2$ *coniques qui toucheront les tangentes communes aux deux coniques fondamentales. Si n est impair, ces intersections décriront un système de* $\frac{n-3}{2}$ *coniques, etc.*

39. Des théorèmes de l'article 37, il résulte immédiatement que :

Si un polygone de n sommets est inscrit à un cercle, et que tous les côtés, excepté un, soient tangents à un second cercle fixe, le dernier côté enveloppera aussi un cercle, et les diagonales se grouperont en systèmes enveloppant aussi des cercles.

C'est sous cette forme que Poncelet a établi la proposition fondamentale sur les polygones inscrits et circonscrits. De même, réciproquement :

Si un polygone (simple) de n côtés est circonscrit à une conique, et que tous ses sommets, excepté un, décrivent une seconde conique, confocale à la première, le dernier sommet décrira aussi une troisième conique confocale aux deux premières. Les intersections des autres côtés se grouperont pareillement en systèmes décrivant des coniques confocales.

COURS DE CHIMIE AGRICOLE

Leçon du 17 juillet 1874

SUR LE PHYLLOXERA

PAR A. BAUDRIMONT

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Messieurs,

Vous savez tous que la vigne est atteinte d'une maladie grave et que, dans bien des lieux, elle a succombé. Il en est résulté des pertes considérables pour les viticulteurs, et, on peut le dire, pour la France entière.

Dans un pays tel que celui que nous habitons, où la vigne est cultivée sur une vaste échelle et donne des produits généralement doués d'une supériorité incontestable, il importe de faire les plus grands efforts pour arrêter ce fléau, qui en détruirait la principale source de richesse.

Le phylloxera et la maladie de la vigne ayant été l'objet d'une étude spéciale dans la Gironde, les faits qui se rattachent à l'histoire de cet insecte ayant été exposés par mon honorable collègue, M. Perez, dans deux conférences qu'il a faites et qui ont été, en outre, publiées par la voie de la presse, j'étudierai principalement les divers traitements qui ont été proposés pour le détruire, les mesures générales qu'il conviendrait de prendre pour obtenir, s'il se peut, un succès prompt et rapide. Cependant, avant d'aborder ce sujet, je tiens à exposer brièvement les travaux qui ont été accomplis à Bordeaux, ainsi que le résumé de ce qui se rattache à l'être malfaisant dont nous nous occupons, à son mode de propagation, et à l'influence qu'il exerce sur la vigne.

On doit beaucoup à M. Laliman, propriétaire sur la rive droite

de la Garonne, qui nous a fait connaître l'invasion du phylloxera, son mode de reproduction sur les feuilles de la vigne, et qui a proposé divers moyens, sinon pour le combattre, au moins pour réparer les dommages qu'il cause aux viticulteurs.

On sait que M. le comte de Lavergne s'est aussi occupé de l'invasion phylloxerique avec beaucoup de zèle, et qu'il a fait tout ce qui a dépendu de lui pour propager les observations les plus importantes qui ont été faites.

La Société d'Agriculture de la Gironde a reçu un grand nombre de communications, et a nommé une Commission spéciale, dite *Commission des vignes*, qui a eu pour mission de s'en occuper.

Une Commission départementale a été nommée, et, conjointement avec plusieurs membres de la Société d'Agriculture, notamment avec son honorable président, M. Régis, un grand nombre d'essais ont été faits. Tout ce qui a été proposé a été mis en pratique. Malheureusement, la Société d'Agriculture et la Commission départementale n'ont rien publié, et au moment où le phylloxera, sortant de son atonie hibernale, menaçait de prendre un nouveau développement, on a généralement regretté ce silence; car les expériences entreprises auraient pu jeter une vive lumière sur les moyens qu'il eût été convenable d'employer pour combattre l'épiphytie actuelle.

M. le Dr Azam, président du Groupe régional de l'Association française pour l'avancement des sciences, a conçu le projet de réunir ce groupe, afin d'approfondir l'étude de l'épiphytie actuelle et de vulgariser les connaissances acquises. Les personnes étrangères au Groupe ont été admises aux séances, le phylloxera a été étudié dans son mode de développement et de propagation, plusieurs méthodes curatives ont été exposées, et il en est résulté, pour toutes les personnes qui ont assisté aux séances du Groupe régional, d'être au courant des travaux accomplis. Les conférences de M. Perez ont été le résumé de ces travaux, joints à ses observations personnelles.

Enfin, Messieurs, la Société d'Agriculture a pris l'initiative d'une souscription dont les fonds seront principalement destinés à

servir pour entreprendre des recherches et des expériences qui pourront rendre de grands services; la Chambre de commerce s'est unie à elle, et une Commission, composée de membres de la Société d'Agriculture et de diverses Sociétés savantes de Bordeaux, aura à s'occuper de l'emploi de cette souscription. Espérons qu'elle donnera d'heureux résultats.

On sait qu'en dehors de la Gironde plusieurs hommes distingués se sont beaucoup occupés de l'épiphytie actuelle. Parmi eux on peut citer MM. Faucon, Planchon, Marès et Lichtenstein.

D'une autre part, l'Institut s'est préoccupé de cette grave question. Une Commission spéciale a été nommée, Commission dont M. Dumas, l'illustre chimiste, a été nommé le Président. Cette Commission a désigné des commissaires chargés d'étudier la question sur les lieux, et c'est à elle que nous avons dû la présence de M. Cornu dans notre région.

On connaît les travaux importants qu'il a faits et qui ont été publiés par l'Institut.

M. Cornu a assisté aux séances tenues par le Groupe régional, et a donné des détails précis qui ont servi de guide pour étudier la question; et l'on peut affirmer que nulle autre part elle n'a pu être ni plus élucidée, ni plus approfondie.

Indépendamment de toutes ces recherches, de tous ces travaux purement scientifiques, on doit à M. Saint-Léon Boyer-Fonfrède une brochure éminemment intéressante, dans laquelle il indique les mesures générales et administratives qui devraient être prises pour combattre le fléau qui peut causer la ruine de ce pays. L'initiative privée ne suffit point. C'est le concours de tous ceux qui y sont intéressés qu'il faut demander, soit sous l'influence d'une intelligente volonté, soit par des mesures qui le rendent obligatoire [1].

[1] C'est un résultat de cet ordre qui a été finalement demandé par la Commission de l'Institut. La résolution prise par cette Société savante ayant été publiée postérieurement à la leçon dont il est ici question, cela fait que je n'ai pu en entretenir mes auditeurs.

La maladie de la vigne est facile à reconnaître, mais seulement lorsqu'elle a déjà fait des progrès considérables.

Les feuilles jaunissent; leurs bords prennent une teinte rouge; elles se flétrissent, et finalement elles se dessèchent.

Les tiges perdent leur verdeur et leur flexibilité; elles se dessèchent et noircissent.

Si l'on arrache la vigne, on voit que les racines sont exfoliées à la surface, que les radicelles sont devenues noduleuses, et qu'elles sont habitées par le phylloxera. Cependant, cet insecte les abandonne lorsqu'elles ont cessé de vivre.

La maladie se propage de proche en proche et circulairement; elle se développe comme une *tache d'huile.* (C'est l'expression dont on se sert généralement.)

Les ceps qui entourent ceux qui sont morts ou qui sont prêts à succomber, peuvent présenter une vigueur apparente; mais leurs racines sont recouvertes par le phylloxera; elles sont fatalement menacées, et devront périr si rien ne vient les secourir.

Plus loin, il peut encore y avoir une zone atteinte par le phylloxera; mais enfin cet insecte s'arrête à une limite déterminée.

Il faut dire ici que des vignes que l'on avait crues mortes ont pu revenir à la vie, probablement en donnant de nouvelles radicelles, qui ont permis à de nouveaux rameaux de se développer.

Il résulte de ces observations que, dans un champ planté de vignes, lorsqu'un pied succombe par l'action du phylloxera, il peut en être atteint depuis plus d'un an, et qu'il est entouré d'une zone infestée par cet animal. Conséquence importante, qu'il convient de se rappeler, et qui doit être prise en considération dans le traitement des vignes malades.

Le phylloxera est un insecte fort petit, appartenant à l'ordre des hémiptères. Il n'atteint pas un millimètre de longueur. On en distingue au moins deux variétés : une aptère, ou sans ailes, l'autre ailée. L'une et l'autre se reproduisent par des œufs.

L'insecte aptère, que l'on trouve dans le sol, lorsqu'il est adulte,

a le corps recouvert de nodules ou de petits boutons saillants; celui qui vient sur les feuilles a le corps lisse.

Les uns et les autres pondent des œufs qui éclosent en huit à dix jours, selon que les circonstances sont plus ou moins favorables. L'insecte ailé est d'abord aptère, une enveloppe se détache et ses ailes apparaissent. Les uns et les autres ont un fort suçoir placé dans une gaîne située au-devant du thorax, soit de la poitrine.

C'est à l'aide de ce terrible instrument que l'insecte attaque les radicelles de la vigne et la fait périr. Ce ne peut être simplement en suçant les sucs propres de ce végétal et en les détournant de leur emploi physiologique qu'il le fait périr; car un cep peut répandre par jour un volume de liquide ou de sève qui est plusieurs milliers de fois plus grand que celui que les phxlloxeras qui l'attaquent pourraient consommer. Ce ne peut être qu'en détruisant la structure des radicelles ou en les empoisonnant qu'il peut exercer sa funeste influence.

Appliqué sur une radicelle, l'insecte s'y fixe à l'aide de son suçoir : il se forme un gonflement nodulaire, légèrement concave du côté de l'animal et gonflé du côté opposé. Quelques-uns de ces nodules suffisent pour que la radicelle ne puisse remplir les fonctions vitales auxquelles elle était destinée et pour que la vigne succombe.

On admet généralement que le phylloxera a trois moyens de propagation :

Sur le sol, dans l'intérieur du sol et par l'atmosphère.

On l'a vu marcher sur le sol et se transmettre ainsi d'un cep de vigne à un autre cep.

Mais par où entre-t-il dans le sol? Les uns pensent qu'il y parvient par les anfractuosités qu'il peut rencontrer; d'autres, qu'il y pénètre en suivant les ceps de la vigne et en descendant jusqu'aux racines. Là il se rencontre toujours un espace libre, soit par la dessiccation du sol qui prend du retrait et s'éloigne du cep de la vigne, soit par les oscillations imprimées à ce dernier par le vent.

Enfin, il peut encore pénétrer dans le sol par les nombreuses anfractuosités présentées par l'écorce des ceps et des racines du végétal dont nous nous occupons.

Quant aux anfractuosités du sol, y ait-on vu descendre l'insecte, on ne peut affirmer qu'il puisse suivre cette voie. Il est si petit qu'il ne trouve nulle part un chemin lisse et sans cavités ou saillies plus ou moins nombreuses, et il est forcément contraint d'en suivre les irrégularités, de monter et de descendre, à moins qu'il ne puisse sauter.

Puisqu'il est question du saut des insectes, je pense devoir parler d'un être de cette grande classe, qui a été rencontré sur les vignes phylloxerées au mois de février dernier. C'est sur la souche, dans la partie la plus rapprochée du sol et dans les anfractuosités de l'écorce qu'il a été trouvé.

Cet insecte y était en grand nombre. Sa forme était plus allongée que celle du phylloxera, il était d'une taille un peu plus grande. Ce qui le caractérisait essentiellement, c'est qu'il avait des antennes terminées par des palpes elliptiques dont il se servait incessamment pour apprécier les objets qui l'entouraient ou sur lesquels il reposait. Cet insecte était agile; mais, de plus, il faisait des sauts de plusieurs centimètres.

J'en ai trouvé portant les mêmes antennes, sur des racines de vignes phylloxerées, qui m'avaient été remises par M. Laliman. Seulement, ces derniers avaient la taille un peu plus étroite et l'abdomen plus large; mais les antennes étaient les mêmes. Cet insecte est-il une des métamorphoses du phylloxera ou bien est-il d'une autre espèce? C'est ce que l'avenir nous apprendra.

On admet encore que l'insecte traverse la terre à une certaine profondeur et peut ainsi passer des racines d'un cep à celles d'un autre cep. M. Faucon ayant planté un cep de vigne dans un vase privé de fond; ce vase ayant été introduit dans un lieu habité par le phylloxera, la vigne a été atteinte par cet animal; ce qui prouve d'une manière évidente qu'il peut traverser les interstices qui existent dans le sol.

Enfin, l'insecte ailé n'a pas reçu cet organe pour n'en point

faire usage. On l'a d'ailleurs plusieurs fois rencontré sur des toiles d'araignées; ce qui prouve d'une manière évidente qu'il peut se transmettre d'un lieu dans un autre par la voie aérienne.

Le phylloxera qui habite le sol devant être privé de la vision, il est éminemment probable que cet insecte, comme tant d'autres, est attiré par les odeurs répandues par la vigne et qu'il possède un organe d'olfaction tout spécial qui lui permet de les apprécier. C'est pour cela que j'ai depuis longtemps proposé l'emploi de produits odorants qui, s'ils ne le tuent point, le repoussent au lieu de l'attirer. Les divers goudrons, la naphtaline ont été proposés pour remplir cette condition.

Après ce bref examen, il importe de dire quelques mots sur l'origine du phylloxera. Plusieurs savants le regardent comme le résultat de la maladie; d'autres le considèrent comme en étant la cause. Je n'ai point l'intention de discuter cette question. Je dois cependant signaler ce fait à votre attention, c'est que ceux qui admettent la première opinion n'ont absolument rien proposé qui ait été reconnu utile pour arrêter les progrès de la maladie, et qu'il en est tout autrement de ceux qui admettent une opinion contraire. Non seulement on a proposé une foule d'agents et de traitements, mais on a dépassé les limites de l'utile et du vrai. La science a fait défaut chez beaucoup d'individus qui ont pris leurs inspirations pour des vérités.

Il est vrai que l'on peut se demander s'il est possible qu'un si petit insecte puisse produire des effets aussi désastreux sur la vigne? Il en faudrait des milliers par chaque pied et l'on n'en a jamais tant vu. Le phylloxera est donc le résultat et non la cause de l'épiampélie.

Depuis que l'on sait comment il agit, que l'on connaît l'action funeste qu'il exerce sur les radicelles de la vigne, ce doute n'est plus permis. On comprend facilement que des effets considérables peuvent être produits par un nombre d'individus fort restreint. Il ne dévore pas la vigne, il arrête en elle les sources de la vie

végétale. Rien ne s'oppose donc à ce que le phylloxera soit considéré comme la cause et non comme un effet de la maladie.

Je dirai encore que, partout où la vigne a succombé à la maladie qui nous occupe, on a trouvé le phylloxera sur ses racines; que, partout où l'on introduit cet animal, il transmet la maladie. M. Cornu a d'ailleurs fait des expériences intéressantes sur ce sujet et qui ont démontré ce qui vient d'être avancé. Un horticulteur anglais, ayant déraciné un pied de vigne atteint par le phylloxera, l'ayant parfaitement nettoyé et transplanté dans un sol qui en était complètement privé, le pied de vigne s'est parfaitement rétabli des accidents causés par le phylloxera. On sait encore que la simple inondation des vignes a suffi pour détruire cet insecte, qui est un animal aérien, en l'asphyxiant, ainsi que ses œufs, et qu'elle a, par ce fait, déterminé la guérison de ces dernières.

Il faut dire encore, à ceux qui admettent que le phylloxera est le résultat de la maladie de la vigne, qu'ils reconnaissent par ce fait même ce que l'on a appelé la génération spontanée. Or, il en est parmi eux qui sont bien loin d'admettre cette dernière opinion sur l'origine des êtres vivants.

Avant d'aborder ce qui est relatif au traitement anti-phylloxerique, il importe d'appeler votre attention sur la nature des principaux sols où la vigne est cultivée : 1° parce que le sol peut, par sa propre nature, exercer une influence sur le phylloxera; 2° parce qu'il est des sols qui neutralisent les agents que l'on veut employer pour détruire cet insecte malfaisant.

Nous en distinguerons quatre principaux : 1° les sols sablonneux; 2° les sols argileux; 3° les sols calcaires; 4° les sols ferrifères.

Les *sols sablonneux*, par leur inaltérabilité sous l'influence de l'eau et de l'air, par la mobilité de leurs parties qui n'adhèrent que peu ou point les unes aux autres, présentent un obstacle considérable à la pénétration du phylloxera. Aussi, en ont-ils été

indemnes jusqu'à ce jour et a-t-on proposé le sable siliceux pour prévenir l'invasion de cet animal.

Les *sols argileux* sont plus ou moins cohérents, selon la quantité d'argile qu'ils contiennent; ils prennent du retrait par la dessiccation et il en résulte des anfractuosités par lesquelles non seulement le phylloxera peut pénétrer; mais qui rendent fort difficile le traitement préventif.

Les *sols calcaires,* si peu qu'ils le soient, s'opposent au traitement des vignes par les acides et principalement par l'acide sulfureux, que l'on peut se procurer à un très bas prix et avec une facilité extrême. Cet acide, qui est gazeux, mais dont l'eau dissout environ trente fois son volume à la température ordinaire, attaque le carbonate de chaux, en chasse l'acide carbonique et donne naissance à du sulfite de chaux qui a perdu ses propriétés asphyxiantes, qui n'est plus gazeux et ne peut plus se propager. Il en serait de même s'il était employé gazeux ou dissous dans l'eau.

Ce verre contient du carbonate calcaire pulvérisé, j'y ajoute de l'acide sulfureux dissous dans l'eau et vous voyez une vive effervescence qui est due à l'action réciproque de ces corps.

Les *sols ferrifères* peuvent aussi exercer une action sur les sulfures; ils les décomposent et peuvent même donner naissance à du sulfure de fer qui entrave l'action des sulfures solubles quels qu'ils puissent être.

Avant de faire usage d'un agent anti-phylloxerique, il sera donc de la plus haute importance de constater la nature du sol et de voir s'il ne peut réagir sur cet agent ou sur les produits qu'il contient.

Abordons le traitement de l'épiphytie qui sévit contre la vigne.

Deux buts essentiellement distincts peuvent être l'objet de notre sollicitude : préserver les vignes qui n'ont point été atteintes par la maladie, guérir celles qui l'ont été. De là deux sortes de traitements : l'un *préventif* et l'autre *curatif*. Nous verrons bientôt que ces deux modes de traitement peuvent se réduire en un seul, qui offre par cela même des avantages considérables.

Il importe encore de distinguer un *traitement externe* et un *traitement interne*.

Le phylloxera étant la cause de la maladie, il faut trouver le moyen de le détruire sans nuire à la vigne.

Cet animal habitant les racines de ce végétal, c'est là qu'il faut l'empêcher d'arriver ou l'aller chercher. On est obligé de reconnaître que cette dernière opération présente de grandes difficultés; mais qu'elles ne sont cependant point insurmontables.

La réflexion nous indique que pour atteindre le phylloxera sur les racines de la vigne il faut employer des fluides qui puissent y pénétrer : des liquides, ou des gaz, ou des vapeurs de corps volatils.

Les produits solides devront donc être solubles dans l'eau, ou bien ils ne pourront être d'aucune utilité pour le traitement curatif.

Il n'en serait point de même pour le traitement préventif, comme nous le verrons bientôt.

Avant d'aborder l'étude des divers traitements qui peuvent être appliqués à l'épiphytie qui nous occupe, et les moyens de les mettre en pratique, il est convenable d'examiner les produits que l'on a proposés ou qui peuvent être utilisés pour combattre cette dernière.

Les agents proposés sont fort nombreux : la Commission de l'Hérault en a étudié à elle seule près de cent quarante; la Commission départementale de la Gironde a opéré sur plus de quatre-vingts.

Les agents ou les moyens proposés, ou qui ne l'ayant point été, ne sont pas moins à essayer, se rattachent à plusieurs groupes distincts :

L'eau employée pour inonder les terrains plantés en vignes;

Des produits insolubles, tels que le sable, la houille pulvérisée, les argiles, etc.;

Le soufre pulvérulent;

Des produits solubles, salins, non vénéneux ou vénéneux;

Des sulfures;

Des produits volatils, odorants, asphyxiants ou anesthésiques;
Des gaz;
Des acides;
Des alcalis;
Des produits organiques vénéneux ou simplement amers;
Des urines;
Des savons;
Les boues des égouts;
Des fumiers et des engrais azotés et potassiques.

Nous n'examinerons parmi ces corps que les plus importants et ceux qui deviennent inertes, afin que des tentatives infructueuses ne soient point faites; car il en résulterait une grande perte de temps, et par suite des dépenses inutiles et même la ruine des vignobles.

Nous verrons que bien des essais ont dû être infructueux et que bien des déceptions en ont été la conséquence.

On a effectivement proposé des corps qui se neutralisent et perdent leurs propriétés actives dans le sol, ou qui y deviennent insolubles, ou qui se détruisent les uns par les autres lorsqu'ils font partie de mélanges qui ont été imaginés par des hommes dont les connaissances étaient insuffisantes pour prévoir ce qui devrait résulter de l'action réciproque des corps dont ils proposaient l'emploi.

Étudions d'abord les agents proposés ou utilisables; nous verrons ensuite comment on peut employer ceux qui offrent des chances de succès.

Commençons par les produits fixes et peu ou point odorants.

On a proposé l'*acide arsénieux*. Ce produit est légèrement soluble dans l'eau, la sève de la vigne peut en dissoudre une certaine quantité; il peut alors pénétrer dans la racine, même jusque dans le raisin et devenir un agent vénéneux pour l'homme. On sait bien qu'il est aujourd'hui très usité en médecine, que l'on peut en prendre jusqu'à un centigramme par jour, sans qu'il en résulte d'accidents fâcheux; mais pourquoi employer un tel produit qui, à une dose plus élevée, nous offre de si mauvaises chances?

Il a d'ailleurs été essayé et il a été reconnu qu'il n'a produit aucun effet utile dans le traitement de l'épiphytie actuelle..... Il faut donc le rejeter.

On a proposé le *sulfate de cuivre,* sel soluble dans l'eau et vénéneux encore pour l'espèce humaine. Mais ce sel ne peut produire aucun effet utile pour le traitement de la vigne. L'eau du sol est imprégnée de bicarbonate de chaux. Ce sel décompose complètement le sulfate de cuivre et le rend insoluble.

Voici environ un litre de l'eau potable dont nous faisons usage. J'y verse quelques gouttes d'une dissolution de sulfate de cuivre et en peu de temps l'eau se trouble, devient d'un blanc bleuâtre et opaque. Il se forme ainsi un sulfo-carbonate de cuivre, insoluble, qui reste sur place et ne peut atteindre le phylloxera. Il est vrai qu'en ajoutant un excès de sulfate de cuivre, le précipité se redissout ou ne se forme pas; mais alors le liquide devient dangereux et nuisible à la vigne.

On a aussi signalé l'emploi de l'*acétate de cuivre*; mais ce produit est d'un prix trop élevé pour qu'il puisse être employé.

Le *sulfate de zinc* coûte moins que le sulfate de cuivre; mais il s'unit avec la plupart des matières organiques et les rend insolubles. Il est éminemment probable qu'il neutraliserait complètement les effets de la sève de la vigne.

Le *sulfate de fer,* s'il peut nuire au phylloxera, ne serait peut-être pas dangereux pour la vigne. Il est d'un prix peu élevé et mérite d'être essayé.

On peut le remplacer par les cendres noires dites de Picardie, qui en sont l'origine et peuvent l'abandonner lentement. On pourrait même employer des lignites chargés de sulfure de fer, que l'on se procurerait facilement dans la Gironde; mais il faut avant tout en faire l'essai.

Le sulfate de fer se peroxyde au contact de l'air; mais il est ramené à l'état de sulfate de fer soluble par le carbonate de chaux qui se trouve dans le sol. L'oxydation par l'oxygène qui se trouve aussi dans le sol et la réaction produite par le carbonate de chaux finiraient cependant par l'épuiser.

Aux produits plus ou moins vénéneux qui viennent d'être signalés à votre attention, ajoutons le *bichlorure de mercure*, poison violent pour tous les animaux et pour l'homme. Espérons que l'on n'en fera pas usage.

Le *protochlorure de mercure* a été également proposé; mais il est insoluble dans l'eau et ne peut rendre aucun service.

On a même indiqué l'*azotate d'argent*, matière de même nature que la pierre infernale dont on se sert en chirurgie pour cautériser. Produit que l'on proposait de mêler avec une décoction d'assa fœtida, de tabac et de marrube blanc. Mais ce sel est décomposé par les chlorures qui se trouvent partout, il s'unit aux matières organiques et serait absolument annihilé avant d'avoir pu atteindre le phylloxera. Ajoutons qu'il est d'un prix fort élevé et que, par cette seule raison, il ne devra point être employé.

Des sels solubles et non vénéneux pour l'homme, au moins à petite dose, ont été essayés, l'*alun*, l'*azotate de potasse*, les *sels de Berre* (mélange de sulfates et de chlorures potassiques, sodiques et magnésiques), le *sulfate d'ammoniaque*, les *carbonates* et les *bicarbonates de potasse et de soude*, la *potasse du commerce*, le *sel marin ou chlorure sodique* ont été employés et ont donné des résultats plutôt avantageux que nuisibles. En effet, la plupart de ces sels contiennent de la potasse ou de l'ammoniaque, et tout en pouvant être nuisibles au phylloxera, ils fournissent des produits utilisables par la vigne.

Il en serait de même des cendres vives qui abandonnent à l'eau des sels de potasse et de soude et notamment du carbonate de potasse.

Le *chlorate* et l'*hypermanganate de potasse*, sels fortement oxygénés, ont aussi été proposés; mais leur prix est très élevé et rien n'a prouvé qu'ils pussent être vraiment utiles.

Le *chlorure de calcium*, sel éminemment soluble dans l'eau et que l'on pourrait se procurer à un très bas prix, a été proposé et essayé par la Commission départementale de l'Hérault.

On a proposé des *acides*, tels que le sulfurique, l'azotique, le chlorhydrique et le vinaigre. Mais tous ces produits sont saturés

par le carbonate de chaux qu'ils rencontrent dans le sol et deviennent inertes. S'ils sont en excès, ils sont alors très nuisibles à la vigne.

L'*ammoniaque*, produit éminemment volatil, ne serait pas facile à manier, à cause de l'action qu'elle exercerait sur l'organe de l'olfaction et même sur les yeux de ceux qui l'emploieraient. Elle se carbonaterait ou serait perdue par évaporation avant d'avoir pu pénétrer jusqu'aux racines (1).

La *chaux vive* a été proposée et essayée, mais elle ne peut produire aucun effet utile. *Éteinte* par l'eau, elle donne un hydrate qui, appliqué sur le pied de la vigne, peut lui être nuisible. Elle n'est d'ailleurs que très peu soluble dans l'eau, qui n'en prend qu'environ le sept cent soixante-dixième de son poids à la température ordinaire. En s'infiltrant dans le sol, elle rencontre de l'acide carbonique auquel elle s'unit pour former un carbonate neutre et insoluble, qui demeure inerte.

La chaux n'offre donc pas la chance de pouvoir être utilisée pour combattre efficacement le phylloxera.

Les *savons* dissous dans l'eau font périr les insectes; mais leur innocuité sur la vigne n'est pas encore démontrée. Il est même probable qu'ils seraient nuisibles par le dépôt de savons calcaires qui se déposeraient sur les radicules et les empêcheraient de remplir leurs fonctions vitales. A ce point de vue, ils aideraient le phylloxera. Toutefois, le savon auquel on devrait accorder la préférence, si l'expérience démontre qu'il n'est pas nuisible, serait le savon vert du département du Nord, qui est à base de potasse et dont le prix est peu élevé (2).

Étudions maintenant les agents gazeux ou simplement volatils.

Tous les animaux respirent, à tel degré de l'échelle animale

(1) Des expériences récentes m'ont démontré qu'elle est très nuisible à la vigne; elle en fait noircir les rameaux et elle la tue infailliblement, même à faible dose.

(2) Des expériences faites depuis la présente leçon m'ont démontré que les savons sont nuisibles à la vigne.

qu'ils appartiennent, qu'ils soient aériens ou aquatiques. Au premier degré, cette fonction s'accomplit par une simple imbibition des éléments fondamentaux de l'organisme; viennent ensuite les branchies qui puisent l'oxygène dans l'eau; les stigmates et les trachées, que l'on observe chez les insectes, enfin, les poumons des vertébrés aériens, qui le reçoivent directement de l'air pour le répandre partout où il est utile.

La vie étant intimement reliée à la respiration, qui commence dans l'œuf, on la fait cesser immédiatement si cette fonction est suspendue pendant quelques instants.

On peut donc affirmer, sans même en avoir fait l'essai, que tout produit asphyxiant peut faire périr le phylloxera. C'est ce qui va vous être démontré expérimentalement, non sur cet animal, mais sur des mouches.

Il est une autre action qui s'exerce chez les animaux, en suspendant la sensibilité et le mouvement; c'est l'anesthésie. Quoiqu'il n'y ait point de système nerveux chez les animaux inférieurs, ils ne sont pas moins sensibles à l'action de ces agents. Le système nerveux doit être considéré comme un intermédiaire entre les parties les plus intimes de l'être vivant et les êtres ambiants.

Il est enfin des poisons, tels que les sels de strychnine, que j'ai essayés sur les œufs de la grenouille, qui ne puissent déterminer des mouvements, sans que le système nerveux soit encore apparu.

Nous y reviendrons bientôt.

Parmi les produits asphyxiants on peut citer les *sulfures*, qui sont gazeux ou volatils, comme le sulfure hydrique ou hydrogène sulfuré, qui peut être produit dans le sol par la décomposition des sulfures alcalins, les sulfures ammonique et ammonhydrique, et enfin le sulfure de carbone.

Le *sulfure de carbone*, corps éminemment volatil et qui possède une odeur infecte, surtout lorsqu'il tient un peu de soufre en dissolution, a été employé depuis plusieurs années par M. le baron Thenard. Ce sulfure tue le phylloxera; mais il atteint aussi la

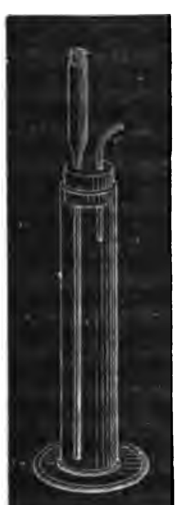
vigne et peut la faire périr. A plus faible dose, il agirait sur le phylloxera et serait inoffensif pour la vigne [1].

Le *pétrole léger*, qui se volatilise à une température peu élevée, et qui coûte moins cher que ceux employés de préférence pour l'éclairage, agit aussi sur les animaux.

La naphtaline, le coaltar, le goudron ordinaire, la chaux de l'épuration du gaz, peuvent aussi réagir d'une manière néfaste sur les animaux.

M. Dumas, de l'Institut, a publié récemment des expériences qu'il a faites sur des mouches. Les mouches ne sont point le phylloxera; mais elles vivent dans les mêmes conditions, et ce qui les tue peut aussi tuer le phylloxera et même... l'homme; c'est-à-dire que toute l'échelle animale est soumise aux mêmes conditions fondamentales de la vie.

Je vais faire des expériences du même ordre, et dont vous pourrez apprécier la valeur réelle : les mouches sont visibles de loin. Elles sont renfermées dans des éprouvettes, au fond desquelles se trouve un peu d'ouate. A l'aide de ce tube on peut introduire des liquides dans ces éprouvettes et vous apprécierez les effets qu'ils produiront.



J'emploie le sulfure de carbone; parvenu au-dessous de l'ouate, il répand sa vapeur dans l'éprouvette, et toutes les mouches tombent asphyxiées ou mortes en moins d'une minute.

Dans cette autre éprouvette, j'ajoute de l'hydrogène sulfuré dissous dans l'eau. Les insectes sont frappés presque instantanément.

L'hydrosulfate d'ammoniaque dissous agit aussi très efficacement, mais avec moins de rapidité.

[1] Depuis cette leçon, j'ai essayé le sulfure de carbone sur de la vigne saine, en le renfermant dans de petits flacons ouverts. Il s'évapore en quelques jours; la terre possède l'odeur de ce produit; *mais la vigne n'en a point souffert d'une manière appréciable.* Il a d'ailleurs été employé avec succès par M. Moustier. (*Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences,* t. LXXIX. p. 19.)

Le pétrole léger asphyxie les mouches, mais demande plus de temps que les produits précédents.

Voici un flacon de deux litres contenant quelques grammes de naphtaline, au-dessus de laquelle on a placé du coton. Les mouches que l'on y introduit tombent toutes en moins d'une minute.

Le coaltar est placé au fond d'un flacon semblable et couvert d'ouate. Les mouches que l'on y introduit succombent; mais beaucoup plus lentement qu'avec la naphtaline. Il faut près d'une heure.

Le goudron de bois, employé de la même manière, est encore moins efficace. Les mouches y vivent pendant plusieurs heures.

Voici de la chaux du gaz employée de la même manière. Des mouches y vivent depuis plus de quatre heures. Si j'y verse de l'acide chlorhydrique, il se dégagera du sulfure hydrique, il y aura peut-être aussi des vapeurs cyanhydriques, et les mouches périront bientôt.

Enfin voici une expérience importante qui va être faite sous vos yeux; la plus importante peut-être.

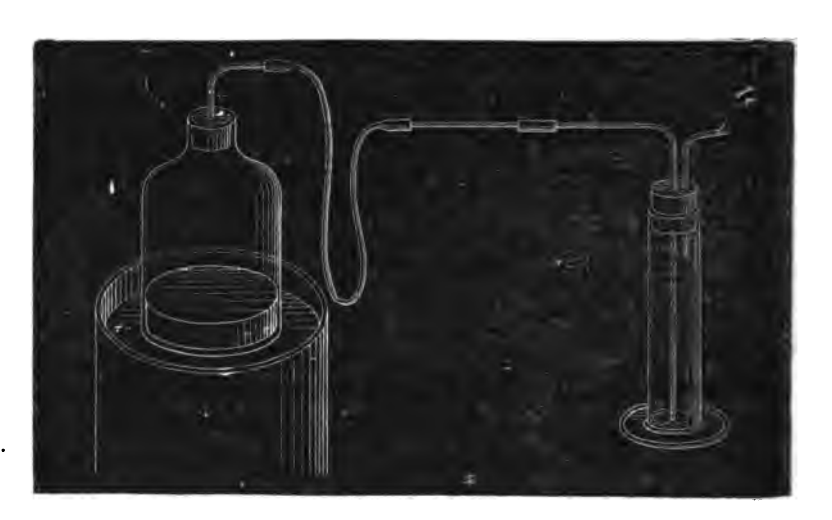
Cette grande éprouvette contient des mouches en bonne santé. On va y introduire de l'oxyde de carbone par la partie inférieure; le gaz étant un peu moins dense que l'air se mêlera rapidement avec lui.

Vous voyez que les mouches tombent comme si elles étaient foudroyées.

L'oxyde de carbone est éminemment asphyxiant, comme on ne le sait que trop par les accidents et les suicides dont il est la cause.

Ce gaz peut être employé par la méthode de M. Fournet, et je ne doute pas que l'on en obtiendra d'heureux résultats.

Il reste cependant à voir l'effet qu'il exercera sur la vigne.



On a proposé une infusion de quinquina, produit amer et coûtant fort cher. Si l'on savait que le phylloxera repousse l'amertume, on pourrait lui offrir une infusion de coloquinte qui coûterait beaucoup moins.

Les infusions ou les sucs de tabac provenant des manufactures de l'État, contiennent une quantité considérable de nicotine, ainsi que cela a été vérifié dans les laboratoires de la Faculté.

La nicotine est un alcoloïde liquide et volatil qui pourrait probablement faire périr le phylloxera [1], mais on ne pourrait jamais s'en procurer une quantité suffisante.

Quoi qu'il en soit, on pourra faire usage de ce liquide lorsqu'il sera possible d'en avoir.

Une infusion de noix vomique pourrait probablement produire des effets utiles. J'ai déjà dit que la strychnine faisait naître des

[1] Depuis que cette leçon a été faite, les journaux nous ont appris qu'un fumeur avait parié qu'il fumerait douze cigares sans discontinuer... Il est mort après le neuvième.

convulsions sur les œufs de la grenouille, arrivés à un certain point de développement. Il est donc éminemment probable que la noix vomique, qui contient cette base, pourrait faire périr le phylloxera si elle était employée à une dose suffisamment élevée; car il ne suffirait pas d'exciter chez lui des convulsions : il faut le tuer.

Les urines des vidanges ont été proposées; elles contiennent du carbonate et du sulfure ammoniques qui pourraient être nuisibles au phylloxera, mais qui pourraient aussi l'être à la vigne ([1]).

Dans les contrées vinicoles, les urines seraient insuffisantes, mais on pourrait employer celles qu'il serait possible de se procurer si l'on en démontrait l'utilité.

Après avoir examiné les principaux produits anti-phylloxeriques, il convient de voir comment il est possible d'en faire usage. Les procédés à employer dépendront d'ailleurs de leur insolubilité dans l'eau, de leur solubilité dans ce liquide ou de leur état de fluide élastique ou de vapeurs.

D'un autre côté, il n'a été question jusqu'à ce moment que du traitement externe; mais il y a aussi à s'occuper du traitement interne, traitement qui a été mis en pratique et qui a donné des résultats satisfaisants, dans les expériences qui ont été faites par la Commission départementale de la Gironde.

Pour employer les produits pulvérulents insolubles, tels que le sable siliceux, la houille pulvérisée, il convient de déchausser la vigne en creusant autour de son pied une cavité d'environ vingt centimètres de profondeur et d'y déposer le produit.

Les produits solubles doivent être pulvérisés ou au moins concassés, puis, s'ils sont très actifs, il est indispensable de les mêler avec une partie de la terre enlevée au pied de la vigne, de déposer le mélange dans la cavité résultant de cet enlèvement, d'y ajouter de l'eau, *s'il se peut,* et de recouvrir le tout avec le restant de la terre. *L'addition de l'eau est une condition indispensable*;

([1]) Des expériences récentes m'ont démontré que l'hydrosulfate d'ammoniaque est nuisible à la vigne.

car s'il ne survient point de pluies, les produits resteront dans le lieu où on les aura déposés et ne produiront aucun effet utile.

L'arrosage est donc une condition essentielle, à laquelle il faudra satisfaire s'il est possible de se procurer de l'eau.

Les matières pulvérulentes, au lieu d'être déposées au pied de la vigne, peuvent être introduites dans le sol par des trous que l'on peut percer avec une tarière. Il faut éviter d'employer une tige en opérant par le choc ou la pression, parce que la terre se comprimerait et deviendrait beaucoup moins perméable que dans son état normal.

Les matières pulvérulentes peuvent aussi être versées sur le sol, comme cela sera exposé dans quelques instants.

Au lieu de matières pulvérulentes, on peut employer des dissolutions de produits anti-phylloxeriques, en les versant dans des trous percés auprès des racines de la vigne, ainsi que cela vient d'être dit.

Pour les produits gazeux ou réductibles en vapeur, il y a quelques années que M. Fournet a proposé de les injecter dans le sol, à l'aide d'un soufflet spécial qui permet d'exercer une certaine pression. Il faut opérer près des racines, le gaz ou les vapeurs les suivent et le phylloxera peut y être atteint dans un temps très court.

M. Fournet a proposé l'injection de fluides élastiques, je propose celle de liquides quand il sera possible de la mettre en pratique ; nul doute qu'elle ne puisse donner des résultats rapides et satisfaisants.

L'injection opérée sous une certaine pression présente une assez grande difficulté pour être mise en pratique : cette difficulté vient de ce que les fluides peuvent sortir par l'ouverture même où pénètre le tube qui sert pour les injecter.

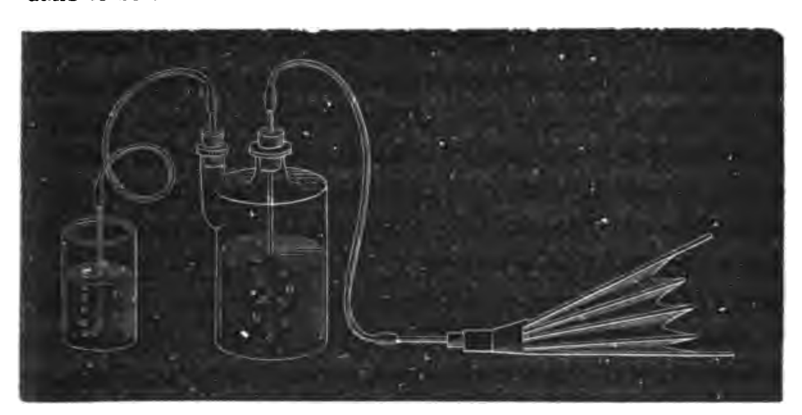
Voici un moyen de résister à cette influence. L'instrument consiste en un cône, traversé par un tube dans la direction de son axe. Ce cône, entrant dans le sol sous l'influence d'une pression suffisante, ferme l'ouverture, et les fluides, qu'ils soient gazeux ou liquides, ne peuvent plus s'échapper.

D'après l'expérience dont nous avons été témoins, l'oxyde de carbone serait l'agent le plus efficace et le moins dispendieux.

Il est effectivement facile de l'obtenir à très peu de frais, et l'on pourrait même construire un appareil qui, tout en produisant de l'oxyde de carbone, développerait la force qui pourrait l'injecter dans le sol. Cet appareil monté sur un petit chariot pourrait être dirigé entre les règes des vignes. Dans le cas où les vignes ne seraient point plantées en règes, l'appareil demeurerait sur le chemin qui les borde, et les gaz seraient conduits par des tubes de caoutchouc d'une forte épaisseur, recouverts d'une enveloppe résistante qui leur permettrait de supporter une pression interne de plusieurs atmosphères.

Au lieu de l'oxyde de carbone, on peut employer d'autres gaz méphytiques, tels que l'hydrogène sulfuré; mais on peut aussi faire usage de vapeurs mêlées avec de l'air. Ce dernier procédé serait le plus facile à mettre en pratique.

Voici un appareil qui vous donnera une idée de celui qui pourrait être employé. Il consiste principalement en un réservoir où pénètre l'air sous l'influence d'une pression opérée par un soufflet auquel on pourrait substituer une pompe foulante. L'air, sortant du vase, est saturé de la vapeur active et peut être injecté dans le sol.



Le sulfure de carbone, l'hydrosulfate d'ammoniaque, le pétrole léger, un mélange de ce dernier corps et de sulfure de carbone

dont on pourra amortir l'effet autant qu'on le désirera en faisant varier leurs quantités relatives, pourront être employés [1].

Seulement il faudra tenir compte de ce que l'évaporation du liquide en abaisse considérablement la température, et qu'il sera peut-être convenable de disposer l'appareil pour que ce liquide puisse être chauffé afin de la régulariser.

Maintenant, après avoir étudié l'action du phylloxera, les agents qu'on peut lui opposer et la manière d'en faire usage, nous pouvons aborder le traitement proprement dit. Ce traitement, ainsi que cela a été dit précédemment, peut être divisé en deux parties nettement distinctes : une préventive, l'autre curative.

Examinons la première :

Posons d'abord cette question : tous les vignobles sans exception doivent-ils être soumis immédiatement au traitement préventif?

On peut répondre non.

Quoique l'invasion phylloxérique ne puisse généralement être reconnue que par les dégâts qu'elle a causés, et environ un an après qu'elle s'est effectuée, il est inutile d'employer partout des moyens préventifs généraux.

Cependant quand une région bien déterminée est attaquée, surtout si les conditions géologiques sont les mêmes, il est indispensable d'avoir recours au traitement préventif; traitement qui peut varier selon les circonstances et les conditions dans lesquelles se trouvent les vignobles, ainsi que cela résultera de l'examen auquel nous allons nous livrer.

Si le sol est sablonneux, si les pieds de la vigne ne sont point déchaussés par la dessiccation où l'agitation causée par le vent, il n'y aura que peu ou point de choses à faire; il est éminemment probable que le sol résistera à l'invasion phylloxerique.

Seulement, dans ce cas, on peut faire usage de produits pulvé-

[1] L'huile de schiste, la benzine, l'essence de térébenthine se mêlent en toutes proportions avec le sulfure de carbone et peuvent être substitués au pétrole quel qu'il soit.

rulents rendus odorants, tels que sable, plâtre, terre divisée et pulvérisée, imprégnés de naphtaline ou de coaltar, qui sont nuisibles au phylloxera et l'éloignent par leur odeur; car cet animal, on n'en peut douter, est guidé par l'olfaction : c'est à l'aide de cette fonction qu'il sait reconnaître la vigne et est attiré par elle ; c'est aussi cette faculté d'apprécier les odeurs qui doit l'éloigner des produits qui lui sont nuisibles. Vous avez vu que la naphtaline fait périr cet insecte en peu d'instants; le coaltar qui en contient agit de même, mais plus lentement; le goudron de bois plus lentement encore.

La poudre de M. Crébessac, qui est tout à la fois rendue odorante par la naphtaline et vénéneuse par des sulfures alcalins, sans qu'elle nuise en aucune manière à la vigne, peut être employée avec succès.

Lorsque le sol est plus compacte, lorsque les ceps de la vigne sont en partie déchaussés et lorsqu'il présente des crevasses, il faut un autre traitement. Il convient de creuser une cavité autour du pied de la vigne et d'y déposer simplement du sable siliceux, lavé s'il le faut, pour que ses parties constituantes n'adhèrent point entre elles.

Le traitement deviendra plus efficace si la souche de la vigne, la partie enterrée qui aboutit au sol, est enduite de coaltar, ou de quelque autre produit visqueux et agglutinatif; mais le coaltar est d'un prix peu élevé et préférable à tous les autres. La cavité sera remplie par du sable seul, ou par du sable mélangé à divers produits anti-phylloxeriques et principalement encore avec la poudre de M. Crébessac, qui vient d'être indiquée.

Il y a plusieurs années que j'ai proposé l'emploi des goudrons, comme corps agglutinants, pour revêtir la partie inférieure des ceps de vigne jusqu'à une certaine profondeur dans le sol. Depuis cette époque, M. le Dr Labat, de Bordeaux, et M. Falières, pharmacien à Libourne, ont proposé de joindre du plâtre au goudron, afin de pouvoir l'employer sous forme pulvérulente. Il pourrait alors être placé au pied de la vigne ou répandu sur le sol. Depuis cette époque, on a proposé de remplacer le goudron par la naphtaline.

M. Crébessac l'avait déjà employée depuis un bon nombre d'années pour éliminer les insectes qui attaquaient ce végétal, quels qu'ils puissent être. Vous avez vu l'énergie avec laquelle ce produit odorant tue les mouches; il est éminemment probable que, non seulement il peut repousser le phylloxera par son odeur, mais qu'il peut aussi lui donner la mort. Employé à petite dose et avec précaution il pourra rendre de grands services.

Si les crevasses du sol ne sont pas trop nombreuses et si elles sont facilement accessibles, on peut les remplir, quand ce ne serait qu'avec du sable. On peut aussi y introduire une espèce de mortier à demi fluide contenant de la chaux éteinte, du plâtre, de l'argile délayée, du sable pour en empêcher le retrait, du soufre pulvérulent, du sulfure calcique ou tels autres produits que l'on pourrait se procurer.

S'il était difficile de remplir les crevasses du sol, il conviendrait, si cela était possible, de le remuer, de l'aplanir, et, enfin, de le recouvrir d'une poudre anti-phylloxerique.

Le pourtour d'un cépage pourrait être surtout recouvert d'une poudre anti-phylloxerique, sur environ un mètre de largeur. Ce moyen ne pourrait toutefois empêcher l'accès du phylloxera ailé.

Au sable, on peut substituer la *houille* pulvérisée; mais elle coûte plus et n'offre pas les mêmes avantages.

Les *lignites noirs, pulvérulents, chargés de bisulfure de fer*, de l'espèce représentée par la pyrite blanche ou leucopyrite ($Fe S_2$), serait bien préférable à la houille, et coûterait beaucoup moins; on aurait ainsi tout à la fois un agent mécanique et un agent chimique; car la pyrite blanche se transforme peu à peu en sulfate de fer.

Il serait très facile de se procurer des quantités considérables de ce produit, car il en existe dans plusieurs localités qui ne sont pas trop éloignées de Bordeaux, ainsi que je l'ai déjà signalé à votre attention.

Les *cendres de bois* pourraient aussi être employées avec avantage. Imprégnées par l'eau, elles contiennent du carbonate

potassique très soluble, qui doit être nuisible au phylloxera, et qui serait favorable à la vigne, si la dose n'en était pas trop élevée.

Le *traitement curatif* peut varier beaucoup plus que le préventif. Vous savez qu'il peut se diviser en traitement externe et en traitement interne.

Ce traitement dépend des produits dont on dispose et des méthodes qui peuvent être mises en pratique.

Parmi les matières qui peuvent attirer votre attention, il y a l'eau, les produits solubles dans ce liquide et les produits gazeux ou vaporisables.

Occupons-nous d'abord de l'eau.

Cet agent ne peut être employé partout; il s'en faut de beaucoup. Une grande quantité de vignes est plantée sur des collines où l'eau ne pourrait séjourner, et il est bien des lieux où l'on ne peut même s'en procurer.

On parviendrait cependant à faire séjourner l'eau sur une colline, en disposant le sol d'une manière convenable; en creusant une cavité à chaque pied de vigne, et en élevant entre les rangs de la vigne des petites digues, qui pourraient retenir l'eau. Mais il faudrait de grandes dépenses pour cela.

La vigne n'est point une plante aquatique et elle ne peut être immergée sans courir quelque danger. En hiver, quand presque toutes les fonctions vitales sont suspendues, elle peut être inondée sans beaucoup souffrir; mais il en est de même du phylloxera, il hiverne, sa respiration est sans doute fortement diminuée, ainsi que M. V. Regnault l'a observé pour les mammifères, et il peut résister à l'eau pendant un temps considérable sans être asphyxié.

M. Faucon a fait des expériences importantes sur ce sujet. Il en résulte qu'il faut plus d'un mois d'inondation pour que le phylloxera succombe.

Pendant le printemps et en été, la vigne ne peut être immergée sans danger pour son existence.

S'il en était autrement, le phylloxera serait promptement

asphyxié. Mais les expériences faites pendant un temps très court n'ont pas donné de résultats certains. En effet, l'eau exige un temps assez considérable pour pénétrer jusqu'aux radicelles de la plante et l'on en a cessé l'emploi, avant qu'elle ait atteint l'animal que l'on voulait détruire.

On doit à La Hire une expérience qui a effectivement démontré que l'eau des pluies s'infiltre fort lentement dans le sol.

Si, avant d'employer l'eau, on recouvrait le sol avec une poudre soluble, anti-phylloxerique, on pourrait en obtenir des résultats rapides et de la plus haute importance.

Si le produit anti-phylloxerique était déposé dans une cavité creusée au pied de la vigne, l'action de l'eau serait encore plus rapide et plus efficace.

L'eau, avant d'être distribuée, pourrait aussi traverser un bassin où elle rencontrerait des produits solubles en quantité convenable, ou bien elle les recevrait d'un réservoir qui les lui distribuerait lentement. Une simple barrique ou futaille contenant le produit dissous dans l'eau pourrait, par un écoulement réglé, le distribuer comme il conviendrait de le faire.

L'eau ne pouvant être employée que dans un très petit nombre de localités, et son usage ne donnant de résultats que dans les circonstances qui viennent d'être indiquées, on en conclut facilement qu'il faut, dans la plupart des cas, avoir recours à d'autres agents.

Occupons-nous maintenant des produits anti-phylloxeriques solides et pulvérulents.

Tous ces produits doivent être solubles dans l'eau, ou ils ne peuvent rendre aucun service.

Il faut que leur dissolution aille atteindre les radicelles de la vigne. C'est là qu'elle peut rencontrer le phylloxera, le détruire et protéger ce végétal.

Non seulement il faut des produits solubles, mais il faut de l'eau pour les dissoudre; sans cela, on ne peut compter sur aucun effet utile.

Que cette eau vienne de la pluie, ou qu'elle soit ajoutée par le

viticulteur, il en faut; sans elle, il n'y a rien à espérer. C'est à cause de cela que bien des essais infructueux ont été faits.

Les produits doivent être déposés au pied de la vigne, dans une cavité creusée exprès pour les recevoir. S'ils sont très actifs, il faut les mêler avec une partie de la terre venant de la fouille faite, ainsi que cela a déjà été dit, puis recouvrir le tout avec de la terre simple.

Il importe d'arroser immédiatement, n'employât-on qu'un litre d'eau par cep de vigne.

Je le répète, **il faut de l'eau, sans elle on ne peut obtenir aucun résultat favorable.**

A moins que l'on n'ait d'abord arrosé la vigne et qu'il ne pleuve ensuite abondamment, les résultats sont lents à obtenir, et il peut arriver que les produits anti-phylloxeriques soient altérés et devenus inertes avant d'avoir pu agir efficacement. Aussi le procédé suivant, qui n'a point encore été mis en pratique, mais que je propose, pourrait-il donner des résultats rapides et très efficaces : il s'agirait simplement d'*injecter* dans le sol des dissolutions suffisamment actives, à l'aide d'une pompe foulante.

Le procédé de l'injection gazeuse, que l'on doit à M. Fournet, et qui a été décrit précédemment, serait le plus général que l'on pourrait employer; il serait applicable partout. Son action serait immédiate, et nul doute qu'il ne permette de détruire le phylloxera avec facilité et rapidité.

Vous avez vu comment l'oxyde de carbone a été foudroyant pour les mouches; il agirait de même sur le phylloxera.

A ce produit, on peut en substituer d'autres : des vapeurs entraînées par un courant d'air, comme celle du sulfure de carbone, et d'autres encore qui pourraient exercer une action néfaste sur l'insecte, sans nuire à la vigne, ainsi que cela a déjà été dit.

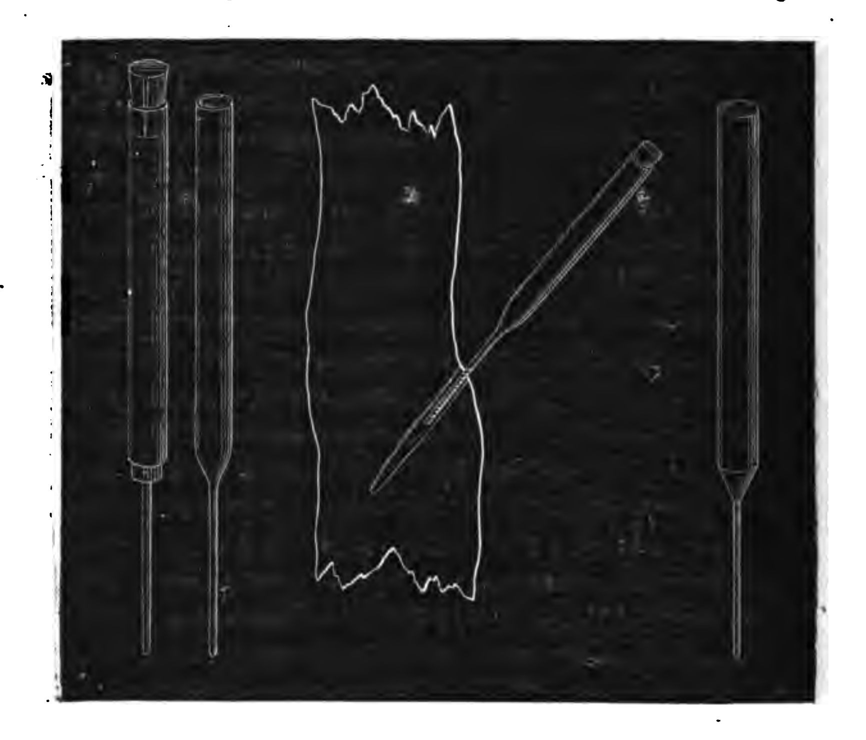
Ce sujet présente de très grandes difficultés, au point de vue de l'application; mais des expériences seront faites, et l'on ne peut douter qu'elles seront couronnées de succès. On aura ainsi un moyen général et dont l'efficacité sera certaine.

Le traitement interne a été proposé par M. Combe d'Alma.

Ce traitement consiste à percer des trous obliques de haut en bas dans l'intérieur des ceps de vigne; à introduire de l'essence de térébenthine dans les cavités pratiquées, et à les boucher, soit avec un bouchon de liége, soit avec de l'argile, ou de toute autre manière.

Ce procédé a été essayé à Bordeaux par la Commission départementale, et elle a obtenu des résultats qui ont paru satisfaisants [1].

Au lieu de percer des trous d'un grand diamètre dans des vignes



qui peuvent même ne pas le permettre, à cause de la petitesse de la tige, je propose d'y faire un trou de trois à quatre millimètres

[1] Des expériences que j'ai faites sur des vignes indemnes, depuis la séance du 17 juillet, m'ont démontré que la vigne souffrait d'une manière très appréciable sous l'influence de l'évaporation d'une très petite quantité d'essence de térébenthine contenue dans un flacon ouvert et introduite dans le sol.

de diamètre, et d'y fixer un petit vase cylindrique fonctionnant comme un entonnoir, qui permettrait d'y introduire autant d'essence que l'on voudrait, qui demeurerait en place et serait fermé facilement.

Ainsi qu'on l'a vu précédemment, la difficulté est de pénétrer jusqu'aux radicelles pour y atteindre le phylloxera. Le procédé de M. Combe d'Alma semble lever cette difficulté, puisque l'essence de térébenthine est contenue dans le végétal et paraît pouvoir les aller trouver directement. Il reste à savoir, en admettant l'excellence du procédé, si l'essence de térébenthine, qui n'est que peu ou point soluble dans la sève de la vigne, est la matière à laquelle on doive accorder la préférence, et si quelques agents, tels que : le cyanure potassique, le pyrolignite de fer, des sulfures solubles, la créosote, l'acide phénique, la naphtaline, le chloroforme, le chloral dissous par des agents convenables et fortement dilués par l'eau, une forte infusion de noix vomique, de tabac, etc., ne peuvent lui être substitués.

L'injection faite par M. Combe d'Alma, pénétrant dans le bois au delà de l'écorce, les parties de l'essence de térébenthine qui peuvent être entraînées doivent d'abord s'élever avec la sève ascendante jusque dans les feuilles plutôt que descendre vers les racines. Pour obtenir ce dernier résultat, il faudrait que le liquide fût injecté entre le bois et l'écorce; mais cela serait fort difficile à obtenir, et, encore, certaines théories, telle que celle de Dupetit Thouars, ne permettent pas d'admettre que cela puisse avoir lieu.

Des expériences spéciales sont indispensables pour juger cette question et je me propose de les entreprendre.

On a cru que le phylloxera tuait infailliblement la vigne. Cependant quelques viticulteurs ont donné des soins à des vignes qui paraissaient avoir succombé, et elles sont revenues à la vie, ainsi que cela est arrivé dans la propriété de M. Lagasse, pharmacien à Bordeaux.

Il ne faut donc pas trop désespérer; avec un peu de patience



nous croyons que l'on pourra détruire l'insecte et réparer les dommages qu'il aura causés.

La vigne ne pouvant reprendre sa vigueur primitive sans une perte de temps assez considérable et sans que l'on ne perde aussi une suite de récoltes, un moyen plus énergique a été proposé : c'est de l'arracher.

Examinons le traitement à ce point de vue; mais avant, il faut se rappeler que, quand la vigne se flétrit et paraît devoir bientôt succomber, il y a déjà longtemps qu'elle est atteinte par le phylloxera et qu'elle est, en outre, enveloppée d'une zone qui l'est aussi, mais qui ne présente aucun symptôme morbide.

Il convient de dépasser cette zone, dans laquelle le phylloxera peut d'ailleurs être reconnu par l'arrachement de la vigne et l'examen de ses racines où l'on rencontre l'animal, s'il y existe.

Au delà de la zone où la vigne n'a encore reçu aucune atteinte de l'animal, il convient de creuser un fossé d'au moins 80 centimètres de profondeur et d'une faible largeur, d'y introduire de l'eau chargée de produits anti-phylloxeriques solubles. S'il est impossible de se procurer de l'eau, il conviendra d'y introduire une poudre fortement odorante et contenant principalement de la naphtaline.

Après avoir circonscrit la zone, ainsi que cela vient d'être dit, les vignes paraissant fortement altérées seront arrachées. Le sol où elles existaient sera remué et mêlé avec des produits anti-phylloxeriques. Ici, la chaux vive peut être employée. Les vignes restantes seront traitées par l'un des procédés qui viennent d'être indiqués : poudres anti-phylloxeriques, injections aqueuses ou gazeuses.

On a proposé d'arracher toutes les vignes contenues dans la zone tracée; mais ce procédé dépasse les limites de ce qu'il faut faire. Il est éminemment probable que l'arrachage de la vigne peut être évité, à moins qu'il ne soit évident que ce végétal soit véritablement mort. Avec des injections aqueuses ou gazeuses, l'animal serait détruit. Il faudrait ensuite, et immédiatement après l'appli-

cation de ce traitement, employer des engrais pulvérulents, riches, efficaces, spéciaux pour la vigne, l'arrosement s'il était possible, et l'on rappellerait à la vie le précieux végétal dont nous nous occupons. Ne doutons ni de la science, ni de l'expérience; elles nous donneront les moyens de résister aux ravages exercés par le phylloxera.

Il importe d'ajouter encore quelques mots au traitement de la vigne.

On a proposé l'emploi d'un insecte destructeur du phylloxera, qui existe en Amérique, afin de l'opposer à cet animal. On a fait des efforts pour s'en procurer; mais ces efforts n'ont point réussi. Il faudrait d'ailleurs des quantités considérables de cet insecte, il faudrait aussi l'avoir à sa disposition pour en faire usage selon le besoin, d'où l'on peut conclure qu'il serait impossible de l'appliquer à des vignes atteintes par l'épiphytie et qu'il convient d'employer d'autres agents.

On a aussi signalé l'emploi de cultures nuisibles au phylloxera, que l'on pourrait introduire dans les règes de la vigne, ou dans les espaces libres existant entre les ceps, quel que soit le mode de plantation de ce végétal. Le *madia sativa*, plante visqueuse, a été indiqué; mais il est éminemment probable que le phylloxera ne se croirait pas obligé de la visiter et qu'elle ne produirait aucun effet utile. La belladone, plante très vénéneuse, à laquelle on pourrait joindre la jusquiame et le *datura stramonium*, ou la pomme épineuse, qui sont toutes trois de la même famille, a été proposée. On a aussi indiqué le tabac, qui appartient encore à la famille des solanées; mais l'État ne permettrait point que l'on en fît usage. On pourrait peut-être utiliser la *nicotiana rustica*, tabac à feuilles ovales, relativement petites, si on les compare à celles de l'espèce qui donne les tabacs usuels. Mais ce ne pourrait être qu'une culture préventive.

On a encore proposé de détourner l'insecte par des produits attractifs, et de le détruire par le feu lorsqu'il serait réuni en

grande quantité. Mais ce mode d'action ne pourrait être considéré comme un traitement applicable à des vignes malades.

Après avoir examiné les divers traitements relatifs à l'épiampélie actuelle, je crois devoir vous entretenir des vignes américaines, que l'on veut substituer à nos vignes françaises, parce que, dit-on, elles résistent au phylloxera.

Cette pensée soulève plusieurs questions que nous allons examiner successivement.

Presque tous les savants qui se sont occupés du phylloxera admettent qu'il est d'origine américaine, et qu'il a été importé sur des boutures de vignes venant de cette contrée. S'il en est ainsi, on ne fera qu'augmenter l'épiphytie par de nouvelles importations, et toutes les vignes d'origine française, même celles qui produisent les vins si renommés de la Bourgogne et du Bordelais, seront détruites et se trouveront remplacées par des vignes donnant des vins potables, cela est possible, mais n'ayant aucune qualité qui puisse les faire rechercher. Ce serait pour ces contrées une ruine réelle, et pour la France entière une perte irréparable s'élevant à des centaines de millions par an.

Il est vrai que l'on parle de greffer nos cépages sur des racines américaines; mais ces cépages conserveront-ils leurs caractères? Cela est douteux.

On a même proposé de greffer des racines américaines sur des ceps français. Cette méthode, qui paraît fort difficile à mettre en pratique d'une manière complète et satisfaisante, n'a pas encore reçu la sanction expérimentale qui pourrait permettre de l'adopter.

Jusqu'à présent rien n'a prouvé d'une manière certaine que les vignes américaines n'aient rien à redouter du phylloxera. C'est sur ces vignes qu'il existe, qu'il a été créé, et il les respecterait de manière à ne leur nuire en aucune manière! Cela est plus que douteux.

Chez nous, il recherche les radicelles de la plante, il s'y fixe, y

fait naître des nodosités qui les font périr, et rien de semblable n'aurait lieu en Amérique ! Il faut le répéter, cela est plus que douteux.

Il est vrai que les vignes américaines ne sont point identiques avec les nôtres, qu'elles en sont au moins des variétés, si elles ne sont des espèces différentes ; mais cela peut-il entraîner chez l'insecte un autre mode de nutrition ? Le suçoir que la nature lui a donné peut-il donc traverser la partie corticale de la racine pour trouver au delà des sucs nutritifs ? Cela est possible et a même été observé sur des vignes françaises ; mais peut-il préférer ce travail à la succion immédiate des radicelles ? Cela ne peut être admis.

Les jeunes vignes américaines ne doivent donc pas être plus indemnes que les nôtres.

Si le phylloxera respecte les radicelles de certaines espèces de vignes, cela est probablement dû à ce qu'elles sont situées à une grande profondeur dans le sol ; mais ces conditions ne peuvent se rencontrer que dans des circonstances exceptionnelles, ainsi que nous allons le voir.

On a beaucoup parlé du *scuppernung,* cépage américain, éminemment remarquable, et pouvant donner de bons résultats ; mais ce cépage prend des dimensions si considérables que sept à huit pieds suffisent pour couvrir un hectare.

Pour réaliser une telle culture, il faut au moins deux choses : un sol meuble et profond, et un grand nombre d'années.

Les terres de nos vignobles demeureraient donc improductives pendant un temps considérable, et les propriétaires y trouveraient une ruine certaine.

Si le phylloxera pénétrait dans le Médoc, il ne peut être douteux que le *scuppernung* ne pourrait y prendre les dimensions qu'il possède en Amérique, et le vin qu'il donnerait serait d'ailleurs d'une qualité très inférieure. Il faut donc renoncer à la culture de ce cépage, au moins dans le Médoc, où la vigne ne prend qu'un faible développement.

Il vaut beaucoup mieux ne pas s'effrayer, avoir confiance dans

la science et attendre quelque temps. Une épidémie, de telle nature qu'elle ait été, n'a jamais conservé une intensité considérable. Il en sera de même pour l'épiampélie actuelle; seulement nous avons acquis le phylloxera comme nous avons acquis l'oïdium, et il faut espérer que l'action dévastatrice qu'il a exercée ira en diminuant.

Avant de terminer, je crois devoir vous dire qu'il ne suffit point d'avoir étudié le phylloxera, son mode de propagation, les dommages qu'il cause à la vigne et le traitement qu'il convient d'appliquer à cette dernière; il faut que ce traitement soit mis en pratique partout, et le plus tôt possible, là où il convient de le faire. Pour cela, Messieurs, je crois devoir vous rappeler une partie des excellentes idées qui ont été publiées par M. Saint-Léon Boyer-Fonfrède.

Il est de toute nécessité que les viticulteurs s'entendent entre eux, qu'ils se réunissent au moins une fois par semaine dans un lieu central arrêté par eux. Aussitôt que le phylloxera aura été reconnu à une certaine distance d'un vignoble, il conviendra d'appliquer à ce dernier le traitement préventif. Les vignes atteintes par l'épiphytie devront *immédiatement* être soumises au traitement curatif, à celui qui agit avec le plus de rapidité : des produits solubles, vénéneux pour l'animal et ne pouvant nuire à la vigne, employés avec de l'eau; *car il faut de l'eau, sans elle ce mode de traitement est inutile.* Si l'on ne peut se procurer de l'eau, *il est indispensable d'employer l'injection aérienne.* injection qui peut être pratiquée partout et qui nous donne l'espoir qu'elle réussira.

La poudre anti-phylloxerique de M. Crébessac, qui contient des sulfures alcalins et de la naphtaline, *est tout à la fois préventive et curative.* Mêlée avec des produits pulvérulents et inertes, elle n'entraînerait qu'une faible dépense et mérite réellement d'être employée.

L'arrachement des vignes ne devra avoir lieu que lorqu'il sera reconnu que tous les traitements ont été insuffisants.

Après l'application d'un traitement quelconque, il sera indispensable d'employer des engrais pulvérulents utilisables par la vigne et nuisibles au phylloxera. Je reviendrai plus tard sur ce sujet.

Enfin, Messieurs, je terminerai en vous disant ces quelques mots :

Il convient de s'associer pour obtenir des renseignements généraux, utiles et rapides;

Il faut exercer une surveillance générale, et avoir une vigilance extrême;

Exercer partout une action immédiate;

Prévenir l'envahissement des vignes par le phylloxera sans la moindre hésitation;

Détruire cet animal partout où il se trouvera, mais respecter la vigne et profiter de toutes les notions acquises pour lui venir en aide : agents préservatifs et destructeurs du phylloxera; agents conservateurs de la vigne et pouvant même l'améliorer.

Je résumerai encore plus brièvement ce que je viens d'avoir l'honneur de vous dire :

Prévenir, détruire le phylloxera, autant qu'il sera possible de le faire;

Préserver, conserver, améliorer la vigne par tous les moyens dont on pourra disposer.

ÉTUDES RELATIVES AU PHYLLOXERA

EXPÉRIENCES

FAITES

SUR DES RAMEAUX DE VIGNE

IMMERGÉS DANS DE L'EAU

TENANT DIVERS PRODUITS EN DISSOLUTION

PAR A. BAUDRIMONT
Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Le phylloxera continuant à exercer ses ravages, il importe de chercher avec soin les moyens et les agents dont on peut faire usage pour le combattre. Déjà bien des produits et des mélanges ont été proposés et même essayés; mais, avant tout, il convient de savoir si les produits quels qu'ils soient ne sont point nuisibles à la vigne. Avant d'opérer sur des vignes phylloxerées, il paraît rationnel de le faire sur des vignes saines et de voir les effets qu'elles éprouvent lorsqu'on les met en présence de divers agents.

J'ai entrepris des expériences de cet ordre; mais elles demandent un temps assez considérable pour que l'on puisse être certain du résultat obtenu. Afin d'éviter cette lenteur expérimentale, j'ai pensé à mettre simplement des rameaux de vigne en présence de produits dissous dans l'eau, et même, afin d'obtenir des résultats aussi généraux que possible, j'ai pensé qu'il conviendrait d'essayer

l'action de produits qui ne seront jamais employés comme antiphylloxeriques, au moins sur une grande échelle, soit parce que l'on ne pourrait se les procurer qu'en quantité trop minime, soit parce qu'ils seraient d'un prix trop élevé, soit enfin parce qu'ils seraient dangereux pour ceux qui en feraient usage.

On pourra objecter au présent travail qu'un rameau de vigne, qui doit spontanément cesser d'exister dans un bref délai, et qui est privé de radicelles, ne peut être comparé à un cep plein de vie et planté dans le sol. Cependant, tous les produits solubles dans l'eau étant absorbés par les végétaux lorsqu'ils n'en détruisent pas les tissus, ou lorsqu'ils n'en obstruent point les vaisseaux, les renseignements obtenus par le mode d'expérimentation adopté peuvent donc être d'une certaine utilité; n'eussent-ils d'ailleurs qu'un caractère purement scientifique, ils ne manqueraient pas d'intérêt puisqu'ils sont l'origine d'une science nouvelle : celle qui étend jusqu'aux végétaux les actions pharmaceutiques ou vénéneuses.

Il y a environ dix ans que j'ai fait des expériences de cet ordre, et même sur des rameaux de vigne. Malheureusement, les résultats obtenus ont été consignés sur des feuilles volantes qui se trouvent égarées; mais je me rappelle qu'elles ont donné des résultats absolument inattendus, et l'on verra qu'il en est de même des expériences nouvelles.

Que l'on compare l'action de l'eau potable, ordinaire, avec celle de l'eau distillée; que l'on examine celle exercée par le bichlorure de mercure, l'acétate de plomb, le chromate et le bichromate de potasse, et l'on verra que l'étude qui est l'objet du présent travail, offre un véritable intérêt.

Les expériences ont été faites sur plus de soixante produits différents, et elles l'eussent été sur un plus grand nombre si je n'avais été obligé de m'absenter.

Les produits employés dans cette première série d'expériences comprenaient des acides, des composés salins et des matières organiques. En voici l'énumération :

Acides sulfurique, azotique, chlorhydrique, sulfureux, arsénieux,

oxalique et tartrique, auquel il convient d'ajouter le tartrate hydropotassique.

Composés salins, tels que chlorure calcique, bichlorure et cyanure mercuriques, carbonates et bicarbonates potassique et sodique, acétate calcique, azotate potassique, cyanure potassique simple, cyanoferrures jaune et rouge de potassium, chromate et bichromate potassiques, hypermanganate potassique, sulfate et acétate de cuivre; sulfates de zinc, de fer; arséniate potassique, deux polysulfures calciques, l'ammoniaque, le sulfure ammonhydrique, le sulfate et l'oxalate ammoniques, l'acétate de plomb.

Parmi les substances organiques, il a été employé de l'extrait de tabac, de l'opium, du chlorhydrate de morphine, une infusion de noix vomique, de l'azotate de strychnine, et enfin trois espèces de savons.

Les liquides étaient placés dans des flacons d'un demi-litre de capacité. Les rameaux y étaient introduits après avoir été coupés de nouveau et obliquèment, afin que les vaisseaux ne pussent être obstrués trop facilement par la condensation de la sève.

Les produits solides, dissous dans l'eau, en ont été, autant que possible, le vingt-cinquième en poids.

En employant cette quantité de matière, j'ai cru me placer dans les conditions qui puissent se présenter dans le traitement des vignes phylloxerées. Lorsque l'on emploiera des produits solubles placés dans une cavité creusée au pied de ce végétal, il pourra arriver que des dissolutions concentrées pénétreront jusqu'à ses radicelles. Alors, leur action dépassera de beaucoup celles déterminées par des dissolutions ne contenant que quatre centièmes du poids de l'eau représenté par des produits actifs.

Pour éclaircir ce sujet, et surtout pour rester dans les limites de produits qui seraient employés comme engrais, des expériences du même ordre ont été entreprises avec de l'eau distillée ne contenant qu'un millième de son poids de produit étranger, soit 1 gramme par litre. Je puis le dire dès à présent, même avec cette faible dose, des effets évidents et très remarquables ont été produits, même en vingt-quatre heures.

Je publierai très prochainement les résultats de ces dernières expériences, ainsi que celles qui ont été faites sur des vignes indemnes, en pleine végétation.

Une partie des produits a été dissoute dans de l'eau ordinaire, afin de ne pas trop s'éloigner de ce qui se passe dans la nature; l'autre l'a été dans l'eau distillée.

Un flacon contenant de l'eau distillée et un autre flacon contenant de l'eau ordinaire servaient de termes de comparaison.

Les rameaux étaient observés tous les jours, et les effets produits étaient inscrits.

J'ajouterai enfin qu'une partie de ces expériences a été commencée le 31 juillet, à huit heures et demie du soir, et que l'autre a été entreprise le 3 août, à quatre heures de l'après-midi, et que d'autres l'ont été le 11 septembre, car, si on les répétait, la vigne pourrait se présenter dans des conditions différentes selon l'époque où l'on expérimenterait sur elle.

PREMIÈRE PARTIE

Expériences faites sur des produits à dose élevée.

Après trois jours, le rameau plongé dans l'*eau ordinaire* avait ses feuilles supérieures fanées. Huit jours après, celui plongé dans l'*eau distillée* avait conservé toute sa fraîcheur. Les feuilles n'ont commencé à jaunir que le 12 août, et finalement il était mort le 15 du même mois.

Les *acides sulfurique, azotique* et *chlorhydrique* étendus avec un poids d'eau cinquante fois plus grand que le leur, ont en trois jours complètement flétri la vigne.

L'*acide sulfureux* en dissolution aqueuse, qui était loin d'être saturée, a agi rapidement. Dès le lendemain, les nervures des feuilles avaient jauni; le surlendemain, les feuilles étaient complètement flétries, leurs nervures étaient devenues translucides. La partie de la tige qui était plongée dans le liquide avait blanchi

du côté d'où venait la lumière et était jaune du côté opposé. Le troisième jour, le rameau était complètement flétri et ne présentait aucune apparence de vie.

En présence d'une dissolution d'*acide oxalique,* la vigne a jauni et s'est fanée. Elle était d'un vert jaunâtre et complètement flétrie en trois jours.

L'*acide tartrique* n'a rien donné de mieux. Les feuilles inférieures du rameau étaient fanées dès le lendemain. Après trois jours, elles étaient flétries et à demi sèches.

Sous l'influence du *tartrate hydropotassique* (tartrate, acide de potasse ou crème de tartre), les feuilles se sont fanées principalement en bas et en haut; la partie moyenne a mieux résisté.

Les acides quels qu'ils soient, ou les corps simplement acides au point de vue de leur saveur et de leur action sur la teinture de tournesol, exercent une action fâcheuse sur la vigne et la font faner avec une certaine rapidité. D'une autre part, s'ils étaient introduits dans le sol, ils y rencontreraient des carbonates calcaires, en si faible quantité qu'il soit, qui les satureraient et les rendraient inertes; il n'y a donc point lieu d'en faire usage pour combattre l'épiphytie actuelle.

Les *carbonates* et les *bicarbonates potassique* et *sodique* ont aussi été essayés.

Sous l'influence du *carbonate potassique,* le rameau a commencé par se flétrir à ses deux extrémités; la partie moyenne s'est assez bien conservée pendant trois jours.

Carbonate hydropotassique ou *bicarbonate de potasse.* Rameau fané. Feuilles jaunâtres, se desséchant à l'extrémité supérieure. Complètement fané et même flétri en trois jours. Grillé le cinquième et complètement mort le sixième.

Carbonate sodique. Après le premier jour, le rameau est bien conservé; la couleur des feuilles est foncée; elles sont fanées et flétries dès le deuxième jour. Le troisième, le vert est plus foncé encore, mais les feuilles sont recoquevillées. Le quatrième, elles sont flétries. Le cinquième, elles paraissent grillées. Le sixième, le rameau est complètement mort.

Carbonate hydrosodique ou *bicarbonate de soude*. Après vingt-quatre heures, le rameau est en très bon état. Le deuxième jour, les feuilles sont bien conservées, quant à leur épanouissement; mais elles ont pâli et leurs nervures noircissent. Le troisième jour, elles sont d'un vert jaunâtre peu foncé, bien étendues et tachées de noir de chaque côté des principales nervures. Le quatrième jour, elles sont flétries. Le cinquième, les taches des nervures sont très évidentes, et elles vont en augmentant. Le huitième, les feuilles paraissent grillées, le rameau est desséché et mort.

Le *chlorure* et l'*acétate calciques* ont aussi été essayés. Sous l'influence du premier de ces agents, les feuilles se sont fanées en vingt-quatre heures et présentaient un commencement de flétrissure. Le lendemain, elles étaient flétries et comme grillées. Le surlendemain, elles étaient couvertes de taches jaunes. Et le sixième jour, le rameau ne donnait plus aucun signe de vie.

L'*acétate calcique* a fait faner rapidement les feuilles du rameau; elles se sont flétries et paraissaient même desséchées le troisième jour.

Les sels calcaires solubles, même en quantité peu considérable, mais lorsqu'elle dépasse celle que les végétaux puisent naturellement dans le sol, peuvent donc être nuisibles à la vigne.

Sous l'influence de l'*azotate potassique* dont l'eau contenait quatre centièmes de son poids, la vigne s'est rapidement flétrie. Les feuilles sont restées très adhérentes au rameau.

L'*ammoniaque* libre, étendue de vingt-cinq fois son volume d'eau, a présenté des phénomènes singuliers. La tige du rameau est devenue peu à peu noire en allant de bas en haut. Les feuilles adhérant à la partie noire étaient fortement flétries; celles adhérant à la partie verte ne l'étaient qu'à demi; seulement, les unes et les autres pouvaient être arrachées sous l'influence d'un faible effort.

Le *sulfure ammonhydrique (hydrosulfate d'ammoniaque* obtenu en faisant passer un courant d'hydrogène sulfuré dans de l'ammoniaque jusqu'à refus) agit en apparence comme l'ammoniaque.

La tige du rameau noircit, mais moins rapidement que sous l'influence de cette dernière. Les feuilles sont fanées; mais non flétries à la partie supérieure.

Sous l'influence d'une faible dissolution de sulfure hydrique (environ un demi-volume de gaz pour un volume d'eau, mais renouvelé chaque jour), la vigne s'est flétrie rapidement. Les feuilles à la fin de l'expérience pouvaient être arrachées avec une certaine facilité; mais moins facilement cependant que celles des rameaux ayant été soumis à l'influence de l'ammoniaque.

Deux *polysulfures calciques* ont été essayés : l'un obtenu par voie humide; l'autre en chauffant du soufre fondu en présence de la chaux hydratée. Ces deux produits ont donné des résultats essentiellement distincts. Sous l'influence du premier, les feuilles étaient couvertes de taches dès le lendemain. Le surlendemain, la vigne était fortement altérée et présentait de larges taches, les unes blanches et les autres foncées. Enfin, le troisième jour, le végétal était très flétri et l'on peut dire mort. Sous l'influence du sulfure obtenu par voie sèche, le lendemain, les rameaux étaient très beaux et mieux conservés que ceux plongés dans l'eau. Le deuxième jour, ils présentaient une apparence magnifique. Le troisième jour ils étaient bien conservés et les feuilles étaient d'un beau vert. Le sixième jour, le rameau était bien conservé. Ce n'est que le septième que deux feuilles ont commencé à jaunir. Le huitième jour, il a commencé à se faner, et, le neuvième, il était fortement flétri.

Dans ces deux expériences, les éléments étaient les mêmes; mais on est forcé de reconnaître qu'ils ne devaient point être unis de la même manière, puisque les effets produits ont été essentiellement différents.

On verra par la suite que le sulfure calcique obtenu par voie sèche a exercé une action du même ordre sur la vigne sur pied, comme on le dit généralement.

Il en a été de même du produit anti-phylloxerique de M. Crébessac, dont une des bases est le sulfure dont il est ici question.

Cette poudre mise en présence de vingt fois son poids d'eau a

donné de bons résultats. Ce n'est que le cinquième jour que les feuilles ont commencé à se flétrir. Le sixième jour, elles paraissaient un peu grillées. Le septième, elles tombaient et le rameau était complètement mort.

Le *sulfate ammonique* a paru exercer une influence quelque peu favorable. Le lendemain de l'immersion, le rameau était bien conservé et présentait une belle couleur verte. Le surlendemain, de faibles taches commençaient à paraître sur les feuilles. Ce n'est que le troisième jour que celles-ci ont pâli aux environs des nervures. Le quatrième, elles ont commencé à se flétrir, et le cinquième, elles étaient grillées et mortes.

L'*oxalate ammonique,* qui ne renferme cependant que des éléments utilisables par la végétation, s'est comporté d'une tout autre manière. Après vingt-quatre heures, les feuilles étaient fanées et commençaient à se dessécher. Le lendemain, elles étaient fanées, flétries et d'un vert jaunâtre. Le troisième jour enfin, elles étaient fortement crispées, desséchées et d'un vert gris sombre.

Le *cyanure de potassium* dissous dans l'eau distillée a été essayé. Après vingt-quatre heures, le rameau paraissait assez bien conservé; cependant il présentait un commencement d'altération à sa partie inférieure. Le deuxième jour, il était fortement altéré; les tiges avaient noirci; les nervures des feuilles avaient aussi pris la même couleur. Le troisième jour, la tige et les nervures des feuilles étaient entièrement noires et toutes les feuilles étaient flétries. Le liquide était devenu jaune sale et il y en avait eu environ 3 centimètres et demi de hauteur d'absorbé.

Le cyanure de potassium est donc un agent aussi vénéneux pour les végétaux que pour les animaux.

Les *cyano* et *cyani-ferrures potassiques* ont été essayés.

Le *cyanoferrure jaune* a paru exercer une influence favorable à la végétation. Le lendemain de l'immersion, le rameau était vigoureux; les feuilles belles et très colorées. Le deuxième et le troisième jour, il avait conservé une belle apparence; les feuilles étaient très fanées, mais elles étaient tachées auprès des nervures.

Le quatrième jour, les feuilles étaient flétries. Le cinquième jour, elles paraissaient grillées et le rameau était évidemment mort. Une quantité considérable de liquide avait été absorbée.

Le *cyanoferrure rouge* a produit des effets encore plus satisfaisants que le précédent (au moins en apparence). Le troisième jour, les feuilles étaient très étalées et foncées en couleur; mais elles commençaient à se tacher en jaune. L'intensité et le nombre des taches a été en augmentant. Le septième jour, les feuilles étaient flétries. Le huitième, elles paraissaient grillées. Le neuvième jour, le rameau était mort. L'absorption du liquide a été très notable, mais dans les derniers jours seulement. Toutefois, il n'a pas été absorbé en quantité aussi considérable que dans l'expérience précédente.

Le *chromate* et le *bichromate potassiques* ont aussi été l'objet d'expériences spéciales.

Sous l'influence du *chromate potassique simple*, le rameau de la vigne paraissait altéré dès le lendemain. Après quarante-huit heures, la tige était d'un brun presque noir. Cette couleur s'étendait aux pétioles et même aux nervures des feuilles. Le troisième jour, le parenchyme des feuilles était d'un vert très foncé. L'absorption du liquide a été très faible.

Le *bichromate potassique* s'est comporté sensiblement comme le chromate simple. Les nervures étaient d'un noir bleuâtre très foncé. Le parenchyme foliacé situé près des nervures avait pris la même couleur qu'elles, et les feuilles du haut de la tige étaient étries.

Sous l'influence du *permanganate potassique,* les feuilles étaient fanées dès le lendemain ; vingt-quatre heures après elles commençaient à se dessécher; et le troisième jour elles étaient flétries et même en partie altérées. L'absorption du liquide avait été faible.

Deux *sels de cuivre :* le *sulfate* et l'*acétate,* ont aussi servi pour faire des expériences.

J'ai démontré, dans la leçon que j'ai faite le 17 juillet dernier (1874), que le sulfate de cuivre se décomposait en présence de l'eau chargée de bicarbonate calcaire, et qu'il ne pouvait être

employé avec succès pour détruire le phylloxera. J'ai cru cependant devoir l'essayer sur des rameaux de vigne.

Le *sulfate cuprique* a d'abord été dissous dans l'eau ordinaire. Elle en contenait 4 centièmes de son poids. Le lendemain, les rameaux paraissaient être les mieux conservés de tous; mais les feuilles étaient infléchies. La liqueur était en partie décolorée et il s'était formé un dépôt d'un blanc bleuâtre. Le surlendemain, le rameau paraissait encore assez bien conservé et il était moins flétri que celui plongé dans une dissolution de sulfate de fer.

Une deuxième expérience a été faite en employant de l'eau distillée au lieu d'eau ordinaire. Le rameau de vigne a d'abord paru s'y conserver; mais il s'est flétri dès le troisième jour.

Sous l'influence de l'*acétate de cuivre,* le rameau de vigne s'est flétri promptement. La liqueur s'est troublée et opacifiée dans le bas du flacon. Elle allait en s'éclaircissant de bas en haut.

Le *sulfate de zinc* a paru produire un assez bon effet. Après vingt-quatre heures seulement, la feuille inférieure était crispée, puis elles se sont toutes crispées ensuite.

Le *sulfate de fer* a exercé une influence funeste. Les feuilles se sont rapidement flétries. Après quarante-huit heures, elles étaient même desséchées à l'extrémité supérieure. On observait un dépôt jaune, ocracé, dans le flacon. D'où l'on peut conclure qu'il y avait eu quelque réaction chimique entre le suc de la plante et le sel employé. Il est aussi probable qu'il s'est formé quelque produit qui a gagné successivement les feuilles de la plante et les a fait périr.

Sous l'influence de l'*acétate de plomb* dissous dans l'eau ordinaire, la plante a paru s'améliorer. Le lendemain, les feuilles étaient très belles, étalées, et d'un vert vif. Il s'était formé un dépôt blanc dans le flacon. Le surlendemain, les feuilles inférieures étaient flétries, tandis que les supérieures paraissaient bien conservées et ne se détachaient point par l'attouchement.

Sous l'influence du même sel dissous dans l'eau distillée, la plante a paru bien conservée. Après vingt-quatre heures seulement, deux feuilles étaient altérées. Le lendemain, l'état était à peu près

le même. L'eau du flacon avait baissé de deux centimètres, ce qui prouve qu'il y avait eu absorption. Le troisième jour, les feuilles du bas étaient flétries et celles d'en haut étaient tachées près des nervures principales. Le lendemain, elles étaient mortes.

Les rameaux mis en présence de l'*acide arsénieux* ont paru d'abord bien conservés et la couleur des feuilles était devenue plus foncée; mais après quarante-huit heures ils étaient fanés. Le troisième jour, la plante était complètement perdue. La quantité de liquide absorbé était assez considérable.

L'*arséniate de potasse* a exercé une action plus rapide encore. Après quarante-huit heures, le rameau était complètement fané, flétri et même desséché. La partie supérieure des feuilles du haut du rameau paraissait couverte d'une poudre blanche.

L'arsenic sous ses deux formes principales serait donc dangereux pour la vigne, et il convient par conséquent de n'en point faire usage pour détruire le phylloxera, et cela d'autant plus qu'étant absorbé il pourrait pénétrer dans le raisin, s'y fixer et devenir dangereux pour l'espèce humaine.

Le *bichlorure de mercure* a été essayé en dissolution dans l'eau ordinaire, d'une part, et dans l'eau distillée, d'autre part.

En présence de la première dissolution, les feuilles ont paru se bien conserver; elles étaient fortement étalées et plus foncées en couleur que la plupart de celles des autres rameaux de vignes, soumis au même genre d'expériences. Cependant la tige commençait à se couvrir de taches brunes dans sa partie inférieure. Après vingt-quatre heures, il y avait eu une grande absorption de liquide, d'où l'on peut conclure que l'agent employé avait pu pénétrer jusque dans les feuilles. Le surlendemain, une partie des feuilles paraissait encore bien conservée; *mais leur pétiole se détachait de la tige par le moindre attouchement, et les nœuds de la tige se désarticulaient même avec une extrême facilité.*

Un dépôt blanc s'était formé à la partie inférieure du liquide.

Le *bichlorure de mercure* dissous dans l'eau distillée s'est comporté comme le précédent. Le troisième jour, les feuilles de la partie inférieure étaient fanées et commençaient à se détacher de

la tige par un simple attouchement. Le cinquième jour, le rameau n'avait plus l'apparence de la vie. L'absorption du liquide avait été plus faible que dans l'expérience précédente.

Le *cyanure de mercure* dissous dans l'eau distillée n'a point agi comme le bichlorure de mercure. Les feuilles étaient flétries après vingt-quatre heures et ne se détachaient point de la tige du rameau après deux jours.

Comme on vient de le voir, le bichlorure de mercure, qui paraissait exercer une action favorable à la vigne, a été un agent funeste. Il l'avait probablement fait périr en peu de temps, et il n'agissait alors que comme un agent conservateur.

La désarticulation des pétioles et des rameaux mérite une attention toute spéciale; car quelle peut être la cause de cette action singulière ?

Des produits vénéneux d'origine organique ont aussi été employés : le tabac, l'opium, la noix vomique, ainsi que des sels de morphine et de strychnine.

Un extrait de tabac, très concentré, dont nous avions pu tirer une quantité assez considérable de *nicotine*, a été essayé. Après l'avoir délayé dans l'eau, un rameau de vigne a été plongé dans le liquide ainsi obtenu. Le lendemain, le rameau était fortement fané et les feuilles inférieures avaient jauni. Le surlendemain, les feuilles paraissaient desséchées et plus jaunes encore. Le troisième jour, il était complètement fané et même desséché.

Le tabac est donc vénéneux pour les végétaux comme pour l'espèce humaine. Si on l'employait pour détruire le phylloxera, il faudrait que ce fût à faible dose..... Mais alors réussirait-il ?

L'*opium* a produit un effet beaucoup moins grave. De l'extrait d'opium dissous dans l'eau n'a fait que donner à la plante une apparence de sommeil. Elle était un peu fanée; mais les feuilles avaient conservé leur verdeur; seulement leur pétiole s'étant infléchi, elles s'étaient inclinées. Le quatrième jour, les feuilles étaient flétries. Le cinquième, le sommet du rameau paraissait grillé. Le sixième, il était mort.

Sous l'influence du *chlorhydrate de morphine*, le rameau s'est

parfaitement conservé pendant cinq jours, au moins en apparence. Le sixième jour, les feuilles ont commencé à se flétrir. Le neuvième, le rameau était mort.

Une forte infusion de *noix vomique* a été nuisible à la vigne. Le lendemain, le rameau était fané. Le surlendemain, les feuilles de l'extrémité libre paraissaient desséchées. Le troisième jour, les feuilles étaient fanées dans la partie inférieure du rameau et desséchées à sa partie supérieure.

Sous l'influence de l'*azotate strychnique*, le rameau qui était plongé dans sa dissolution a conservé la plus belle apparence pendant trois jours. Le quatrième, les feuilles ont commencé à se flétrir; plus tard, les feuilles se sont inclinées tout en conservant leur couleur verte.

Que faut-il donc penser d'une action de cet ordre? La strychnine, qui est un agent si funeste pour les animaux, est-elle donc favorable aux végétaux?

Il importe de faire de nouvelles expériences, et notamment sur des végétaux complets avant d'oser se prononcer sur un tel sujet.

Trois espèces de *savons* ont aussi été essayés : le savon blanc de Marseille; le savon mou du nord de la France, et un savon dit noir, qui est solide et contient probablement de la résine. Ces savons ont été délayés dans l'eau. Tous trois ont donné le même résultat : en vingt-quatre heures les rameaux étaient fortement fanés; en quarante-huit heures, ils étaient flétris et morts sans aucun doute.

Il est possible que les savons, décomposés en pénétrant dans le végétal, en aient obstrué les vaisseaux et que l'absorption de l'eau ne pouvant plus avoir lieu, le dépérissement rapide des rameaux en ait été la conséquence. Le même effet pouvant se produire sur les radicelles des plantes, on devra repousser l'emploi du savon pour détruire le phylloxera. Des expériences sont faites en ce moment sur des vignes entières, et l'on saura bientôt à quoi s'en tenir sur ce sujet.

Je crois devoir ajouter que le savon délayé dans l'eau fait périr rapidement les insectes qui y sont immergés, et qu'il pourrait y

avoir intérêt à en faire usage si, à dose convenable, il n'exerçait point une action trop défavorable sur la vigne.

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Il résulte des expériences consignées dans ce travail, que presque toutes les substances qui sont vénéneuses pour les animaux exercent aussi une action délétère sur la vigne.

Il en a été de même pour des substances qui ont d'abord paru leur être favorables, telles que l'acétate de plomb, le sulfate de cuivre et le bichlorure de mercure, auxquels on peut joindre les cyanoferrures potassiques jaune et rouge.

Les acides, l'ammoniaque, le sulfure ammonhydrique, l'arsenic dans deux états de combinaisons (acide arsénieux et arséniate de potasse); les carbonates et les bicarbonates alcalins, l'azotate potassique, le sulfate zincique, le sulfate ferreux et même les sels calcaires, ont tous été nuisibles à la vigne. Toutefois, il ne faut point perdre de vue la dose élevée à laquelle ces produits ont été employés.

Il en a été de même du tabac et de la noix vomique qui contiennent des poisons d'origine organique.

Il n'y a que le sulfate d'ammoniaque et le sulfure calcique soluble, obtenu par la voie sèche, qui n'aient point exercé une action défavorable sur la vigne.

En dehors de ces produits, il y a encore le chlorhydrate de morphine et l'azotate de strychnine qui ont paru exercer une action favorable sur le végétal; mais il est probable que cette action n'était qu'apparente. Le prix de ces substances est d'ailleurs trop élevé pour que l'on puisse les employer comme anti-phylloxériques. Il pourrait d'ailleurs y avoir du danger à le faire, parce que si ces produits venaient se concentrer dans le raisin, ils pourraient finalement réagir d'une manière fâcheuse sur ceux qui seraient appelés, soit à le consommer directement, soit à boire le vin qui en proviendrait.

Il résulte enfin de cette première partie des expériences entre-

prises sur des rameaux de vigne, qu'une foule de produits qui ont été proposés pour combattre l'épiampélie phylloxerique, doivent être rejetés comme étant essentiellement nuisibles à la vigne; cependant, à une dose plus faible, il est de ces produits qui pourraient au contraire donner des résultats avantageux, ainsi que cela sera ultérieurement démontré. Dans tous les cas, il conviendra d'admettre que le premier principe des traitements à adopter doit être de détruire le phylloxera et de conserver la vigne; même de l'améliorer s'il se peut. Résultat que mes expériences me permettent de regarder comme pouvant être atteint.

DEUXIÈME PARTIE.

Ainsi que cela a été dit dans la première partie de ce travail, les liqueurs dans lesquelles ont été plongés les rameaux ne contenaient, en général, qu'un millième du produit qui devait être essayé, contre mille parties d'eau; c'est au moins ce qui a été fait pour les substances salines. Les liquides et les matières organiques ont été dosés dans des proportions spéciales qui seront indiquées pour chacune d'elles.

Les substances employées sont au nombre de vingt-six; en voici l'énumération :

SUBSTANCES SALINES, ETC.

Chlorure ammonique; chlorure, bromure et iodure potassiques; chlorure sodique, cyanure hydrique; azotates ammonique, potassique, sodique et argentique; sulfates magnésique et calcique; phosphate hydrobisodique, carbonate hydrammonique, oxalate ammonique, pyrolignite de fer, foie de soufre, polysulfure calcique.

MATIÈRES D'ORIGINE ORGANIQUE.

Alcool, eau-de-vie camphrée, acide phénique, créosote, essence de térébenthine, chloroforme, chloral hydraté, naphtaline.

Dans ces expériences, comme dans les précédentes, de l'eau distillée et de l'eau ordinaire ont été employées pour servir de termes de comparaison. Généralement, les vases renfermaient deux ou un plus grand nombre de rameaux. J'ai pu voir qu'à l'époque avancée, relativement à la végétation, où les expériences ont été faites, les rameaux diffèrent beaucoup les uns des autres : il en est de jeunes, pleins de vie, qui offrent une résistance considérable, et il en est d'autres, au contraire, qui se flétrissent rapidement dans les conditions où ils pourraient être conservés. En général, les premiers ont les feuilles d'un vert tendre, et les derniers les ont d'un vert foncé; teinte qui annonce leur décrépitude et la fin prochaine de leur existence. Ce sont les premiers seulement qui ont été observés avec soin, et qui ont donné des résultats qui ont été enregistrés.

SUBSTANCES SALINES, ETC.

Eau distillée. — Des rameaux de vigne ont été plongés dans plusieurs flacons contenant de l'eau distillée. En général, ils s'y sont bien conservés. Des expériences ont été commencées le 11 et le 20 septembre. Le 16 seulement les feuilles inférieures ont commencé à se plier et à se faner quelque peu; le 17, les feuilles du bas sont un peu plus fanées que celles du haut. Les feuilles moyennes sont simplement déformées par plissement. Quelques-unes sont tachées en noir. Deux se désarticulent par la flexion. Le 18 et le 19, quelques feuilles tombent. Le 20, les feuilles sont fanées dans toute la longueur du rameau; plusieurs tombent. On y remarque des taches brunes et d'autres qui sont vert clair.

Eau ordinaire. — Le 15 septembre, la partie inférieure des rameaux a bruni. Le 16, les feuilles inférieures commencent à se plier et à se faner. Le 17, feuilles un peu plus fanées que la veille, surtout dans la partie inférieure. Le 18, elles sont aussi fanées en haut et flétries partout. Plusieurs se détachent. 19 et 20, les feuilles continuent à se détacher dans toute la partie supérieure. La séparation a lieu principalement entre le lymbe et le pétiole.

Chlorure potassique. — Ce composé s'est comporté d'une manière exceptionnelle. Les feuilles des rameaux de vigne y sont demeurées étalées, d'un beau vert, et comme si elles étaient couvertes d'un verni brillant. Le 19, on remarquait que le liquide avait été absorbé en quantité considérable. Le 20, on en ajoute de nouveau contenant 1 partie de chlorure potassique pour 1,000 d'eau. Le 21, une petite feuille de l'extrémité supérieure a commencé à se faner. Le 25, le rameau est toujours beau, mais ses feuilles commencent à tomber. Le 28, toutes les feuilles sont tombées, excepté les trois supérieures, situées au-dessous de la fanée, qui sont encore belles.

Bromure potassique. — Les feuilles paraissent assez belles, mais moins que celles du rameau plongé dans la dissolution de chlorure potassique. Le 14, les feuilles sont larges, bien étalées, d'un vert foncé; mais les feuilles de l'extrémité libre commencent à jaunir. Le 15, le rameau est assez bien conservé; mais les feuilles de son extrémité libre brunissent et se flétrissent. Le 16, les feuilles inférieures commencent à se faner. Le 18, les feuilles du bas sont un peu fanées. Le 19, feuilles desséchées, excepté quelques feuilles encore vertes vers le haut. Le 20, fanées et desséchées en haut et en bas, quelques feuilles moyennes conservées; chute par la pression. Le 21, l'état s'aggrave. Le 22, feuilles sèches et tombant; quelques-unes vers la partie supérieure, mais non à l'extrémité, simplement fanées. 23, mort.

Iodure potassique. — Le lendemain, le sommet est flétri.

Le 14, le rameau paraît assez bien conservé; seulement, quelques feuilles, surtout celles de la partie supérieure, sont plissées. Le 15, chute des feuilles, même de celles qui ne portent aucune tache de flétrissure. Grande absorption de liquide. Le 16, il ne reste plus que trois feuilles dans le bas et qui sont adhérentes; mort.

Chlorure sodique. — Le lendemain, les feuilles sont inclinées; les supérieures sont flétries. Le surlendemain, 13, les feuilles inférieures commencent à se dessécher. Le 14, les feuilles sont très fanées à l'extrémité libre. Les cirrhes sont sèches. Sur le rameau, à chaque nœud, il y a une grande et une petite feuille. Ces dernières sont très fanées; les grandes le sont peu. Le 15, les feuilles inférieures et supérieures sont fanées et sèches; les moyennes sont inclinées, mais assez belles. Absorption sensible du liquide. Le 16, les feuilles paraissent un peu plus fanées. Le 17, les feuilles du bas du rameau sont desséchées; le haut est flétri et même sec. Le 18, les feuilles moyennes paraissent encore assez bien conservées; il en est de même le 20. Le lymbe des feuilles se détache du pétiole. Le 21, quatre feuilles de celles qui restaient en assez bon état commencent à se faner. Le 22, sur cinq feuilles qui restaient, deux tombent au simple contact de la main. Il n'en reste que trois qui paraissent conservées; le reste est fané, flétri ou tombé. 23, comme le 22. Le 28, il reste des feuilles vertes et adhérentes. Il y a eu une absorption considérable de liquide.

Cyanure hydrique. — Ce produit, qui est un poison violent pour les animaux, a aussi été funeste à la vigne. Le 12 septembre, soit le lendemain du jour de l'immersion d'un rameau de vigne dans 200 grammes d'eau distillée contenant 1 centimètre cube de ce liquide, les feuilles étaient inclinées, comme si leur pétiole n'avait pas la force de les porter; le sommet du rameau s'était infléchi. Le 13, les feuilles du sommet et de la partie inférieure du rameau étaient très flétries et commençaient même à se dessécher. Celles de la partie moyenne étaient un peu mieux

conservées et d'un beau vert foncé. Le 14, comme la veille; mais un peu plus avancé. Les feuilles moyennes étaient d'un vert foncé et luisant. 15, très foncées, sèches en bas et en haut; les feuilles moyennes paraissent encore fraîches. Le 16, très foncées, quatre feuilles moyennes à demi conservées. Le lendemain, 17, il ne reste plus que trois feuilles non fanées. Le 18, il n'y en a plus qu'une; elles sont toutes adhérentes. Le 19, le rameau ne présente plus aucun signe de vie.

Azotate ammonique. — Un très long rameau de vigne a été plongé dans la dissolution de ce produit. Le lendemain, le sommet était flétri dans la moitié de la longueur totale du rameau. Le surlendemain, 13 septembre, cette partie supérieure était flétrie, et les feuilles, en général, paraissaient recouvertes d'une pellicule blanchâtre. Le 14, les pétioles sont inclinés, les feuilles sont fanées dans toute la longueur du rameau, excepté les quatre premières. Le 15, l'apparence générale est la même. Le 16, trois feuilles inférieures paraissent à peu près conservées; l'une d'elles a jauni. Tout le reste est très fané et même sec. Le 17, les feuilles inférieures commencent à se faner. Le 19, les limbes des feuilles se détachent du pétiole; la plante peut être considérée comme ayant cessé de vivre.

Azotate potassique. — Le lendemain de l'immersion, le rameau est flétri dans toute sa longueur. Le surlendemain, la flétrissure a augmenté à la partie supérieure; il en est de même le troisième jour après l'immersion ou le 14 septembre. Le 15, les feuilles sont très fanées à la partie supérieure et sèches à l'extrémité libre; les quatre inférieures sont fanées. Le 16, les feuilles finales sont desséchées. Le 17, les feuilles moyennes qui s'étaient conservées jusqu'à ce jour commencent à se faner. Le 19, deux feuilles ne paraissent que flétries et toutes les autres grillées; elles se détachent de leur pétiole. Le 20, le rameau est sec et fané, on peut dire mort.

Azotate sodique. — Le 12, le sommet du rameau est flétri.

Le 13, les feuilles sont presque sèches. Le 14, elles sont fanées aux deux extrémités et commencent à l'être au milieu. Le 15, elles sont sèches en haut et en bas; quatre sont assez bien conservées au milieu; cependant l'une d'elles est crispée sur les bords. Le 17, le rameau et ses feuilles sont flétris et secs; cependant trois feuilles moyennes résistent encore. Le 18, il n'y a plus que deux feuilles qui aient résisté. Le 19, il ne reste qu'une feuille que l'on ne puisse dire morte. Chute du lymbe des feuilles à l'extrémité du pétiole.

Azotate argentique. — Malgré son prix élevé, ce produit a été préconisé pour détruire le phylloxera. Dans le sol, s'il y a des chlorures, il court la chance d'être rendu insoluble et inactif; j'ai cependant cru devoir l'essayer. L'expérience a commencé le 11 septembre. Le 12, les feuilles sont en partie flétries et fanées : celles du bas présentent des taches noires. Le 13, les feuilles sont altérées dans le bas, mais elles paraissent assez bien conservées dans le haut du rameau; la tige de ce dernier noircit. Le 14, les trois quarts de la partie inférieure du rameau portent des feuilles fanées; le quart supérieur paraît encore assez bien conservé; le tiers inférieur du rameau a noirci. Le 15, très flétri. Feuilles de l'extrémité un peu conservées. Chute des feuilles. Le 16, le rameau était mort.

Sulfate magnésique. — Le lendemain bien, le surlendemain assez bien. Le 14 de même, excepté la troisième feuille inférieure qui commence à se faner. Le 15, encore assez bien conservé. Cependant les petites cirrhes sont fanées, la troisième feuille se sèche; l'extrémité libre commence à se faner; il s'est fait une absorption notable. Le 17, les feuilles du bas sont très fanées; quelques feuilles de la partie supérieure sont assez bien conservées. Le 18, le bas est desséché. Il y a encore quelques feuilles fraîches et bien étalées. Les dernières sont flétries; leur pétiole se détache de la tige. Le 20, les feuilles sont très fanées et tombent; cependant il en reste trois grandes et trois petites qui se

maintiennent. Le 21, feuilles fanées et desséchées partout, excepté deux dans le quart supérieur du rameau. Le 22, le rameau a bruni et s'est desséché. Une seule feuille ordinaire, accompagnée de deux autres très petites, conservent une apparence de vie. Le 23, une seule feuille n'est point flétrie; mais elle est pliée. Le 24, elle est très fanée, et tout le reste est mort.

Sulfate calcique. — La dissolution du sel était concentrée. Expérience commencée le 11; le lendemain, le rameau est bien conservé; le 13, il paraît assez bien conservé; mais les cirrhes sont fanées à leur extrémité libre. Le 14, les dernières petites feuilles commencent à se faner. Le 15, les cirrhes sont entièrement fanées. Les dernières cinq feuilles sont aussi fanées et de plus en plus en se rapprochant de l'extrémité libre de la tige. Le 16, cirrhes noircies, feuilles inférieures fanées, feuilles supérieures crispées. Le 17, cirrhes sèches et flétries. Le 19, feuilles flétries. Celles du sommet sont grillées. Le 20, toutes les feuilles sont crispées, excepté l'une d'elles qui n'est que fanée. Plusieurs d'entre elles sont tombées. Le 21, rameau mort.

Phosphate hydrobisodique. — Le lendemain de l'immersion, le rameau commence à se flétrir. Le 14, les feuilles moyennes sont conservées; celles des extrémités sont flétries. Le 15, deux feuilles moyennes sont conservées; tout le reste est flétri et desséché. Le 16, il est très fané et desséché. — Mort.

Carbonate ammonhydrique (Bicarbonate d'ammoniaque). — L'expérience a commencé le 11 septembre. Trois jours après, le rameau était bien conservé. Le 15, les trois dernières petites feuilles étaient flétries et commençaient à se dessécher. Le 17, le rameau avait encore une assez belle apparence, seulement la dessiccation des dernières feuilles était plus avancée. Le 19, il y avait peu de différence avec les jours précédents. Le 20, tout le rameau était fané. Le milieu était un peu mieux conservé que le

reste. Le 23, il n'y avait plus qu'une feuille qui paraissait à peu près conservée ; une autre était fortement fanée, mais non sèche. Tout le reste était perdu. Les feuilles étaient adhérentes dans toute l'étendue de la tige. La rameau n'avait pas noirci, ainsi que cela avait eu lieu sous l'influence de l'ammoniaque et du sulfure hydrammonique.

Oxalate ammonique. — Le rameau se conserve assez bien. Le 13, trois grandes feuilles latérales sont sèches. Le 14, on trouve que toute la rangée latérale gauche est un peu altérée. Le 14, l'une d'elles est flétrie. Le lymbe des feuilles se détache du pétiole. Le 16, les feuilles sont étalées, d'un vert clair. Le 20, l'ensemble des feuilles est encore assez beau, mais elles ne sont point lisses comme avec le chlorure de potassium. 21, bien conservé partout; cependant on observe la chute de quelques feuilles. Le 22, des moisissures sont observées dans le flacon, sur le rameau, au-dessus de la partie immergée. De fortes gouttes d'un liquide tantôt noir, tantôt jaune ou incolore, paraissent exsuder du rameau dans l'intérieur du flacon. Les feuilles qui restent sont toujours bien étalées et d'un vert clair. Le 23, les feuilles sont encore étalées et commencent à jaunir. Le 28, les feuilles qui restent sont entièrement fanécs, jaunes, pâles, inclinées, mais non sèches. L'expérience n'a pas été continuée au delà de ce jour.

Pyrolignite de fer. (Acétate de fer liquide, impur, à odeur de goudron, servant pour la teinture. Un cinquantième de l'eau employée.)—Ce rameau s'est très bien conservé pendant plusieurs jours. Le liquide a été absorbé d'une manière très sensible. Le 15, les feuilles terminales et les cirrhes ont commencé à se faner. Le 16, on observe une feuille fanée. Le 17, il y en a deux. Tout le reste est bien conservé. Le 18, il est à peu près le même. Le 19, il est fané et flétri à ses deux extrémités. Le milieu paraît assez bien conservé. Quelques feuilles tombent. Le 20, il reste deux belles feuilles. Le 21, chute des deux dernières feuilles, qui paraissaient belles. *Tout le reste est tombé.*

SUBSTANCES D'ORIGINE ORGANIQUE [1].

Alcool à 0,30°. — Le lendemain, le rameau paraît assez bien conservé; le surlendemain, la tige est d'une couleur foncée, les feuilles raides, mais pliées; le troisième jour, les pétioles sont pendants; les feuilles sont pliées en deux. L'extrémité supérieure de la tige est beaucoup plus colorée que l'inférieure, qui n'a pas varié; le quatrième jour, les feuilles sont fanées presque partout. Le rameau a bruni dans sa partie supérieure. Le cinquième jour, les feuilles sont très fanées et présentent des taches à leur pourtour. Le sixième jour, la tige du rameau brunit dans toute sa longueur. Le septième jour, les feuilles sont sèches et le rameau est bien mort.

Alcool camphré.— De l'alcool camphré est ajouté à de l'eau que l'on agite. Celle-ci se trouble; mais quelques heures après tout est limpide; le camphre s'est dissous dans l'eau sous l'influence de la petite quantité d'alcool employé et par suite de son extrême division. Expérience commencée le 11 septembre. Le 12, les feuilles sont lisses et d'un beau vert, mais pliées en deux. Le 13, les feuilles paraissent bien conservées; mais la tige, les pétioles et même les nervures sont très fanés en couleur. Le 14, tige continuant à se colorer; pétioles inclinés, feuilles pliées, mais conservées. Le 15, la même chose que la veille, mais plus prononcée. Le 16, le rameau est fané partout. Le 17, très fané et desséché, mais plus en haut qu'en bas. Le 18, mort.

Acide phénique. — L'action de ce produit a été très rapide. Le quatrième jour, le rameau était mort. L'expérience ayant commencé le 11 septembre, le 12, la tige, les pétioles et les nervures étaient violets; le 13, ces organes étaient noirs. Les

(1) Le carbonate, l'oxalate d'ammoniaque, le pyrolignite de fer, et d'autres substances encore, auraient pu être réunis à ce groupe.

feuilles sont aussi couvertes de taches noires près des nervures; elles se crispent, se dessèchent et sont inclinées. Le 14, presque tout est desséché, et l'on peut dire que le rameau a cessé de vivre.

Créosote délayée dans l'eau. — Le lendemain de l'immersion, la tige du rameau, les pétioles et les nervures des feuilles sont tachés d'un brun foncé; elles sont infléchies et commencent à se flétrir. Le surlendemain, le rameau est en partie noirci; il en est de même des pétioles, des nervures et du parenchyme des feuilles; ces dernières sont inclinées et à demi sèches. Le 14, rameau taché, complètement noir en haut. Le 15, mort.

Essence de térébenthine. — Cette dernière communique à peine son odeur à l'eau et flotte à sa surface. Le lendemain et le surlendemain de l'immersion, les feuilles sont belles, bien étalées et bien conservées; le troisième jour, les feuilles sont encore belles, mais la tige et les pétioles noircissent. Le quatrième jour, les feuilles sont inclinées; le cinquième, elles paraissent fanées en diminuant de bas en haut. Le sixième jour, la moitié inférieure du rameau est perdue, la supérieure est seulement un peu fanée. Le septième jour, les feuilles sont flétries, mais non sèches. Le huitième, le rameau est entièrement flétri; les feuilles sont adhérentes.

Chloroforme. — 2 centimètres cubes de chloroforme sont ajoutés à 200 grammes d'eau distillée. Pendant trois jours le rameau est bien conservé, seulement la tige commence à noircir par le bas le troisième jour. Le quatrième jour, le rameau paraît conservé tout entier; mais on observe la chute des feuilles. Le cinquième, les feuilles inférieures commencent à se faner. Le sixième jour, très fané en bas. La chute des feuilles continue. Le septième et le huitième, la chute des feuilles continue encore; il n'en reste que quatre au sommet, qui sont vertes et assez étalées. Le dixième jour, le rameau est complètement privé de feuilles, et on peut le dire mort.

Hydrate de chloral. — 1 gramme de cette substance est dissoute dans 200 grammes d'eau. L'immersion, comme pour toutes les substances précédentes, a commencé le 11 septembre. Le lendemain, toutes les feuilles sont flétries, un peu moins au sommet qu'en bas, et commencent à se couvrir de taches; le surlendemain, le rameau est fortement fané d'une extrémité à l'autre. Le 14, le rameau ne donne plus aucun signe de vie.

Les trois expériences qui vont suivre ont été commencées le 20 septembre. A cette époque la vie des rameaux était déjà fort avancée et ils ne pouvaient donner des résultats absolument comparables à ceux qui ont été observés antérieurement. Des rameaux plongés dans de l'eau distillée et dans de l'eau ordinaire ont servi de terme de comparaison comme dans les expériences précédentes.

Foie de soufre (produit obtenu en fondant ensemble le carbonate potassique et du soufre). — Un millième du poids de l'eau. Immersion le 20 septembre. Le 21, deux rameaux placés dans le même liquide sont assez bien conservés; l'un d'eux, cependant, se fane à son extrémité libre. Le 22, l'un des rameaux est un peu fané dans toute son étendue; l'autre ne l'est qu'à son extrémité libre. Le 23, une feuille des rameaux est fortement inclinée; l'autre est fanée aux deux extrémités. Ils sont très inférieurs à ceux plongés dans le sulfure de calcium. Le 25, un rameau est fané; l'autre commence à l'être; le 26, ils sont tous deux fanés; l'un est desséché à la partie supérieure. Le 28, le produit dissous dans l'eau s'est altéré et a donné un dépôt de soufre. Les deux rameaux sont perdus. Chute du lymbe de la feuille à l'endroit où elle s'insère sur le pétiole. Sur le deuxième rameau qui était plus ancien que le premier, les feuilles sont adhérentes, mais il est mort.

Polysulfure de calcium obtenu par voie sèche. — 2 décigrammes pour 200 grammes d'eau. Produit se dissolvant et donnant

une teinte jaune à la liqueur. Sur deux rameaux employés, l'un s'est fané immédiatement; l'autre s'est très bien conservé; le 25, ses feuilles commencent à jaunir; le 26, idem. Le 28, chute des feuilles sur le rameau qui s'était bien conservé. Rupture entre le lymbe et le pétiole. Le 29, desséché, mort.

Naphtaline. — 2 grammes de naphtaline ont été broyés et plongés dans 200 grammes d'eau. Le mélange a été fortement agité. Le lendemain, après le dépôt de la naphtaline non dissoute, la liqueur possédait l'odeur de ce corps, ce qui peut porter à penser qu'il en avait dissous une partie. Le lendemain de l'immersion, le rameau est très fané dans toute sa longueur; le surlendemain, il commence à se dessécher, et le troisième jour il était mort.

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS.

Les expériences qui sont l'objet de ce travail ont donné plusieurs résultats singuliers et qui démontrent d'une manière précise que les agents toxiques exercent des actions de divers ordres auxquelles on ne pouvait s'attendre. Les uns paraissent embellir la vigne et prolonger son existence. Telle est l'action produite par le chlorure potassique; les autres la flétrissent et la dessèchent même avec rapidité comme la créosote et surtout l'acide phénique.

Le bromure et l'iodure potassique agissent dans le même sens que le chlorure potassique, mais avec moins d'énergie. Énergie qui va en diminuant à mesure que l'équivalent du chloroïde qui entre dans leur composition augmente.

Le chloral hydraté a exercé une action puissante et funeste. En trois jours le rameau était mort; mais les signes n'étaient pas les mêmes que ceux donnés par l'acide phénique.

Un phénomène des plus remarquables a pu être observé dans la chute des feuilles : tantôt leur pétiole se détachait au point où il était inséré sur le rameau, comme pour la plupart des

substances, telles que le bichlorure de mercure, le chlorure, le bromure et l'iodure potassiques; d'autres fois, c'est le lymbe de la feuille qui se sépare à l'extrémité du pétiole; celui-ci demeure adhérent au rameau, comme cela a été observé avec l'eau ordinaire, les azotates ammoniaque, potassique et sodique. Une seule fois les deux modes de séparation ont été observés sous l'influence d'une même substance. Enfin, le rameau peut mourir, tandis que ses feuilles continuent à y adhérer, ainsi que cela est arrivé pour le cyanure hydrique, le carbonate ammonhydrique et l'essence de térébenthine.

Après le chlorure potassique qui a paru être un agent conservateur tout à fait exceptionnel, le carbonate ammonhydrique a permis au rameau de conserver sa fraîcheur pendant huit jours; ce n'est qu'après cet espace de temps qu'il a commencé à se faner.

L'oxalate ammonique a paru aussi exercer une action favorable, mais elle l'a été beaucoup moins et, finalement, le rameau a présenté des moisissures à la surface de l'eau.

Le pyrolignite de fer a aussi été un agent conservateur du premier ordre. Sous son influence, le rameau tout entier a conservé pendant plusieurs jours une très belle apparence.

Le chloroforme a d'abord parû être un agent conservateur; mais, dès le quatrième jour, on a commencé à observer la chute des feuilles.

Quels que puissent être les renseignements à tirer de ces expériences pour les agents propres à combattre l'épiampélie actuelle ou pour favoriser le développement de la vigne, ils n'offrent pas moins un intérêt considérable au point de vue de la biologie végétale. On ne pouvait soupçonner que ces agents produiraient des effets aussi variés et par suite que la vigne pouvait être affectée de tant de manières différentes. Feuilles demeurant largement étalées en se plissant, se flétrissant et se desséchant avec une rapidité extrême, quoique le rameau soit plongé dans un liquide. Variation dans la couleur verte des feuilles brunissant ou jaunissant, se couvrant de taches dans le centre des parties libres de leur lymbe ou à partir des ramuscules

du pétiole, flexion de ce dernier, plissement de la feuille, sommeil apparent comme avec le chlorhydrate de morphine. Action rapide d'agents anesthésiants sur un être auquel on ne connaît pas de système nerveux. Empoisonnements variés; conservation apparente.

Chute des feuilles par la séparation du pétiole dans le rameau ou par celle du lymbe et du pétiole. Ce sont là surtout des faits qui offrent un intérêt considérable et qui ouvrent une nouvelle voie pour arriver à connaître et à comprendre la vie des végétaux.

EXPÉRIENCES

FAITES

SUR DES VIGNES SAINES

AVEC DES AGENTS VÉNÉNEUX

Des travaux considérables ont été entrepris pour étudier le phylloxera, le mode d'action qu'il exerce sur la vigne et les moyens que l'on pourrait employer pour résister aux désastres dont il peut être la cause. Cette dernière partie présente surtout un vif intérêt; car, après les recherches scientifiques qui ont été faites, il faut en venir à l'application. Mais, ainsi que je l'ai exposé dans une leçon que j'ai faite le 17 juillet dernier, les moyens qui ont été proposés n'ont pas toujours été rationnels, et l'on pouvait même savoir d'avance que la plupart d'entre eux ne pourraient donner aucun résultat utile. En effet, il y a des produits qui se détruisent ou se neutralisent dans le sol; il en est qui sont trop nuisibles à l'homme pour que l'on puisse en faire usage, et il en est enfin un grand nombre qui peuvent être aussi dangereux pour la vigne que le phylloxera, et dont il faut par conséquent éviter l'emploi. Voulant suivre une marche méthodique, j'ai pensé qu'il conviendrait d'abord de mettre les agents anti-phylloxeriques en présence de vignes saines, afin de connaître l'action qu'ils peuvent exercer sur elles. Le présent travail a été entrepris et exécuté dans cette direction.

Les produits employés se rapportent à quatre groupes distincts :

I. — Produits volatils

OU POUVANT EN DONNER.

Sulfure de carbone. — Polysulfure de calcium obtenu par voie sèche. — Sulfure ammonhydrique. — Pétrole léger. — Essence de térébenthine. — Naphtaline.

II. — Produits salins fixes et solubles dans l'eau.

Perlasse (carbonate de potasse du commerce). — Cendres vives. — Bicarbonate de soude. — Sulfate de fer.

III. — Produits divers.

Suie. — Savons.

IV. — Produits mixtes.

Poudres de M. Crébessac.

Les produits liquides ont été introduits dans de petits flacons de 40 à 50 grammes, et enterrés dans le sol à environ 40 centimètres de profondeur, au fond d'un trou percé à l'aide d'une tarière. Les produits solides ont été mêlés avec une partie de la terre extraite au pied des ceps de vigne, introduits dans la cavité résultant de cette extraction, et recouverts ensuite avec le restant de cette terre.

Les expériences ont en général été faites sur deux pieds de vigne différents, étiquetés et placés parmi d'autres pieds sur lesquels aucun essai n'était fait, afin de pouvoir mieux juger les résultats qui seraient obtenus.

I. — PRODUITS VOLATILS.

Sulfure de carbone.

Deux pieds de vigne ont été soumis à l'influence de cet agent. L'un d'eux, qui sera désigné par le n° 1, était plus fort et plus élevé que l'autre qui portera le n° 2. Le sulfure de carbone a été introduit dans de petits flacons, sans les remplir entièremen pour laisser une plus grande surface à l'évaporation. Le flacon du n° 1 contenait 28gr2 de ce liquide; l'autre en contenait 29gr4. Ils ont été enterrés aussi près que possible de l'axe des pieds de vigne, à 40 centimètres de profondeur, dans des trous percés à l'aide d'une tarière, ainsi que cela a été dit précédemment. Les flacons ont été recouverts avec quelques cailloux pour que leur ouverture demeure libre, et les trous ont finalement été bouchés avec de la terre.

Cette opération a été faite le 22 juillet 1874.

Le 24 du même mois, les flacons ont été déterrés : la terre qui les entourait portait une odeur très prononcée de sulfure de carbone. L'évaporation du produit avait été d'environ un tiers; la vigne était à peine altérée d'une manière sensible à sa partie inférieure.

Le 30 juillet, les flacons ont été déterrés de nouveau : l'évaporation avait été complète, la terre possédait à peine l'odeur du sulfure de carbone.

Le 6 août, la vigne n° 1 avait ses feuilles inférieures légèrement altérées; les supérieures étaient en bon état.

Le n° 2 n'avait nullement souffert, et le raisin commençait à vérer.

Le 18 août, les feuilles inférieures de la vigne présentaient quelques taches rouges.

Le 8 septembre, sur le pied n° 1, les feuilles sont un peu altérées et le raisin peu avancé. Le pied n° 2 a peu souffert; mais les quelques grains de raisin qu'il porte sont peu avancés en maturité.

Finalement, la vigne a été soumise à l'influence du sulfure de carbone; elle a un peu souffert; mais elle s'est toutefois bien conservée. Il est certain que, si la vapeur de sulfure de carbone qui s'est dégagée pendant plusieurs jours eût été insuffisante pour tuer le phylloxera, elle eût amplement suffi pour le contraindre à s'éloigner.

Polysulfure de calcium obtenu par voie sèche.

100 grammes de ce produit, mêlés avec environ dix fois autant de terre, ont été introduits dans une cavité creusée autour du pied d'une vigne. Le tout a été arrosé avec environ un litre d'eau et ensuite recouvert de terre.

Le 6 août, quelques feuilles inférieures sont tachées, et quelques-unes sont bordées ou comme légèrement crispées à leur pourtour. Les jeunes pousses sont très belles.

Le 18 août, quelques feuilles sont crispées, mais le fruit est très beau.

Le 8 septembre, plusieurs feuilles sont altérées sur les bords. Le raisin est beau, noir et comme recouvert d'une poudre blanchâtre à sa surface.

En résumé, le sulfure calcique employé peut donner la mort au phylloxera, et n'altère la vigne que d'une manière à peine sensible.

Sulfure ammonhydrique.

Ce sulfure, qui est liquide, a été employé exactement comme le sulfure de carbone, et l'expérience a été commencée le même jour 22 juillet.

Le 24 du même mois, les deux ceps de vigne sont en bon état; quelques feuilles inférieures seulement ont jauni légèrement.

Le 30, un flacon déterré présente un produit décoloré, avec un dépôt de soufre blanc, qui n'a plus que l'odeur de l'ammoniaque. La vigne et le raisin ont souffert, les feuilles sont devenues jaunes et sont tachées de noir.

Dans le deuxième flacon, le liquide, dont un tiers environ est évaporé, a conservé sa couleur et son odeur.

Le 18 août, les feuilles présentent des taches rouges; quelques-unes paraissent un peu grillées, le fruit est assez bien conservé.

Le 8 septembre, les feuilles des deux pieds de vigne soumis à l'action du sulfure ammonhydrique ont jauni et sont un peu fanées; le raisin est abondant, mais il est peu développé.

La présente expérience et celles qui ont été faites sur des rameaux de vigne démontrent que le sulfure ammonhydrique est dangereux pour ce végétal, et que l'on ne devrait en faire usage qu'autant que l'on ne pourrait se procurer d'autres produits et qu'on l'obtiendrait à peu de frais; mais, dans ce cas, il devrait être étendu dans une très grande quantité d'eau, soit mille fois son poids, et employé par la méthode d'arrosement ou d'injection au pied même de la vigne.

Pétrole léger.

On donne ce nom à une espèce de pétrole dont le point d'ébullition commence à 83° et s'élève à 88°5, et dont le poids spécifique est 0,700.

Ce produit a été employé exactement comme le sulfure de carbone et le même jour 22 juillet.

Il n'a d'abord produit aucune altération apparente sur la vigne; il était entièrement évaporé le 30 du même mois.

Le 8 septembre, les feuilles d'un pied de vigne ont conservé leur couleur verte; mais celles du bas étaient percées en plusieurs endroits. La vigne portait du raisin blanc.

Le deuxième pied avait beaucoup souffert; ses feuilles étaient tachées de noir et de jaune, le raisin était noir et non blanc, comme celui du pied précédent.

Essence de térébenthine.

L'essence de térébenthine ayant été proposée par M. Combes d'Alma pour faire des injections dans la vigne, devait par cela

même être essayée. Elle l'a été par le même procédé que le sulfure de carbone. L'expérience a été commencée le 22 juillet.

Le 24, les vignes paraissaient avoir peu souffert; seulement, un pied présentait deux feuilles jaunes à la partie inférieure; l'autre avait quelques feuilles ratatinées à la partie inférieure.

Le 30, sur le premier pied, les feuilles de la partie inférieure étaient mamelonnées, jaunies et noircies par places; le deuxième pied était très attaqué à la partie inférieure.

Le 8 septembre, les feuilles avaient jauni sur un pied; elles étaient un peu mieux conservées sur le second. La maturité du raisin était peu avancée, comparativement avec celle des vignes qui n'ont été soumises à aucun traitement.

Il résulte de ces faits que la vapeur de l'essence de térébenthine exerce une action vraiment délétère sur la vigne, et qu'il ne faut l'employer qu'à très faible dose.

Naphtaline.

Cette substance, que j'avais employée depuis bien des années pour chasser les insectes de la vigne et qui faisait partie de la poudre anti-oïdique de M. Crébessac, méritait d'être employée seule. J'avais déjà reconnu son action délétère sur les insectes, il restait à savoir quel serait l'effet qu'elle produirait sur la vigne. 10 grammes de cette substance, pulvérisée, furent mêlés avec de la terre, et introduits dans une cavité creusée autour d'un cep de vigne. Cette expérience, comme les précédentes, a été faite sur deux pieds de vigne, et a été commencée le 22 juillet.

Le 24, les feuilles du n° 1 étaient couvertes de points noirs, tandis que d'autres avaient jauni. Le n° 2 était bien conservé; seulement, quelques feuilles paraissaient altérées à la partie inférieure.

Le 30 juillet, on observe encore sur le n° 1 des feuilles piquées de noir, et d'autres qui sont devenues jaunes; le n° 2 n'a pas varié sensiblement.

Le 18 août, la plupart des feuilles sont couvertes de taches,

les unes rouges et les autres jaunâtres; elles ont perdu leur souplesse et sont même devenues cassantes.

Le 8 septembre, les feuilles du n° 1 sont d'un beau vert et paraissent bien conservées; résultat probablement dû à l'évaporation complète de la naphtaline depuis plusieurs jours. Le n° 2 a ses feuilles très altérées.

Il résulte de ces faits que la naphtaline, qui fait périr si facilement les insectes, est aussi dangereuse pour la vigne, et que l'on ne doit en faire usage qu'avec beaucoup de modération.

II. — PRODUITS SALINS FIXES ET SOLUBLES.

Cendre.

La cendre a été employée à la dose de 250 grammes par pied de vigne; l'expérience a commencé le 30 juillet.

Le 6 août, la vigne est magnifique de fraîcheur et de verdeur; le 18 elle est encore très belle.

Le 8 septembre, les feuilles sont d'un beau vert et très étalées; les fruits sont superbes.

En général, la vigne soumise à ce traitement est tout à fait supérieure à celle qui n'a été l'objet d'aucune expérience.

La cendre vive, ou non lavée, est donc un agent fertilisant plutôt que nuisible pour la vigne.

Perlasse.

On donne ce nom à une potasse du commerce qui est blanche et riche en carbonate.

50 grammes, mêlés avec de la terre, ont été employés pour chaque pied de vigne; l'expérience a commencé le 30 juillet.

Le 6 août, les feuilles de la partie inférieure sont un peu altérées, le reste est bien conservé; les jeunes pousses sont fraîches et d'un vert clair.

Le 18 août, la vigne est en bon état.

Le 8 septembre, la vigne est magnifique, ses feuilles sont d'un vert clair très beau; le raisin est noir et recouvert d'une poudre blanche que l'on nomme la *fleur des fruits*.

La potasse est donc un agent vraiment favorable à la vigne. Si elle pouvait détruire le phylloxera, c'est en elle que l'on trouverait l'agent auquel on devrait accorder la préférence.

Bicarbonate de soude.

La vigne paraissant avoir une grande tendance à absorber la potasse, ainsi que cela est démontré par les quantités considérables de tartre que les vins laissent déposer, et l'on sait que ce tartre est principalement représenté par le tartrate acide de potasse, il y avait quelque intérêt à voir si l'on pourrait substituer la soude à cet agent. Afin de faire usage d'un produit aussi neutre que possible et facilement attaquable, le bicarbonate de cette base a été employé. La dose a été de 100 grammes pour un pied de vigne; l'expérience a commencé le 30 juillet.

Le 6 août, la vigne avait ses feuilles d'un vert foncé, et la véraison du raisin s'était opérée.

Le 18, les feuilles présentaient quelques taches rouges, et le raisin semblait être en bon état.

Le 8 septembre, la vigne paraissait avoir souffert; cependant le raisin s'était développé, mais beaucoup moins bien que sous l'influence de la potasse.

Sulfate de fer.

100 grammes par pied de vigne, mêlés avec de la terre. Expérience commencée le 30 juillet.

Le 6 août, la vigne est en bon état, ses feuilles sont d'un vert clair, mais non jaunes.

Le 18 août, elle est très bien.

Le 8 septembre, le pied de vigne présente un bel aspect; les feuilles sont d'un vert foncé, quoique le raisin soit blanc. Ce fruit est couvert d'une pulvicule blanche.

Le sulfate de fer n'a donc nui à la vigne en aucune manière; au contraire, il a paru favoriser son développement.

Le pyrolignite de fer ayant donné des résultats très avantageux avec des rameaux de vigne, il est évident que ces produits peuvent être employés avec avantage. On peut aussi leur substituer les cendres noires et les lignites qui sont aptes à donner du sulfate de fer.

Suie.

200 grammes pour un pied de vigne. Expérience commencée le 30 juillet.

Le 6 août, la vigne paraît en bon état et la véraison du raisin s'est opérée. Le 18 du même mois, elle est toujours en bon état. Le 8 septembre, les feuilles de la vigne sont d'un beau vert et bien étalées. La maturité du raisin est peu avancée.

La suie pourrait être avantageusement employée pour combattre le phylloxera, puisqu'elle ne porte aucun tort à la vigne.

Savons.

Du savon mou à base de potasse et du savon dur à base de soude et contenant de la résine ont été employés.

100 grammes de savon mou ont été mêlés avec de la terre et employés en les introduisant dans une cavité creusée au pied d'un cep de vigne. L'expérience a commencé le 30 juillet. Le 6 août, la vigne est en bon état et présente de jeunes pousses. Le 18, des feuilles sont tachées de jaune, mais le fruit est en très bon état. Le 8 septembre, les feuilles sont étalées, mais commencent à jaunir. Le raisin, qui est blanc, est assez beau.

Le 30 juillet, 140 grammes de savon dur sont introduits dans le sol au pied d'un cep de vigne.

Le 6 août, les feuilles sont ondulées et boursouflées.

Le 18, les feuilles sont tachées de rouge et crispées, mais le fruit est en assez bon état.

Le 8 septembre, les feuilles sont légèrement altérées et sont couvertes de taches jaunes et de taches noires.

Le raisin, qui est de couleur noire, a quelque peu souffert.

Si l'on doit employer des savons pour combattre le phylloxera, on voit qu'il faut donner la préférence au savon mou, à base de potasse. Dans tous les cas, il faudra l'employer à très faible dose. Nul doute que sa dissolution apparente, si elle peut atteindre le phylloxera, puisse faire périr cet insecte malfaisant.

IV. — PRODUIT MIXTE.

Poudres anti-phylloxeriques de M. Crébessac.

Ces poudres sont au nombre de deux : l'une contient de la potasse et la seconde de la soude. Elles contiennent, en outre, du sulfure calcique et de la naphtaline.

Elles ont été placées dans des cavités creusées au pied des vignes le 30 juillet 1874.

Le 6 août, la vigne soumise à la poudre potassique est fraîche, magnifique; le raisin est très beau.

Le 8 septembre, la vigne est aussi belle que possible à tous les points de vue. Le raisin est noir et la maturité est plus avancée que partout ailleurs.

Sous l'influence de la poudre sodique, la vigne est aussi très belle le 6 août, les feuilles de la partie inférieure sont un peu fanées; le raisin est d'une belle qualité.

Le 8 septembre, les feuilles inférieures ont jauni, les autres sont un peu moins belles que celles de la vigne soumise à la poudre potassique. Le raisin est suffisamment développé.

La poudre potassique l'emporte sur la poudre sodique. Elle est vraiment anti-phylloxerique et par la naphtaline qu'elle contient, et par les sulfures qui s'y trouvent. Elle est, en outre, véritablement favorable à la vigne.

En relevant tout ce qui a été fait jusqu'à ce jour, on peut conclure avec certitude qu'aucun autre produit ne peut lui être

comparé, pour obtenir les résultats voulus : destruction du phylloxera; amélioration de la vigne.

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS.

Il résulte de l'ensemble des expériences signalées dans le présent mémoire, que tous les produits qui ont été essayés peuvent être employés pour combattre le phylloxera, si on se place dans les conditions qui ont été indiquées.

Le sulfure de carbone, qui avait été reconnu dangereux pour la vigne, peut être employé en le plaçant dans des flacons qui ne lui permettent de s'évaporer qu'avec lenteur.

Le sulfure de calcium, obtenu par voie sèche, peut lui être substitué à cause de son prix qui est très inférieur et parce que, à une dose suffisante pour chasser ou faire périr le phylloxera, il n'exerce pas une action vraiment délétère sur la vigne.

Le sulfure ammonhydrique devra être rejeté; l'essence de térébenthine ne pourra être employée qu'à très faible dose, et il en sera de même de la naphtaline qui peut être très nuisible à la vigne.

La cendre et le carbonate de potasse, s'ils peuvent faire périr le phylloxera, seront en même temps des produits qui exerceront une action très favorable sur la vigne et en augmenteront le rendement en raisin, tant au point de vue de la qualité que de la quantité [1].

Les sels de fer, ainsi que cela résulte de l'expérience consignée dans ce mémoire et de celles qui ont été faites sur des rameaux de vigne, exercent une action très favorable sur cette plante.

La suie et le savon ne devront être employés que lorsqu'il y aura nécessité de le faire; c'est-à-dire lorsqu'on ne pourra se procurer d'autres produits. Ils devront d'ailleurs ne l'être qu'à une faible dose.

---

[1] Si le nombre de grains de raisin n'est pas augmenté, chacun d'eux s'accroît en volume.

La poudre anti-phylloxerique, à base potassique, de M. Crébessac, a donné des résultats qui ont dépassé toute espèce de prévision. Sous son influence, la vigne, loin de souffrir, a pris un magnifique développement, et le raisin qu'elle a donné, a atteint la maturité avant celui des vignes voisines qui n'avaient été soumises à aucun traitement.

TOXICOLOGIE GÉNÉRALE

EXPÉRIENCES

FAITES

SUR DES MOUCHES

AVEC DES AGENTS GAZEUX OU VOLATILS

Me proposant de faire une leçon sur le phylloxera, et désirant rendre les auditeurs témoins des effets produits sur les animaux inférieurs par les agents toxiques qui ont été proposés ou qui peuvent être employés pour détruire cet animal, j'ai profité des indications de M. Dumas, qui a opéré sur des mouches. Cet animal pouvant être vu d'une assez grande distance, il devait être possible de réaliser ma pensée; c'est effectivement ce qui a eu lieu. Ces expériences, si minimes, si infimes qu'elles puissent paraître au premier abord, ne sont cependant pas sans offrir un certain intérêt, car elles se rattachent à la toxicologie générale, soit à la pharmaceutique, ainsi que l'eût dit Ampère.

La toxicologie générale ayant pour but de connaître l'ensemble des actions exercées par les produits toxiques sur les êtres vivants, présente un champ excessivement vaste. On peut dire même qu'elle n'a encore été étudiée que dans quelques-unes de

ses parties, et que son ensemble est demeuré dans le domaine de l'inconnu.

Cette science, pour être suffisamment comprise, exige que l'on connaisse la constitution la plus intime des êtres vivants, les fonctions remplies par les éléments qui les constituent, et les altérations que les uns et les autres peuvent subir sous l'influence de certains agents.

Or, je crois pouvoir affirmer que rien de cela n'a été l'objet d'une étude suffisante.

On ne sait rien, ou fort peu de chose, relativement à ce qui concerne les végétaux, et l'on n'a pas une idée nette de la constitution des animaux. De là les difficultés que l'on éprouve pour caractériser les troubles qui surviennent dans leurs fonctions.

Je n'exposerai point ici le travail que j'ai dû entreprendre pour avoir une idée précise des faits que je désirais étudier. Le simple examen des questions qui se sont présentées pourra donner une idée de son importance et de la nécessité de s'en occuper dans un avenir prochain.

Tous les agents qui ont été employés étaient des fluides élastiques ou des corps réductibles en vapeur, et possédant généralement, mais non sans exception, une odeur très forte.

Afin de mettre un peu d'ordre dans ce travail, ces corps ont été divisés en quatre groupes : enivrants, — paralysants, — asphyxiants, — et finalement un quatrième groupe contenant des corps qui font périr les insectes, cela est vrai, mais dont l'action n'a jamais été définie.

La division qui précède pourra paraître fort simple et facile à suivre; cependant, si l'on examine les faits et si l'on cherche à en avoir une idée nette, on rencontre des difficultés considérables.

Que doit-on entendre par agents enivrants?

L'ivresse, chez l'homme, commence par une espèce d'excitation, un verbiage immodéré, des idées confuses, inconséquentes; des éclats de rire sans motifs réels, des actions violentes; quelquefois, au contraire, de la concentration et de l'immobilité; puis survient de la faiblesse dans les muscles, de la titubation, le

trébuchement, l'impossibilité de se tenir debout, et finalement la chute; la somnolence, même un sommeil profond, mais plus apparent que réel. Si la dose de l'agent enivrant est considérable, la mort peut être la conséquence de son absorption.

Que s'est-il donc passé pour que de pareils résultats puissent être obtenus? On sait seulement que le principe alcoolique ordinaire des boissons enivrantes a été absorbé, qu'il a pénétré dans les vaisseaux sanguins, qu'il n'est point émis par les urines, qu'il s'exhale par les poumons, et que, par conséquent, il n'a point été détruit par l'acte de la respiration; seulement, il a gêné cette dernière, l'a empêchée de s'accomplir, et, se trouvant partout, a profondément modifié les fonctions et troublé leur accomplissement.

On peut donc résumer ce qui précède en ces quelques mots : modification de la respiration, trouble des fonctions nerveuses, diminution de la motilité et de la sensibilité, désordre de l'intelligence, peut-être un changement dans la composition chimique du système nerveux par l'alcool, qui est susceptible d'en dissoudre une certaine partie..., la mort enfin par une asphyxie lente et une paralysie générale.

Voilà ce que produit l'alcool; mais il y a d'autres composés du même ordre qui se trouvent dans les vins blancs, et par suite dans les eaux-de-vie, notamment dans celle dite de grains; produits qui font naître des pandiculations, par une action prolongée, des douleurs dans les articulations, la paralysie des organes génito-urinaires, et celle des membres inférieurs. C'est principalement à l'amylol que l'on peut attribuer ces derniers effets.

Pensant que les corps organiques qui ont la même constitution peuvent être aptes à produire des effets du même ordre sur l'économie animale, j'ai réuni ensemble les principaux alcools : méthol, alcool, propylol, butylol et amylol. Tous ces corps ont été essayés.

J'ai cru devoir y joindre l'acide carbonique qui, certainement, ne joue pas le même rôle que ces derniers, mais qui fait naître des actions paraissant se rapprocher de celles attribuées à l'ivresse.

Le *deuxième groupe* comprend les agents que l'on désigne

généralement par le nom d'*anesthésiants,* tels que l'éther, le chloroforme et le chloral.

Toutefois, je n'ai pu donner ce nom au présent groupe, parce que l'anesthésie est représentée simplement par la perte de la sensibilité, et que lorsque ces agents sont employés à une dose plus élevée, ils paralysent la motilité.

Le nom qui leur convient réellement est donc celui de *paralysants,* et la paralysie doit se diviser en deux parties nettement distinctes, qui sont non seulement le résultat d'agents spéciaux, mais de maladies pouvant avoir une tout autre cause pour origine. On aurait donc :

Paralysie.... { anesthésie : paralysie de la sensibilité.
akinésie : paralysie du mouvement.

Si l'on approfondissait cette question pour remonter à l'origine de ces phénomènes, on aurait à examiner si ces effets morbides sont dus à une altération des parties du système nerveux, qui sont propres à chacun d'eux, ou à une altération plus profonde : l'être intime d'une part, les muscles d'autre part. Causes qui peuvent probablement se présenter, soit simultanément, soit indépendamment les unes des autres.

Aux corps paralysants j'ai cru devoir joindre le cyanure hydrique (acide hydrocyanique). Il agit directement sur le système musculaire, et va jusqu'à détruire l'adhérence des éléments qui le constituent lorsqu'il est administré à une dose suffisamment élevée.

Le *groupe des produits asphyxiants* présente des difficultés notables, et mériterait que de nouvelles expériences fussent entreprises pour qu'il fût possible de les lever entièrement.

L'asphyxie est comprise, par tous les hommes de science, comme une suspension ou un arrêt de la respiration, c'est-à-dire de l'action que l'oxygène exerce sur l'économie animale; mais ce résultat peut être obtenu par des moyens fort distincts et dont plusieurs même sont étrangers à ce travail, tels que la strangulation, l'immersion dans l'eau, la respiration de l'azote, de l'hydrogène sulfuré et de l'oxyde de carbone.

Il suffit de considérer ces trois derniers corps pour que l'on puisse juger qu'ils produisent l'asphyxie par des moyens différents :

1° L'azote, qui n'est nullement vénéneux, fait naître l'asphyxie parce qu'il ne peut tenir lieu de l'oxygène;

2° L'hydrogène sulfuré est immédiatement décomposé par l'oxygène libre et humide, qui le transforme en eau et en soufre, en perdant, par cela même, la propriété d'entretenir la respiration.

Mais où la respiration s'accomplit-elle? Est-ce dans le sang? Est-ce dans toute l'économie?

Les expériences faites sur les mouches permettent de répondre à ces questions, et ce sera surtout celles qui l'ont été avec l'oxyde de carbone.

Des expériences d'une haute importance, faites par M. Claude Bernard, ont démontré que les globules du sang absorbent l'oxygène; mais que, lorsque l'on fait respirer de l'oxyde de carbone à des animaux à sang rouge, ce dernier gaz déplace le premier, et que l'asphyxie en est la conséquence. Or, les mouches n'ayant point de sang contenant des globules rouges, l'effet qui vient d'être signalé ne peut s'accomplir chez elles; cependant elles meurent immédiatement lorsqu'elles sont mises en présence de l'oxyde de carbone.

On est forcé de conclure de ces faits que la respiration s'accomplit dans les organes fondamentaux de la vie, et que le sang n'est qu'un agent qui leur porte l'oxygène.

J'admets cette théorie qui, pour moi, est vraie, et fondée sur l'expérience, depuis un grand nombre d'années. J'ai en effet démontré, expérimentalement, que l'incubation ne peut avoir lieu sans la présence de l'oxygène; que la respiration commence avec la vie, l'accompagne toujours et finit avec elle. Le Mémoire sur l'incubation, publié par le Dr Martin Saint-Ange et moi, déposé à l'Académie des Sciences en 1845, avait pour épigraphe : *Toutes les parties du corps des animaux respirent et partout il y a de l'oxygène* [1]. J'ai toujours enseigné cette théorie, soit dans mes

---

[1] Il n'y a que pour les épidermoïdes : poils, ongles, écailles et leurs analogues, que cette vérité scientifique ne puisse être affirmée.

leçons de chimie en parlant des fonctions de l'air atmosphérique, soit dans mon cours de chimie agricole, dont plusieurs leçons sont consacrées à l'anatomie et à la physiologie animales. Je tiens à signaler ces faits, parce qu'ils ont une importance considérable relativement à ces deux sciences.

Le *quatrième groupe* comprend des corps volatils qui ne peuvent être classés parmi les précédents; ce sont des acides, tels que le formique et l'acétique, le gaz ammoniac, et principalement la naphtaline, qui exerce une action très délétère sur les animaux et les végétaux, sans que les phénomènes produits soient assez appréciables ou assez connus pour que l'on puisse en avoir une idée nette. A côté de la naphtaline se rangeraient encore la créosote et le phénol. A ces corps on doit ajouter les goudrons qui les renferment.

Il y a d'autres corps que je n'ai pu essayer cette année; il y a aussi l'oxygène, qui exerce une action surexcitante, sans doute de l'ordre chimique, se rattachant aux phénomènes de la respiration, et qui ne peut être admis dans aucun des groupes précédents.

Voici la liste des produits qui ont été essayés :

1er GROUPE.

Enivrants.

Méthol, — Alcool, — Propylol, — Butylol, — Amylol, — Acide carbonique, — Acétone.

2e GROUPE.

Paralysants.

Anesthésiants : Éther sulfurique, — Chloroforme, — Chloral.
Akinésiant : Cyanure hydrique.

3e GROUPE.

Asphyxiants.

Azote, — Hydrogène, — Sulfure hydrique, — Sulfure hydroammonique, — Oxyde de carbone, — Sulfure de carbone S_2C.

4e GROUPE.

Action inconnue.

Naphtaline, — Acide phénique, — Créosote, — Coaltar, — Goudron, Chaux d'épuration du gaz de l'éclairage, — Extrait de tabac

RÉSULTAT DES EXPÉRIENCES.

1er GROUPE.

Corps enivrants.

Tous ces corps, étant liquides et volatils, ont pu être employés en les faisant parvenir au fond d'une éprouvette contenant un peu d'ouate, afin que les mouches ne puissent entrer en contact direct avec eux.

L'éprouvette était traversée dans toute sa longueur par un tube élargi à la partie supérieure, et représentant une espèce d'entonnoir qui servait pour introduire le liquide.

La figure ci-jointe en donnera une idée précise.

Les alcools, à mesure que le radical qui entre dans leur constitution se condense, sont de plus en plus denses et de moins en moins volatils.

Je rappellerai ici les propriétés fondamentales de ces corps.

	Formules atomiq.	Poids spécif.	Point d'ébull.	Densité de vapeur.
Méthol.....	OH,CH_3	0,798	66°5	1,110
Alcool	OH,C_2H_5	0,792	78°4	1,613
Propylol....	OH,C_3H_7	0,812	98°	2,079 (1)
Butylol.....	OH,C_4H_9	0,799	108°	2,564 (1)
Amylol.....	OH,C_5H_{11}	0,818	132°	3,147

On notait l'heure à laquelle le liquide était versé dans l'éprou-

(1) Poids spécifiques obtenus par le calcul.

vette, celle de la chute des mouches, et, quand il y avait lieu, celle à laquelle ces insectes n'exerçaient plus de mouvement; c'est ainsi que les résultats suivants ont été obtenus :

Méthol. Effet accompli en.................	19 m.	30 s.
Alcool. Chute après 13 m. 30 s., mortes en	17	30
Propylol............................	5	30
Butylol............................	5	30
Amylol............................	6	»

Deux à trois minutes après la chute, tout mouvement a cessé.

Acétone (1)............................	3 m.	40 s.
Mort complète en......................	6	40

Les eaux-de-vie de grains contenant de l'amylol, MM. Is. Pierre et Ed. Puchot ayant trouvé du propylol et du butylol dans le résidu de leur distillation, il ne peut être douteux qu'elles en contiennent, et que c'est principalement à ces produits qu'elles doivent les effets désastreux qu'elles produisent sur les individus qui les consomment.

A mesure que le poids spécifique de la vapeur va en s'accroissant, le point d'ébullition est retardé et la volatilité va en diminuant. Il résulte de ce fait que les derniers alcools sont d'une activité beaucoup plus grande que les premiers, puisque des quantités de vapeur plus faibles ont produit des effets plus rapides.

L'acide carbonique a produit des effets d'une lenteur surprenante. Après avoir été lavé, il a été introduit par la partie inférieure d'un flacon où il y avait des mouches; elles sont tombées asphyxiées après trois minutes et demie. Couchées sur le dos, elles ont remué les pattes pendant longtemps. Versées enfin sur un papier après que tout mouvement avait paru cessé, elles sont toutes revenues à la vie, mais avec une lenteur variable : il y en avait qui étaient envolées, que d'autres n'avaient point encore fait le moindre mouvement.

(1) L'acétone aurait besoin d'être étudié de nouveau; peut-être faudrait-il le réunir aux paralysants.

2me Groupe.

Agents paralysants.

L'appareil précédent a servi pour ces expériences.

Le chloral hydraté solide a été placé au fond d'un flacon au-dessous d'une couche de coton.

ANESTHÉSIANTS.

Éther sulfurique. — Les mouches sont asphyxiées en une minute. Mises en contact avec l'air, elles ne reviennent point à elles.

Chloroforme. — Quoique ce corps soit moins volatil que l'éther, les mouches tombent sans vie apparente aqrès une demi-minute d'immersion dans l'air chargé de sa vapeur.

Chloral solide. — Chute des mouches après quinze minutes trente secondes. Retirées du bocal quatorze minutes après leur chute, elles remuent encore et paraissent ivres.

L'infériorité de l'action du chloral, comparé au chloroforme, tient à ce qu'il est beaucoup moins volatil que ce dernier corps.

AKINÉSIANTS.

Le cyanure hydrique ou acide hydrocyanique vient se ranger parmi les akinésiants ou agents paralysant le mouvement. Il est éminemment probable qu'il est d'abord anesthésiant; mais son action est si violente et si rapide, au moins dans les expériences dont il est ici question, que ce fait ne peut être jugé. Il le sera ultérieurement en employant des doses plus faibles sur des animaux vertébrés.

Administré à haute dose à ces animaux, non seulement il les paralyse et les fait périr, mais leur système musculaire perd sa ténacité en moins de vingt-quatre heures et il devient fort difficile, sinon impossible, de les disséquer.

3me Groupe.

Asphyxiants.

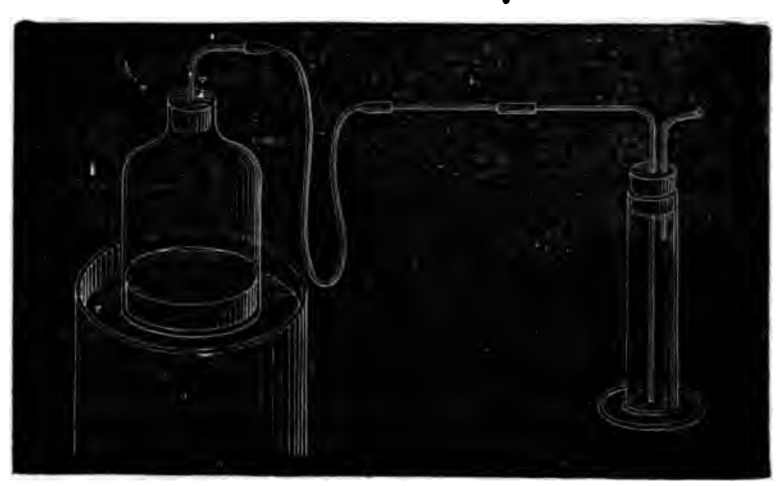
Les expériences que j'ai faites sur les produits de cet ordre ne sont pas aussi nombreuses que je l'aurais voulu; mais j'y reviendrai dans un prochain travail.

L'*hydrogène sulfuré* a été employé en versant simplement cinq centimètres cubes d'une dissolution concentrée de ce gaz dans l'eau dans une éprouvette semblable à celle qui a été décrite précédemment pour les expériences faites sur les alcools.

En une demi-minute, les mouches sont tombées asphyxiées et sans mouvement.

Le *sulfure ammonhydrique* a été employé de la même manière. Son action a été plus lente, mais elle a eu le même résultat.

L'*oxyde de carbone* a été employé en le faisant parvenir dans le fond d'une éprouvette qui contenait des mouches; elles sont tombées comme si elles avaient été foudroyées.



Le *sulfure de carbone*, employé à l'état liquide, comme les alcools, l'éther, etc., a produit des effets rapides, mais moins prompts que ceux résultant de l'action de l'oxyde de carbone.

4me Groupe.

Action indéterminée.

Parmi les corps de ce groupe, la naphtaline est celui qui mérite le plus que l'on y fasse attention. Quelques grammes de cette substance ont été placés au fond d'un flacon de deux litres à large ouverture, et ils ont été couverts avec de l'ouate.

Les mouches que l'on y a introduites sont mortes en moins d'une minute.

On peut d'après ce fait juger combien il est dangereux de respirer le gaz de l'éclairage, alors même qu'il est mêlé à une grande quantité d'air, car il doit principalement son odeur à la présence de la naphtaline.

Le coaltar, ou goudron du gaz, asphyxie aussi les mouches; mais il exige au moins une heure. Le goudron de bois ne les asphyxie pas en plusieurs heures. La chaux du gaz ne les asphyxie pas en quatre heures.

L'*essence de térébenthine* méritait aussi d'être essayée. Par suite des injections faites dans la vigne par M. Combes d'Alma, il importait de savoir si elle pouvait faire périr les insectes.

Introduite dans le fond d'une éprouvette où il y avait des mouches, comme celles qui ont servi pour les alcools. Ces dernières sont tombées après 6 minutes 30 secondes.

Le vapeur d'essence de térébenthine, si nuisible à l'homme qui séjourne dans des appartements peints à l'huile, qui en contiennent presque toujours à l'état de vapeur, est donc mortelle pour les insectes, et il y a lieu de penser que la petite quantité qui peut s'infiltrer dans le sol, peut aussi faire périr le phylloxera.

D'autres produits ont été essayés; mais les expériences ont besoin d'être répétées, afin qu'il soit possible d'en préciser le résultat.

CONCLUSIONS.

Les faits qui viennent d'être exposés, quoique incomplets au double point de vue du nombre des produits qui ont été employés et de celui des êtres sur lesquels ils ont été essayés, ne donnent pas moins des résultats de premier ordre et qu'il est utile de signaler à l'attention des hommes de science.

Il résulte effectivement des faits consignés dans ce travail, que les mouches, insectes infimes, étrangers en apparence aux animaux vertébrés, ne subissent pas moins des actions toxiques du même ordre que ces derniers : asphyxie, paralysie, soit anesthésie et akinésie, et finalement ivresse.

Ne semble-t-il pas résulter de ces observations que les phénomènes fondamentaux de la vie sont les mêmes chez tous les animaux, quelle que soit leur organisation : qu'ils soient insectiformes ou vertébrés?

Ne serait-on pas aussi conduit à conclure que, chez tous les animaux, il y a un être intime, primitif, fondamental, doué des principales fonctions de la vie, et que les organes dont il est revêtu ne servent que pour le mettre en rapport avec les circonstances dans lesquelles il se trouve. Tels seraient les systèmes respiratoires, nutritifs, moteurs et même nerveux.

J'aurai occasion de revenir sur ces faits, qui sont de la plus haute importance si on les applique à tout le règne animal, soit dans les conditions ordinaires de la vie, soit au point de vue médical.

SUR UN MOYEN

DE RECONNAITRE

L'IMAGE ORDINAIRE D'UN BI-RÉFRINGENT UNI-AXE

TAILLÉ SOUS LA FORME D'UN PRISME
DANS LE CAS DE RÉFLEXION TOTALE

PAR M. ABRIA

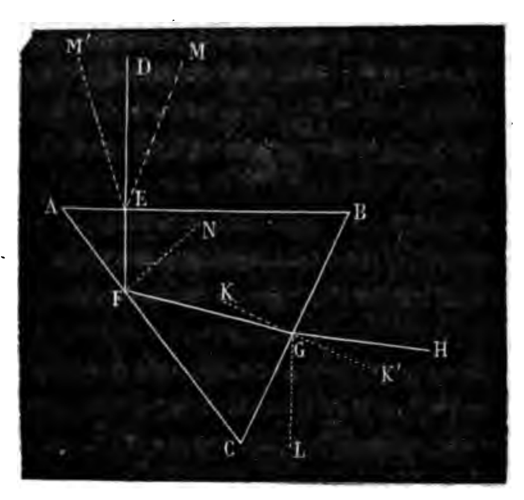
Dans une Note insérée au tome IX des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles,* j'ai indiqué un moyen à l'aide duquel on peut déterminer la section principale de chacune des faces d'un cristal bi-réfringent uni-axe et par suite la direction de l'axe lui-même. J'en ai fait usage dans mon travail sur la vérification de la loi d'Huyghens (1). Ce moyen consiste à faire tomber sur chaque face, normalement à sa direction, un rayon polarisé, dont on fait tourner le plan de polarisation jusqu'à extinction du rayon extraordinaire. Lorsque ce résultat est obtenu, la section principale cherchée est parallèle au plan de polarisation de la lumière incidente.

Il peut arriver, suivant la valeur de l'angle du prisme, que le rayon incident, en arrivant sur la seconde face, émerge ou éprouve sur cette face la réflexion totale. Si la substance est taillée de manière à offrir plusieurs angles dièdres, on peut, par des expériences préliminaires, savoir si elle est bi-uni-axe, et mesurer l'indice du rayon ordinaire. Dans le cas d'émergence du rayon

---

(1) *Annales de Chimie et de Physique,* 5e série, t. Ier; 1874.

incident, on peut, par conséquent, distinguer sans difficulté l'ordinaire et trouver la direction de la section principale. Je me propose, dans cette Note, d'examiner le cas de la réflexion totale et de faire voir qu'on peut encore distinguer sûrement l'image ordinaire.



Soit DE le rayon tombant normalement sur la face AB du prisme; l'ordinaire se propage suivant la normale EF, tombe sur la face AC sous un angle d'incidence égal à A, est réfléchi sous le même angle suivant FG, rencontre la face de sortie CB sous l'angle FGK et donne le rayon réfracté GH, dont la direction est liée avec celle de FG par la relation

$$\sin K'GH = n_0 \sin KGF,$$

n_0 étant l'indice ordinaire de la substance.

On a d'ailleurs

$$KGF = C - A.$$

Suivant que C — A sera positif ou négatif, FG se trouvera à gauche ou à droite de la normale KK'.

Le rayon GH est accompagné du rayon extraordinaire, non représenté sur la figure.

Si l'on mène par G la normale GL à AB, le rayon réfracté GH

fera avec GL un angle égal à $B \pm K'GH$, suivant que K'GH ou C — A sera positif ou négatif.

Si donc le prisme est monté sur la plate-forme d'un goniomètre pouvant donner au moins les minutes, on pourra, en dirigeant la lunette sur l'ouverture par laquelle entrent les rayons et sur le rayon GH, reconnaître si l'angle mesuré est bien égal à $B \pm K'GH$, et par suite s'il appartient au rayon ordinaire.

Il importe de diriger le rayon aussi exactement que possible suivant la normale à AB; on y parvient si l'on emploie la lumière solaire, en faisant entrer le trait lumineux par une ouverture circulaire étroite et en tournant la face AB jusqu'à ce que le rayon réfléchi revienne sur l'ouverture. Le prisme étant à un mètre de distance de celle-ci, une différence d'un millimètre dans la coïncidence des deux images directe et réfléchie correspond à une déviation d'avec la normale d'environ deux minutes.

Si, au lieu d'employer la lumière du soleil, on se sert de celle d'une lampe, le moyen indiqué pour rendre la face AB normale au rayon incident ne peut être mis en pratique, la lumière réfléchie étant trop faible. On peut, dans ce cas, user de la disposition suivante, qui convient également, du reste, pour la lumière solaire.

La lampe étant en D, on place quelque part, en M par exemple, une seconde lampe, et, avant de poser le prisme ABC, on mesure à l'aide du goniomètre l'angle $MED = \alpha$. Le prisme étant ajusté sur la plate-forme, on amène la lunette en M', en la faisant tourner à partir de la position dans laquelle elle est dirigée sur M, de $180° - 2\alpha$, et on dirige le prisme de manière que la face AB renvoie par réflexion l'image de M dans la lunette. Alors le rayon DE est normal à cette face, puisqu'il divise en deux parties égales l'angle des rayons incident et réfléchi.

Quelquefois les deux images ordinaire et extraordinaire sont très rapprochées, et les deux disques qui leur correspondent se recouvrent : il est bon, dans ce cas, d'interposer un Nicol sur le trajet du rayon DE, et on éteint successivement chacune des images.

Je rapporte quelques expériences de vérification.

VALEURS		REMARQUES.
CALCULÉES.	OBSERVÉES.	
57° 41'	57° 42'	Prisme de quartz dont l'axe est horizontal, parallèle à l'une des faces et perpendiculaire aux arêtes.
44° 25'	44° 25'	
75° 20'	75° 24'	
68° 6'	68° 9'	
47° 6'	47° 8'	
72° 25'	72° 25'	
60° 3'	60° 5'	Prisme de quartz dont l'axe a une direction parallèle à l'une des faces, mais oblique par rapport aux arêtes.
60° 8'	60° 10'	
60° 0'	60° 0'	
60° 6'	60° 9'	
60° 13'	60° 9'	
60° 3'	59° 59'	
60° 13'	60° 18'	Prisme de spath dont l'axe a une direction oblique par rapport aux faces.
60° 19'	60° 19'	
60° 15'	60° 8'	
59° 42'	59° 46'	
60° 12'	60° 12'	
60° 7'	60° 8'	
59° 46'	59° 42'	

Les différences entre le calcul et l'observation, différences qui, dans le tableau précédent, atteignent 7′ dans le cas du spath, proviennent de ce que je n'ai pas toujours pu rendre la face AB normale aux rayons incidents, surtout dans le cas de la lumière solaire dont j'ai été obligé de me servir, et qui ne restait pas rigoureusement parallèle à elle-même pendant l'expérience. Il est aisé de s'assurer que si le rayon fait avec la normale un angle α, la valeur calculée doit différer du même angle à fort peu près de celle qui convient au cas où le rayon est normal.



Photographie de Michelet, d'après un dessin relevé à l'orographe, par M. Fr. Schrader. Photoglyptie Lemercier et Cᵉ, à Paris.

LE MONT-PERDU VU DU SOUM DE PORT-VIEIL.

1. Pics de Niscle. — 2. Col de Niscle. — 3. Pic Blanc (2,836 mèt.). — 4. Soum de Ramond (3,305 mèt.). — 5. Mont-Perdu (3,351 mèt.). 6. Pic de Pinède (2,866 mèt.). — 7. Col du Cylindre (3,105 mèt.). — 8. Cylindre (3,327 mèt.). — 9. Brèche de Tuquerouye (2,675 mèt.). 10. Tuquerouye (2,822 mèt.). — 11. Sommet du Marboré (3,253 mèt.). — 12. Pic d'Astazou (3,080 mèt.).

ÉTUDES GÉOGRAPHIQUES

ET EXCURSIONS

DANS LE MASSIF DU MONT-PERDU

PAR FRANZ SCHRADER

Parmi les explorateurs qui ont parcouru depuis Ramond le chaînon calcaire du Marboré et du Mont-Perdu, aucun, si je ne me trompe, n'avait jusqu'à présent entrepris cette excursion dans un but exclusivement géographique. La nature de ces montagnes était depuis longtemps connue, tandis que leur forme était à peine soupçonnée, et nulle carte complète n'en existait encore, lorsque les circonstances et la passion des courses alpestres, bien plus qu'une volonté arrêtée à l'avance, m'ont amené à tenter de combler cette lacune. Maintenant que je puis me rendre compte du travail accompli, je crois avoir été heureux, sinon dans l'exécution de l'entreprise, du moins dans le choix de la région que j'ai essayé de reproduire. Il n'est peut-être pas au monde un ensemble de montagnes calcaires plus remarquable que celui qui nous occupe. Les formes y sont si puissamment ordonnées, les dimensions permettent à la nature intime des montagnes de se montrer avec une telle ampleur, chaque détail dépend si étroitement de l'ensemble, tout est si lié, si nécessaire, si fatal en quelque sorte, qu'on devine dès le premier coup d'œil une sorte de rhythme et de discipline dans l'agencement de ce chaînon pyrénéen. Ramond l'avait admirablement compris, et je serais fier si mon travail, inspiré par la lecture de ses voyages au Mont-Perdu, pouvait contribuer à faire de cette région ce qu'il voulait en faire : le type parfait, classique, des formations calcaires. J'ai simplement essayé, pour y parvenir, de déterminer non seulement les emplacements et les altitudes, mais encore la

physionomie et les formes particulières de ces montagnes; puisque les lois qui rassemblent les molécules d'un cristal sont les mêmes qui président à la formation des montagnes et des vallées, il m'a paru intéressant de pénétrer dans le détail d'une région particulière, de l'étudier jusque dans ses moindres recoins avec patience et avec amour. J'ai été largement récompensé par la joie de voir converger toutes les observations partielles dans un total plus harmonieux que je n'osais l'espérer, et de fixer dans un tableau d'ensemble les traits que Ramond avait si magistralement ébauchés.

Puisque la Société des Sciences physiques et naturelles a bien voulu faire figurer ma carte dans ses Mémoires, je lui dois quelques détails sur les montagnes que j'ai essayé de reproduire et sur les moyens que j'ai employés pour parvenir à ce but. Mais tout d'abord, je considère comme un devoir d'attribuer une large part dans l'accomplissement de l'œuvre à mon ami Léonce Lourde Rocheblave, qui a été de moitié dans tous mes travaux de relèvements. Son frère Albert, élève de l'École des Mines, que plusieurs de nos collègues ont connu et apprécié, nous avait accompagnés en 1872 et voulait nous aider dans notre excursion de 1873. La mort nous l'a enlevé avant cette époque, mais son souvenir n'a cessé de nous être présent, et nous avons certainement mis dans notre œuvre, en mémoire de lui, plus de soin et de scrupuleuse sincérité.

Depuis 1868 et 1869, nous avions déjà les uns et les autres fait de nombreux croquis de cette région qui, dès le premier coup d'œil, nous avait singulièrement frappés. Nos dessins, faits d'abord au simple point de vue du pittoresque, s'élargirent bientôt et devinrent des panoramas circulaires, sur lesquels, pendant les soirées d'hiver, nous nous efforcions, à l'aide des cartes de l'état-major, de discerner les pics ou les vallées que nous avions retracés sans en connaître les noms. Tout ne concordait pas, la vérification devenait parfois impossible, et devant les divergences nous ne pouvions que nous donner tort. Rien cependant ne nous disait que nous n'avions pas raison, et le désir d'en avoir le cœur net nous donna la pensée de contrôler nos dessins,

non plus après coup, mais à l'avance, de façon que l'examen de la nature devînt une dernière vérification. Le moyen très simple que nous employâmes contenait en germe l'appareil qui nous a servi à relever la carte définitive. Voici en quelques mots ce moyen, que je recommande aux explorateurs de montagnes.

Je prends un cercle de papier fort, dont le centre est relié à la circonférence par deux minces bandes croisées. Ce centre est fixé sur la carte, à l'aide d'une épingle, en un point où nous pensons nous élever. Un fil, attaché à l'épingle et promené sur la contrée environnante, rencontre à des angles divers les cimes ou les vallées dont nous marquons la direction sur le cercle. Ces lignes, transportées à une échelle quelconque sur une large bande de papier, nous donnent autant de verticales, sur lesquelles il est facile de déterminer l'emplacement exact de chaque cime, à l'aide d'un tableau indiquant l'angle d'une différence de hauteur quelconque pour une distance donnée.

C'est ainsi qu'avant même d'avoir gravi un sommet, nous pouvions nous rendre compte des montagnes qu'il nous permettrait de voir, et de celles qui, plus puissantes peut-être, mais plus lointaines, devaient être complètement cachées ou n'apparaître qu'en partie. En reliant nos cimes par des arêtes théoriques, légèrement tracées en couleur, nous évitions toutes ces erreurs si fréquentes de distances interverties, de massifs confondus ou dédoublés, de pics pris les uns pour les autres; erreurs que rendent presque inévitables la distance, les ombres, les teintes des rochers, la fatigue, les interpositions de nuages, et toutes les illusions produites par un entassement de montagnes au milieu desquelles le regard se perd.

Avant de nous élever sur une cime, nous apprenions pour ainsi dire par cœur le panorama qu'elle devait nous offrir, et grâce à l'admirable exactitude des principales triangulations de l'état-major, nous retrouvions presque toujours nos lignes dans les montagnes entassées devant nous; mais combien grandies, combien embellies et transfigurées! Une joie intense, inconnue aux simples touristes, nous transportait pendant que nos enfilades de sommets, théoriquement retracés par de simples angles,

devenaient des mondes de rochers noirs, crevés de fondrières, hérissés d'aiguilles ou drapés de glaciers, et que notre regard, se dirigeant de crête en crête et de massif en massif, dégageait de toutes ces splendeurs les noms que nous y avions inscrits à l'avance.

Cependant, certains détails relevés sur la carte ne concordaient pas exactement avec la réalité, mais alors la vérification était facile, et nous n'abandonnions les données de l'état-major que la carte en main, avec la plus grande circonspection, et lorsque les montagnes nous avaient bien démontré qu'elles ne se conformaient pas au tracé officiel. Le seul inconvénient de ce système était de nous obliger à décider longtemps à l'avance les ascensions projetées; mais n'était-ce pas plutôt un avantage, puisqu'il nous forçait à bien choisir, et surtout à choisir en vue d'un but déterminé?

Ce but fut bientôt trouvé, et je commençai à modeler un relief de la vallée de Luz et des montagnes qui l'entourent; relief inachevé du reste, et trop élémentaire pour avoir une valeur quelconque.

Nos explorations furent interrompues en 1870 et 1871; mais, en 1872, nous les reprenions avec de nouvelles études et de nouveaux projets; cette fois, le relief devait s'étendre jusqu'au Mont-Perdu. Mon collaborateur avait, du reste, déjà gravi sans moi le colosse calcaire, et en avait sculpté un relief partiel qui, malgré quelques proportions inexactes, est jusqu'à présent le plus complet qui existe, et reproduit parfaitement le caractère étrange du Mont-Perdu.

Ce caractère nous frappa, en 1872, d'une façon toute particulières. Des crêtes du pic Long, que nous avions escaladées pour embrasser d'un coup d'œil le vallon de Cestrède [1] et le chaînon si compliqué de Saint-Sauveur, le massif calcaire nous appa-

---

[1] D'après la carte de l'état-major, les ruisseaux du vallon de Cestrède couleraient de bas en haut : l'un, celui de Cestrède, monterait du lac de ce nom (1,967m) au lac d'Arrouyes (2,016m), où il rencontrerait l'embouchure du ruisseau de Caoubarolle, dont la source serait inférieure à 1,696m. Cela méritait d'être vérifié.

rut avec une splendeur inouïe. Sur cet observatoire élevé de 3,100 mètres, — une chute dans le glacier me mettant hors d'état d'atteindre la cime (3,194m), — je discernais pour la première fois en entier l'ordonnance grandiose du Marboré et du Mont-Perdu, la continuité et les inflexions immenses des murailles ou des terrasses glacées, et surtout l'étonnant parallélisme de toutes les parties de ce chaînon. Par malheur, à partir de la frontière, les documents nous manquaient, et l'aspect des grandes sommités espagnoles ne concordait guère avec les vagues renseignements que nous avions pu glaner çà et là. A gauche et un peu en arrière du Mont-Perdu, un second pic, arrondi, neigeux, chargé de glaciers, s'élevait presque à la hauteur du sommet principal. Ce pic, invisible du Piméné [1], du Bergons, de Néouvielle, et certainement plus perdu que le Mont-Perdu lui-même, n'avait jamais été mentionné; il occupait l'emplacement où, d'après les descriptions de Ramond, on avait jusque-là placé le col de Niscle, et les guides ne lui connaissaient pas de nom. Celui de Ramond lui fut immédiatement imposé. Dans le piédestal de gradins qui servait de base à cette montagne superbe s'ouvrait la vaste dépression du col de Niscle, beaucoup plus à l'Est que nous ne l'aurions supposé.

Plus loin s'élevaient quatre pyramides neigeuses, de hauteur et de forme semblables, dont les stratifications horizontales brillaient comme des ceintures d'argent. Le reste du massif espagnol nous était caché; mais plus près de nous, et devant ce merveilleux fond de tableau, s'enfonçaient à d'énormes profondeurs les trois cirques de Troumouse, d'Estaubé et de Gavarnie, dont presque toutes les cimes se trouvaient sous nos pieds. Le grand cercle de murailles noires de Troumouse nous apparaissait en entier au-dessus de son soubassement d'éboulis, de neiges et de croupes vertes. Plus à droite, Estaubé développait ses longues pentes herbeuses, d'où surgissait brusquement, presque au pied du Mont-Perdu, un double étage de murs à pic drapés d'écharpes de

---

[1] On voit à la rigueur le Soum de Ramond depuis le Piméné ou le Bergons; mais il faut y apporter une attention extrême; il apparaît comme une petite ligne de roche au-dessus de la croupe neigeuse du Mont-Perdu.

glace. Mais de même que les murs et les glaciers de Troumouse se suivaient avec des formes d'un type tout particulier, de même ceux d'Estaubé semblaient obéir à un rhythme différent. Quant à Gavarnie, dont les multiples étages de glaciers brillaient par dessus les pentes modestes du Piméné, ses terrasses nous présentaient un troisième type, absolument distinct des deux autres.

C'est alors que nous fûmes frappés de la banalité des indications topographiques de l'état-major. Estaubé surtout n'y était pas reconnaissable, et nulle indication de la carte ne pouvait faire soupçonner la disposition réelle, la physionomie géologique de cette merveille pyrénéenne. Les murs de Gavarnie s'interrompaient brusquement au pied du Marboré, au lieu de se prolonger à travers le système du Mont-Perdu, placé par malheur au delà des frontières. Ces murs n'étaient même représentés que par à peu près du côté français, bien que la physionomie générale du cirque fût plus reconnaissable que celle d'Estaubé. Quant à Troumouse, l'immense développement de son aire de pâturages le désignait évidemment, mais d'une façon incomplète, comme un objet sortant des formes ordinaires. Je me hâte d'ajouter que les triangulations et les emplacements des pics étaient, comme toujours, scrupuleusement exacts; cependant, nous pûmes relever quelques erreurs : le grand pic du Montarrouye, par exemple, était visiblement à 300 ou 400 mètres de la place que lui assignait l'état-major. Le pic Rouge de Pailla s'écartait aussi, mais légèrement, de la direction indiquée, et nous pûmes, deux jours après, reconnaître du Piméné une erreur de 900 mètres dans la position du vallon d'Aguila, et une différence de 500 mètres en hauteur dans les crêtes qui le bornent au S.-O. Quant au glacier oriental du pic Long, fort crevassé, long d'un kilomètre et presque aussi large, il ne figurait pas sur nos cartes officielles, non plus que l'étang glacé qui domine le vallon de Cap-de-Long, et dont l'entourage de rochers et de neiges n'avait évidemment pas été visité par l'officier chargé de relever cette région [1].

---

[1] Tout ce massif ne figure pas sur ma carte.

Et, du reste, comment le tracé topographique eût-il pu traduire fidèlement l'aspect du terrain ?

Exécuté à Paris par des ouvriers qui n'avaient pas vu ce qu'ils devaient reproduire, et qui travaillaient sur des lignes de niveaux et de pentes, ce tracé ne pouvait évidemment donner que des indications de formes très vagues et très banales.

La rare magnificence du spectacle qui se déroulait devant nous, le caractère de régularité de ces montagnes calcaires, nous inspirèrent immédiatement le désir de refondre et de compléter, pour cette région, le travail de l'état-major en le poussant jusque sur le versant espagnol, de telle façon que le tracé du relief pût servir non seulement au géographe, mais encore au géologue. Je n'ose espérer que nous y soyons parvenus, mais nous avons du moins fait un pas dans cette voie.

Les brouillards nous prirent le lendemain, comme nous partions pour le Mont-Perdu. Six jours durant, nous fûmes enveloppés de nuages, et il nous fallut renvoyer à 1873 l'exécution de notre plan. Ce plan, du reste, avait besoin d'être mûri.

Du côté de la France, l'œuvre était relativement facile : il ne s'agissait que de corrections et de remplissage. Les emplacements, les altitudes, tout était préparé. Mais pour le côté espagnol, rien de semblable : là, tout était à créer, et ce que représentaient les géographes au delà de nos frontières aurait tout aussi bien pu figurer un fragment des Alpes ou de l'Hymalaya. J'en excepte les deux cartes de M. Packe et de M. Wallon, dont les indications pouvaient nous être utiles en quelques points comme jalons, mais seulement pour l'enchaînement général de quelques vallées principales et la situation des lieux habités. Un fait suffira pour prouver combien les autres documents, même officiels, étaient peu dignes de confiance. La carte française du génie militaire, en quatre feuilles, *refondue en 1873,* admet encore l'existence du lac hypothétique du Marboré, et place en Espagne, dans ce lac, la source du Gave de Pau, qui entrerait ainsi en France par le revers du Marboré, à travers une longue vallée de glaciers malheureusement imaginaire. Le lac existe, mais à la base septentrionale du Mont-Perdu, et ses eaux s'écoulent latéralement

dans la Cinca, affluent de l'Èbre. Il y a bien un autre lac, beaucoup plus petit, sur le versant méridional du Cylindre; mais celui-ci se déverse, à travers les profondeurs du sol, dans le torrent de la vallée espagnole d'Arras.

M. Packe, le confondant avec le grand lac, en fait sortir un torrent de décharge qui, d'après lui, contournerait le Mont-Perdu à l'occident, et formerait ainsi la Cinca, tandis que M. Wallon en envoie le trop-plein dans la vallée de Niscle qu'il substitue à celle d'Arras, modifiant ainsi tout le système des crêtes et des vallées.

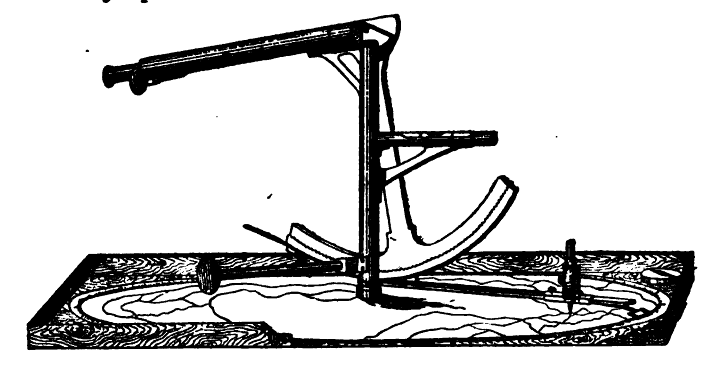
Ai-je besoin d'ajouter qu'en dépit de toutes les vieilles affirmations, la frontière suit exactement la ligne de faîte des cirques de Gavarnie, d'Estaubé et de Troumouse? Ceux qui ont suivi les travaux de MM. Russell-Killough, Packe, Frossard fils, etc., le savent depuis longtemps. Malheureusement ces travaux, purement descriptifs, n'étaient pas accompagnés de cartes, et la raison de cette lacune est fort simple.

Il n'est pas aisé de tracer des cartes dans une région semblable. Tout s'y oppose : le froid, la fatigue, le manque d'eau sur les cimes, la rareté de l'air, la nécessité d'emporter avec soi tout un campement, des vivres pour plusieurs jours, des appareils compliqués, tout cela pour rapporter quelques angles péniblement relevés, au milieu desquels une seule erreur peut troubler les souvenirs et déformer toute une vallée sur le tracé définitif; enfin, la difficulté de reconnaître de plusieurs points les mêmes pics désignés par de simples directions, sans compter les souffrances auxquelles s'exposerait celui qui voudrait demeurer longtemps dans ces régions élevées, tout cela rend bien difficile, dans les conditions ordinaires, un travail géographique tant soit peu complet. Il nous fallait cependant accomplir notre œuvre, créer une carte du Mont-Perdu et du Marboré. La passion s'en mêlait, et la raison n'avait plus d'autre rôle que de trouver les moyens.

Ne pouvait-on pas simplifier le travail au point de le terminer en peu de jours, dont deux ou trois seulement devraient être passés au milieu des glaces?

La difficulté était d'abréger la besogne et de conserver cepen-

dant de sérieuses garanties d'exactitude. Albert Lourde avait d'abord proposé d'employer le sextant, mais le sextant ne nous eût donné que des mesures isolées, dont chacune eût demandé à être lue et transcrite, puis reprise pour la visée suivante. Un mois n'eût pas suffi pour débrouiller ce chaos de cimes inconnues, et combien d'erreurs n'eussions-nous pas commises, surtout avec deux séries d'observations, les unes horizontales, les autres verticales? Le théodolite présentait à peu près les mêmes inconvénients pour un travail rapide. En y réfléchissant, il nous parut que nous pourrions réaliser notre projet au moyen d'un appareil suffisamment complet pour mesurer du premier coup et inscrire en même temps mécaniquement tous les points de l'horizon : les pics à leurs angles exacts, les vallées à leur profondeur réelle, les pentes à leur déclivité véritable, les roches avec leur caractère et leur physionomie propre. Il s'agissait, en un mot, de décalquer l'horizon de chaque point de vue, de sorte qu'après un simple relèvement circulaire, nous pussions emporter dans notre sac, non pas des chiffres ou des notes, mais la chaîne de montagnes elle-même, avec ses formes, ses directions et ses hauteurs. Après de nombreux tâtonnements, voici l'appareil que j'imaginai dans ce but, et auquel, sur le conseil de notre collègue M. Hoüel, j'ai donné le nom d'*Orographe*.



Cet appareil se compose essentiellement d'un plateau horizontal, au centre duquel s'élève un axe creux, perpendiculaire au plan du plateau, et contenant un fil à plomb. Autour de cet axe tourne à

frottement doux un second tube muni d'un niveau à bulle d'air. Ce tube porte, à sa partie inférieure, un bras horizontal qui le suit dans ses mouvements de rotation, et au sommet une lunette, fixée à un arc de cercle mobile dans un plan vertical. Cet arc de cercle venant effleurer par sa partie inférieure la face supérieure du bras, un ressort fixé à l'arc de cercle, et portant un crayon à son extrémité, avance ou recule le long du bras, suivant les mouvements verticaux de la lunette, dont les mouvements tournoyants, entraînant horizontalement le tube extérieur et le bras, font décrire au ressort et au crayon [1] des cercles plus ou moins étendus.

Les deux mouvements se combinant de façon à correspondre exactement aux directions de la lunette vers les différents points de l'espace, il en résulte que tous ces points visés successivement par la lunette se reproduisent en traits de crayon sur une feuille de papier fixée à la surface du plateau.

Le plateau est agencé de façon à pouvoir se replier comme une boîte et à renfermer tout l'appareil sous un volume aussi peu considérable que possible.

L'orographe étant posé sur un trépied muni d'un genou, je décoiffe le tube intérieur, que je dresse jusqu'à ce que le fil à plomb, visé par quatre fenêtres à angle droit, soit exactement dans le centre du tube. Posant alors le second tube avec tous les organes qui l'accompagnent sur cet axe vertical, je m'assure de la verticalité par le moyen du niveau; puis, portant la lunette dans une position telle que l'arc de cercle indique une inclinaison de 0°, je serre cet arc à l'aide d'une vis de serrage et je fais décrire à l'appareil un tour horizontal, pendant lequel le crayon trace sur le papier un cercle qui doit rencontrer tous les points de l'horizon situés à la même hauteur que le point d'où j'opère. Une série de cercles concentriques me fournit une échelle d'angles verticaux, après quoi, rendant à la lunette toute sa liberté, je la porte en

---

[1] Le crayon peut être remplacé par une pointe de métal qui laisse une trace sur un papier préparé.

relevant le crayon vers le point d'où je veux faire partir ma visée circulaire; puis, laissant de nouveau le crayon s'abaisser sur le papier, je vise à travers la lunette le contour des montagnes, des vallées ou des glaciers, de façon que le centre de la croisée de fils se projette exactement sur les points visés. A chaque point important, je m'arrête pour imprimer à la lunette deux séries de mouvements, les uns verticaux, les autres horizontaux, passant tous par le point visé, et j'obtiens sur le papier une moyenne en forme de croix, dont le centre me donne l'emplacement du point cherché. *(Voir fig. 5.)*

J'ai négligé, dans cette courte description, de mentionner certains organes destinés à augmenter l'exactitude ou à faciliter la manœuvre. Ainsi, le plateau porte un cercle gradué sur lequel vient s'appliquer un vernier fixé à l'extrémité du bras. L'arc de cercle correspond également à un vernier vertical. Le ressort est fixé à l'arc de cercle par le moyen d'une vis de serrage, qui permet de l'allonger ou de le raccourcir, afin de donner au jeu du crayon le plus de latitude possible, soit qu'on ait à viser des élévations, soit qu'on s'occupe de profondeurs. Les mouvements de la lunette sont dirigés par une tige fixée au tube extérieur, portant à une de ses extrémités un large bouton, et à l'autre bout une petite roue dentée commandant un engrenage appliqué à l'arc de cercle. En faisant tourner la roue dentée, on obtient les mouvements verticaux, et il suffit de pousser la tige à droite ou à gauche pour obtenir les mouvements horizontaux.

On le voit, l'orographe supprime les lectures, les calculs, les interruptions de travail, les mesures d'angles. Une erreur devient à peu près impossible, puisque la vérification se fait toute seule par la concordance du point de départ avec le point d'arrivée, et le relèvement du pays le plus tourmenté se réduit à une simple opération mécanique, après laquelle on emporte avec soi la reproduction même de la région explorée.

Pour dresser une carte à l'aide des documents circulaires fournis par l'orographe, je n'ai qu'à poser le centre de chaque visée sur le point déjà connu d'où elle a été prise. Après quoi, orientant

mon horizon de façon à faire concorder un autre point connu avec la direction que lui donne la visée circulaire, j'obtiens une base fixe, et je n'ai plus qu'à projeter des rayons par tous les points que je juge à propos de déterminer. Plis de terrains, ressauts, failles, crêtes dentelées, tous les détails même les plus infimes, peuvent fournir leur rayon sur la carte projetée.

Si maintenant, d'un autre centre et au moyen d'une autre base, je mène d'autres rayons par les mêmes points, il est évident que l'intersection des rayons me donnera l'emplacement cherché, et que si les lignes fournies par une troisième visée viennent couper exactement l'intersection des précédentes, la certitude deviendra complète. Dès lors, connaissant la hauteur du point d'observation, la distance du point visé, et l'angle que forme avec l'horizontale la ligne joignant ces deux points, je puis faire le calcul de la différence de leurs hauteurs, et obtenir ainsi autant de nombres que j'ai de visées différentes. Si ces nombres concordent, tout est pour le mieux. S'ils ne concordent pas *exactement*, mais si les différences sont minimes, j'en prends la moyenne, que j'admets comme hauteur approximative du point cherché.

Telle est la méthode que j'ai suivie pour relever les environs du Mont-Perdu. Trois principaux points de visée avaient été déterminés à l'avance : le Piméné, haut de 2,803 mètres; la Brèche de Roland, plus élevée d'un mètre seulement; enfin, une petite terrasse située à 40 mètres environ au-dessous du sommet du pic de Port-Bieil, et de niveau avec la Brèche de Roland. Ces trois visées devaient me fournir un réseau de triangles principaux, auxquels viendraient se joindre d'autres relèvements plus détaillés, pris du Mont-Perdu, du col du Cylindre, enfin de tous les points qui nous permettraient une observation sérieuse.

II

Le 3 août 1873, dans l'après-midi, nous arrivâmes à Héas, où nos guides avaient déjà été prévenus. Les préparatifs de l'expédition furent vite faits, et le lendemain matin à six heures, nous nous

dirigeâmes vers le sommet de Port-Vieil. Chapelle, le chasseur d'isards, devait diriger l'expédition. Je portais mon orographe; Lourde, une chambre obscure portative destinée à compléter les détails; un autre compagnon de voyage, F. Bourdil, devait nous rejoindre à trois heures de l'après-midi dans le cirque d'Estaubé, avec un objectif photographique et vingt plaques préparées au collodion sec. De plus, nous nous étions munis d'une boussole, d'un niveau portatif consistant en un long tube en caoutchouc terminé par deux tubes de verre recourbés, d'une longue-vue à grande portée, d'une hache et d'une forte corde, ainsi que de lunettes fumées et de voiles noirs; enfin, nous portions un thermomètre et un baromètre métallique, et M. Bordères, l'instituteur de Gèdres, nous avait promis d'observer ses baromètres d'heure en heure jusqu'au jour de notre retour. Il le fit avec la plus grande exactitude; mais cela nous servit peu, car le nôtre reçut dès le premier jour un coup qui lui rendit tout fonctionnement impossible.

Je n'ai pas besoin d'ajouter que notre bagage de vêtements et de couvertures était réduit au strict nécessaire. Quant aux provisions, deux chasseurs de Héas, Francès et Jean-Marie, portaient de quoi nous faire vivre pendant quatre jours.

Cinq heures d'ascension dans les escarpements calcaires du Gabiédou [1] nous portèrent sur la cime de Port-Vieil. La première heure fut employée à parcourir les pentes éboulées et les vastes pâturages qui dominent le vallon de Maillet; puis nous attaquâmes les murailles du Gabiédou contre lesquelles il fallait nous élever, d'abord par d'étroits ressauts d'herbe glissante, puis dans le lit incliné d'une cascade et sur des corniches humides, enfin sur de longues pentes de rochers et d'interminables surfaces de neige. Pendant les haltes, nos regards étaient surtout attirés par l'archi-

---

[1] Le Gabiédou est situé au-dessus du vallon de Maillet, et le pic du Gabiétou au fond de la vallée de Pouey-Espée. Ces deux noms, évidemment synonymes, ne diffèrent que par une nuance de prononciation à peine sensible.

tecture du cirque de Troumouse, dans l'immense pourtour duquel s'inscrivait l'orbe plus modeste du cirque de Gabiédou.

Ainsi contemplé d'un peu haut, Troumouse est merveilleux de majesté, avec son plateau de pâturages aux formes ondulées, sur lesquelles le soleil chatoie comme sur les vagues d'une mer tranquille; son ravin de Touyères, ouvert comme un gouffre au milieu du plateau de granit, et le formidable cercle de murailles neigeuses qui surgit brusquement tout autour de la plaine immense, remplissant le ciel de ses grandes parois verticales, de ses crêtes éboulées et de ses glaciers. Le cercle est si complètement fermé, que c'est à peine si quelques cimes du massif du pic Long apparaissent dans l'ouverture du cirque. Mais en arrivant sur la crête de Port-Vieil, le spectacle devient plus sublime encore. Pour ma part, je ne connais rien de plus imposant dans les Pyrénées. Tout l'horizon du Sud est encombré par les glaciers et les murailles superposées du Mont-Perdu. Vers la gauche, et séparée du revers de Troumouse par la profonde vallée de Bielsa, s'éloigne vers le Sud-Est une muraille de 1,300 mètres de haut et d'un seul jet. Découpée en cannelures verticales par le travail des siècles, portant aux trois quarts de sa hauteur plusieurs corniches horizontales dont les strates argentées de neige se prolongent aussi loin que l'œil peut les suivre, cette paroi se couronne alternativement de cimes pyramidales et de larges dépressions arrondies, avec une régularité solennelle. Des forêts de sapins en revêtent la base, et plus bas, dans la pénombre de l'atmosphère inférieure, la Cinca brille entre deux zones de prairies. L'aspect de cet énorme rempart est si frappant que les habitants du pays lui ont donné un nom caractéristique : « Ets. Parets de Pinède » (les parois de Pinède).

Vers la droite, et en avant du Mont-Perdu, les pointes déchirées et les glaciers vertigineux d'Estaubé se déroulent jusqu'aux sommités qui dominent Gavarnie. Le pic Blanc, le sommet de Port-Neuf, le pic de Pinède, les murailles et le sommet de Tuquerouye, forment un amphithéâtre colossal, dont le couronnement nous domine à peine de quelques mètres, tandis que les ravins qui en

descendent fuient en convergeant dans des profondeurs vaporeuses, au fond desquelles serpente la traînée blanche du Gave d'Estaubé.

Quant au Mont-Perdu et au Cylindre, qui forment le fond du tableau, Ramond seul a pu les décrire :

« Le majestueux support de ces deux sommités, dit-il, taillé du même ciseau qui a façonné les étages du Marboré,... présente une suite de gradins, tantôt drapés de neiges, tantôt hérissés de glaciers qui débordent et se versent les uns sur les autres en larges et immobiles cascades. » « J'ai vu les hautes Alpes; je les ai vues dans ma première jeunesse, à un âge où on voit tout plus beau et plus grand que nature; mais ce que je n'y ai pas vu, c'est la livrée des sommets les plus élevés revêtue par une montagne secondaire. Ces formes simples et graves, ces coupes nettes et hardies, ces rochers si entiers et si sains dont les larges assises s'alignent en murailles, se courbent en amphithéâtres, se façonnent en gradins, s'élancent en tours où la main des géants semble avoir appliqué l'à-plomb et le cordeau, voilà ce que personne n'a rencontré au séjour des glaces éternelles. »

« Du Mont-Blanc même, il faut venir au Mont-Perdu. Quand on a vu la première des montagnes granitiques, il reste à voir la première des montagnes calcaires. Ici, ce n'est point un géant entouré de pygmées. Telle est l'harmonie des formes et la gradation des hauteurs, que la prééminence de la cime principale résulte moins de son élévation relative que de sa figure, de son volume, et d'une certaine disposition de l'ensemble qui lui subordonne les objets environnants. » « Cette cime est le dernier de tant de rochers amassés l'un sur l'autre; c'est vers elle que remontent, comme à leur source, les glaciers amoncelés sur les rives du lac; c'est d'elle que descendent toutes ces nappes de neige qui tapissent les gradins, se déroulent sur les pentes, se déchirent à mesure qu'elles s'éloignent, et ne couvrent qu'elle seule d'un voile qui ne s'entr'ouvre jamais. » Qu'on se figure un dôme arrondi, « placé à l'angle d'un long toit qui se dirige parallèlement à la chaîne, et s'incline en pente douce du côté du levant. Dans toutes ces mon-

tagnes, c'est le seul talus d'inclinaison modérée et le seul sommet qui ait quelque chose des formes ordinaires. Il semble que la nature, lasse d'entasser étages sur étages, ait essayé de les couronner d'un comble, et que ce comble se soulève avec peine dans la haute région où nul autre sommet n'ose s'élancer. »

Après un moment accordé à l'émotion et au besoin de repos, nous dressâmes nos instruments, et pendant que je relevais les montagnes des Parets, le massif du Mont-Perdu et les cimes d'Estaubé, à l'aide de l'orographe, Lourde calquait avec soin dans la chambre obscure les formes et la disposition des glaciers et des murs du Mont-Perdu.

Après une demi-heure de travail, nous pûmes comparer nos deux relèvements : ils étaient conformes l'un à l'autre; désormais nous pouvions marcher avec confiance, nous étions sûrs de réussir.

Il était une heure quand nous quittâmes le Soum de Port-Bieil; une longue descente dans un couloir à moitié plein de neige nous conduisit au fond du cirque d'Estaubé, où nous arrivâmes à quatre heures et demie, et où nos compagnons, venus de Héas par les vallées, ne tardèrent pas à nous rejoindre. Nous nous trouvions au centre d'un entonnoir de murailles sauvages, monstrueuses, dans lesquelles deux fentes verticales, entièrement comblées de neige et de glace, s'élevaient jusqu'à deux brèches déchiquetées.

A la base des murailles s'étendait une nappe de neige qui suivait les inflexions du rocher, et des crêtes de Gavarnie à celles de Troumouse le regard se perdait en suivant contre le ciel les créneaux et les embrasures du cirque. Au bout d'un instant, cependant, aidés par nos recherches des années précédentes, nous arrivâmes à débrouiller ce chaos. Une dépression plus profonde et plus large que les autres séparait les murailles méridionales d'un groupe de montagnes situé plus au Nord, entre Estaubé et les crêtes de Troumouse. Cette dépression, vers laquelle s'élevait obliquement une large terrasse d'éboulements, était dominée à droite par un rocher abrupt auquel succédait la longue rangée

de murs, et à gauche par les flancs contournés et plissés du groupe de montagnes dont je viens de parler, et que nous reconnaissions aisément d'après les descriptions de Ramond. Nulle autre région, en effet, ne présente des stratifications aussi bouleversées, des plis aussi désordonnés, des cassures aussi imprévues. Qu'on triture dans tous les sens une matière prête à se figer, on obtiendra à peine l'image des torsions de veines qui se présentent du haut en bas de cet étrange massif; torsions si profondes et si intimes que, dans un fragment de marbre ramassé près de là, Ramond trouva, empâtés dans la pierre, de petits tourbillons en spirale, dont le remous avait suivi le mouvement général des couches.

Mais d'autres recherches nous occupaient : nous nous étions interdit toutes les considérations géologiques, afin d'éviter les idées préconçues, que nous eussions ensuite été tentés de confirmer dans le tracé de notre carte. Nous voulions nous contenter de voir et de reproduire tout naïvement ce que nous aurions vu.

Pour cela, une nomenclature exacte nous eût été nécessaire, et nous avions déjà remarqué la confusion qui régnait dans les noms des ports ou des cimes d'Estaubé. Le port de Pinède de l'état-major ne redescendait pas sur la vallée de Pinède. La Canaou d'Estaubé, dont l'emplacement était occupé par la vaste dépression dont je viens de parler, ne présentait pas la moindre apparence d'une canaou, c'est-à-dire d'un canal étroit et escarpé; tout au contraire, elle formait l'extrémité d'une terrasse immense et doucement inclinée. Cette dépression portait dans le pays le nom de Port-Neuf, et ce nom n'existait pas sur les cartes de l'état-major. Le pic de Pinède, en revanche, y figurait, mais dans une position telle, qu'il était invisible pour la vallée de Pinède ou de Bielsa, qu'il eût dû dominer. Quant au couloir glacé de Tuquerouye, qui devait nous servir d'échelle pour arriver en face du Mont-Perdu, c'était justement lui que l'état-major désignait sous le nom de Port de Pinède.

Les altitudes gravées à côté de ces ports ne s'appliquaient souvent ni aux ports ni aux pics, mais à d'infimes pointes de

roches situées dans des positions favorables à l'observation entre les uns et les autres.

Le chiffre 2665, par exemple, gravé assez près de la prétendue Canaou, désignait la hauteur d'un petit rocher assez remarquable qui surgit à moitié chemin de la cime du pic Blanc. Seul, le Port-Vieil était à sa place, mais accompagné du chiffre 2762, altitude d'un pic voisin, dont le nom fut pour nous un trait de lumière : c'était le pic de la Canaou. La Canaou elle-même ne pouvait être loin.

Nos guides n'avaient rien à nous apprendre; ils n'étaient d'accord que sur un point, c'est que l'état-major se trompait. Mais l'un plaçait le point controversé à Tuquerouye, qui présentait en effet des escarpements assez inquiétants; l'autre soutenait que la Canaou d'Estaubé n'avait jamais existé, et que ce nom venait d'une confusion avec celle de Troumouse, située sur l'autre versant des montagnes à couches contournées. Le *Guide-Joanne*, de son côté, nous indiquait, à droite du Port-Vieil, une Canaou d'Estaubé dont nous ne pouvions voir la moindre trace. M. Russell-Killough, dans ses « Grandes ascensions des Pyrénées », se conformait aux indications de noms de l'état-major, tout en doutant des altitudes. M. Packe, transportant la Canaou à Tuquerouye, admettait à part cela les indications de l'état-major, bien qu'il prît la précaution de faire remarquer la confusion qui régnait dans toute cette nomenclature. Quant à M. Wallon, dont la carte venait de paraître, il n'avait pas eu le loisir d'examiner cette région, et reproduisait les travaux antérieurs, sauf pour la Canaou, qu'il élevait à 2,866^{m}. Il m'écrivit du reste peu de temps après pour nous prier de revoir la légende de son *Panorama du Piméné*, et nous eûmes la satisfaction de lui voir adopter, sur notre avis, les noms et les altitudes que nous avions fini par déterminer.

Pour accomplir, avec l'aide de nos guides, cette œuvre de critique géographique, nous commençâmes par établir que le célèbre port de Pinède devait nécessairement conduire dans la vallée de Pinède. Dès lors, plus de doute; ce nom devait être appliqué au large Port-Neuf. Le port de Pinède de l'état-

major reprenait son nom de Tuquerouye, avec une altitude de 2,675 mètres, celle de 2,822 mètres qu'on lui avait attribuée jusque-là se reportant sur le sommet voisin, auquel nous retirions le nom de Pic de Pinède pour le donner à une superbe cime de 2,866 mètres, qui s'élève au centre des murs d'Estaubé et domine directement au S.-E. la vallée de Bielsa. Le Port-Neuf, coté par M. Packe à 2,665 mètres, s'abaissa devant l'orographe jusqu'à 2,524 mètres. Les 2,720 mètres de la Canaou de l'état-major devinrent l'altitude du rocher qui domine le Port-Neuf; enfin, le Port-Vieil descendit de 2,762 mètres à 2,627, et le problème ainsi simplifié ne nous présenta plus qu'une seule inconnue, la Canaou d'Estaubé. Je persistais à la placer au-dessous du Port-Vieil, dans le couloir où nous étions descendus, et que dominent au Nord et au Sud les pics de la Canaou et d'Estaubé. Les guides résistaient encore. Il ne fallut, pour nous entendre, que bien fixer le sens du mot *canaou*. Une canaou est rarement un port, mais presque toujours le chemin qui conduit à un port. Ramond l'avait déjà remarqué. « La Canaou de Troumouse, dit-il, est un canal fort étroit et fort incliné, une véritable gouttière resserrée entre deux bastions, et qui vomit tour à tour des torrents, des lavanges et des pierres; elle a donné son nom au port. » Tous les mots de cette description pouvaient s'appliquer exactement à la coulisse de rochers que nous avions devant nous; le doute ne fut bientôt plus possible, et les guides consentirent d'autant plus volontiers à placer la Canaou où nous la placions nous-mêmes, qu'il n'y avait pas moyen de la placer ailleurs. Comme il arrive toujours quand la certitude est acquise, les preuves affluèrent alors de toutes parts. On rappelait la conformité des deux canaou, leurs positions par rapport aux vallées, la façon dont elles se répondent en débouchant sur l'Espagne au sommet du vallon de Hount-Saint. Deux jours après, Henri Passet me déclarait à Gavarnie que, suivant lui, le Port-Vieil avait dû s'appeler jadis Port de la Canaou d'Estaubé. Enfin, nos guides, enchantés d'y voir un peu clair, nous firent la promesse de s'en tenir à la nomenclature que nous avions arrêtée ensemble, et M. Joanne,

en la reproduisant d'après des notes de M. Wallon, comme due aux travaux de ce dernier, vient de lui donner une consécration définitive [1].

Mais l'ombre des montagnes nous couvrait déjà, et le sommet des glaciers s'illuminait peu à peu des teintes dorées du soir. Il fallait nous hâter de franchir la crête qui nous séparait du Mont-Perdu; nous nous élevâmes en droite ligne, sur des pentes stériles et monotones, vers la borne qui se dresse au pied du glacier de Tuquerouye.

L'aspect de ce couloir n'avait rien de rassurant, à cause de son immense élévation et de l'inclinaison étonnante de ses pentes glacées. Nous savions cependant que, avec du temps et de la résolution, nous parviendrions à le vaincre. A cinq heures, nous franchissions le petit col qui sépare la borne des murailles du midi, et nous posions le pied sur les neiges.

Pendant plus d'une heure, nous nous élevâmes lentement contre la paroi de neige inclinée parfois de 60°, et à six heures cinq minutes, très fatigués et agités d'émotions profondes, nous arrivions sur la crête, à 2,675 mètres. Les glaces du Mont-Perdu s'entassaient à perte de vue sous les dernières lueurs du soleil. A nos pieds, un vaste lac étendait sa plaine de neige boursouflée, chargée de restes d'avalanches, entrecoupée de dépressions glacées et d'ornières bleuâtres. Le long du rivage seulement une étroite ligne d'eau, ouverte par le brisement des glaces qu'occasionne le flux du jour et le reflux de la nuit, nous permettait d'apprécier l'étendue et la forme du lac. Mais cet espace même était à moitié comblé de glaçons renversés, de neiges flottantes, et l'eau à demi congelée semblait prête à se solidifier entièrement. La tranche des banquises surplombantes s'enfonçait dans les profondeurs bleues du lac, et de toutes parts les glaciers, déjà couverts des ombres du crépuscule, descendaient vers le gouffre immobile. Seule, la coupole du Mont-Perdu brillait d'un éclat radieux et se

---

[1] *Itinéraire des Pyrénées*, 4e édition, 1874. Routes 99 et 101.

détachait en rose sur le ciel assombri. Deux avalanches, les dernières de la journée, firent encore rouler leur vacarme tout autour de l'enceinte, comme pour nous en montrer les dimensions colossales. De loin, le roulement de l'avalanche ressemble assez à celui du tonnerre. De près, il devient très particulier et produit une impression de terreur beaucoup plus intense. C'est d'abord une sorte de frôlement bruyant, qui grandit très vite, et auquel se mêlent bientôt des battements sourds, profonds, un peu sinistres, comme ceux d'un énorme tambour voilé. Ce sombre fracas se répercute de tous côtés, et l'oreille perçoit en même temps le son glissant des neiges qui croulent et se répandent sur les glaces inférieures; puis le grondement s'éteint tout à la fois, brusquement, et la solitude reprend son silence mortel, qui paraît, par contraste, doublement austère.

Nous avions apporté un petit fagot de branchettes menues qui fut allumé entre deux pierres, dans un endroit dégarni de neiges, et nous servit à faire chauffer un peu de soupe dont chacun dégusta une cuillerée.

Nous essayâmes de construire une tente avec des pierres et des couvertures; mais les pentes étaient si abruptes et les neiges si étendues, qu'il nous fut impossible de trouver un point convenable. Il fallut se résigner à dormir à la belle étoile. Par bonheur, le temps était calme; mais la pureté extraordinaire du ciel nous faisait craindre une matinée très froide. La lune se leva à huit heures, et jeta sur le Mont-Perdu des lueurs d'argent dont je ne saurais donner l'idée. Le ciel, absolument noir, était tellement plein d'étoiles, que la voie lactée semblait l'avoir envahi tout entier.

Vers neuf heures et demie, Chapelle donna l'ordre de dormir. Nous nous arrangeâmes par groupes de deux ou trois sous nos couvertures, entre les rochers qui nous paraissaient les plus convenables pour nous abriter du vent et nous empêcher de rouler dans le lac, et, après nous être couvert la figure d'un voile pour éviter les effets du rayonnement, nous ne tardâmes pas à nous assoupir.

Deux ou trois fois, je me réveillai à moitié; la fraîcheur augmentait, mais nous nous protégions mutuellement, et la majesté de la nuit était indescriptible. Vers trois heures, les guides nous réveillèrent. Le calme de l'air nous avait garantis du froid, et bien que la partie du lac dégelée le soir nous parût maintenant couverte d'une légère couche de glace, le thermomètre marquait encore plus de 6° sur notre ressaut de rocher. Peu avant le lever du soleil, un refroidissement très sensible se produisit; mais nous nous mettions en route, et le mouvement nous réchauffa. Ne pouvant traverser le lac, il nous fallut en contourner la pointe orientale. Une avalanche tombée au printemps nous barrait la route, comme lors du second voyage de Ramond. Plus heureux que lui, et bien que la neige fût absolument glacée, nous pûmes franchir la pente sans accident, et atteindre l'extrémité de la terrasse du lac, qui domine d'une hauteur inouïe le fond de la vallée de Bielsa. Le soleil se leva dans ce moment, illuminant les glaces qui nous entouraient et faisant paraître plus sombres les forêts qui s'échelonnaient sous nos pieds; pourquoi ne pas avouer tout simplement que devant cette splendeur nous ne pûmes empêcher nos larmes de déborder?

Je relevai la direction des principaux points de la vallée de Bielsa. Après quoi, nous dirigeant par le côté sud du lac vers la partie du glacier qui descend du col du Mont-Perdu, nous traversâmes le torrent de décharge sans presque l'apercevoir sous les neiges, et nous prîmes un premier repas, tandis que notre objectif photographique était braqué sur la cime du Mont-Perdu. Puis, nous attachant à la corde, nous descendîmes sur le glacier. Jamais nos guides n'avaient vu autant de neiges en août. Les crevasses en étaient toutes couvertes; mais quelques affaissements, des trous noirs ou une teinte plus mate, nous les faisaient reconnaître. En nous élevant, nous en trouvâmes d'entr'ouvertes. Plus haut encore, l'inclinaison du glacier augmentant toujours et la neige n'ayant pu tenir, nous rencontrâmes de véritables gouffres.

Arrivés au pied de la première muraille que nous devions escalader, nous nous trouvons brusquement arrêtés par la crevasse

supérieure, et nous sommes obligés de nous diriger obliquement à l'Ouest, vers les contreforts du Cylindre, sur des pentes de glace très inclinées et au-dessus de crevasses insondables. Le soleil, par bonheur, commençait à ramollir la neige, et nous pouvions enfoncer nos talons plus profondément; mais l'inclinaison croissait toujours. Enfin, sous le dernier contrefort, un ressaut de glacier formant une grotte bleue remplie de stalactites, de neiges et de reflets étranges, nous permit d'aborder le rocher, sur lequel nous commençâmes à nous élever par tous les moyens possibles.

Mais nous avions dépassé notre but, et il nous fallait maintenant revenir à l'Est, vers le Mont-Perdu, en longeant les bases du Cylindre. Ces bases sont formées d'un empâtement de veines calcaires très contournées, presque horizontales et nettement superposées vers la partie inférieure, mais très obliques plus haut, et à peu près verticales sous le dernier mur, au-dessus duquel le Cylindre surplombe de toute sa hauteur. Entre toutes ces veines, la neige s'était amoncelée et collée contre la roche, où le soleil ne brille qu'une ou deux heures dans la journée. Ce ne fut d'abord qu'un jeu de franchir les premiers gradins; mais plus haut les difficultés augmentèrent à tel point, qu'il nous fallut sept heures de lutte pour atteindre le col qui sépare le Cylindre et le Mont-Perdu. Nous étions maintenant à 3,105 mètres; les plus grandes difficultés étaient vaincues, et nous pouvions nous considérer comme arrivés : déjà la coupole du Mont-Perdu, qui nous dominait de 250 mètres à peine, était assez rapprochée pour nous permettre d'y compter un troupeau de vingt-six isards qui marchaient lentement en longue file sur les neiges.

Malheureusement quelques vapeurs commençaient à passer au-dessus de nous, venant du Sud-Ouest : mauvais signe. Le temps avait été trop serein pendant la nuit, et les guides craignaient un orage. Bientôt les montagnes espagnoles s'assombrirent sous un entassement de nuages très lourds et très élevés, qui se dissipaient en partie en passant sur nos têtes, mais s'amoncelaient de nouveau plus loin contre le massif de

Montarto, puis autour de la Maladetta et bientôt sur les Posets. Le Mont-Perdu, encore dégagé, allait avoir son tour, et Chapelle déclara la fin de l'ascension impossible.

Nous espérions pouvoir, en nous hâtant, monter avant l'orage; il s'y refusa absolument, et insista pour fuir au plus vite vers Gavarnie. L'horizon du Sud-Ouest devenait de plus en plus menaçant; les vapeurs se tenaient encore à 3,400 mètres et frôlaient à peine la cime du Mont-Perdu, mais elles recouvraient la moitié des Pyrénées d'un dôme aussi noir que l'ardoise, contre lequel les grands sommets neigeux se détachaient avec un éclat fantastique. Le tonnerre grondait au loin sur les sierras espagnoles, où le soleil mêlé à la pluie faisait des trouées splendides dans les nuages et sur les montagnes; mais nous n'avions guère le temps d'admirer, car nous nous sentions aux prises avec un ennemi contre lequel nous ne pouvions rien; il fallait nous éloigner des régions perfides avant que l'orage n'éclatât, et dès que nous eûmes fait le tour du Cylindre, nous aperçûmes devant nous, à notre niveau, l'interminable rangée des sommités de Gavarnie, éblouissantes de neiges qu'il nous fallait traverser. Jamais nous n'eussions cru en trouver autant sur le versant méridional. Le Marboré, les Tours, le Casque, le revers du Cylindre n'étaient qu'un immense désert blanc, à peine interrompu çà et là par de longs affleurements de roches grisâtres. Les nuages demeuraient encore très élevés. Le Cylindre, le Mont-Perdu et le Soum de Ramond se dressaient sous le ciel sombre avec une splendeur terrible, tous trois jumeaux, celui du milieu dépassant à peine les deux autres. Il fallut nous arrêter ici pour corriger une erreur de géographie. Des plaines de l'Aragon on distingue au-dessus des Pyrénées trois cimes dominantes qui portent le nom de « Tres Sorellas [1] ». Les géographes français, ignorant l'existence du Soum de Ramond, avaient cru retrouver

---

[1] C'est du moins le nom que leur donnent les montagnards; mais il est vraisemblable que celui de « Tres Hermanas » est plus employé hors de la chaîne.

ces trois sœurs dans le Mont-Perdu, le Cylindre et le Marboré. Mais d'ici le doute n'était plus possible; les trois sœurs que nous avions déjà reconnues du pic Long un an auparavant, nous apparaissaient maintenant dans l'ordre inverse avec un relief encore plus accusé. Le Marboré, qui s'étendait au Nord, n'était plus un pic, mais une plate-forme écrasée, indécise, sans individualité, à travers laquelle les stratifications calcaires dessinaient dans la neige des gradins parallèles. Le Cylindre nous apparaissait, de son côté, sous un aspect nouveau. C'était comme un vaste puits, ou comme un énorme colisée, dont les parois s'ouvraient au Sud-Ouest et s'élevaient très haut vers le Nord. Un glacier crevassé remplissait toute la dépression, et venait mourir au milieu des neiges qui recouvraient le plateau. Mais le mur méridional du Cylindre ne s'interrompait pas complètement; on pouvait en suivre sous les neiges le gonflement continu; il s'allongeait parallèlement à la direction des Pyrénées, du Mont-Perdu, des cimes de Gavarnie, des mille petits gradins du Marboré, et se redressait lentement pour former le second sommet de la rangée de pointes jumelles qu'on distingue de Gavarnie au-dessous et à droite du Marboré. — Les autres pointes situées plus près de la cime n'en étaient que les ressauts, mais des ressauts singulièrement émoussés. Quant au bloc qui les précède tous, qui domine la Cascade du côté français et que M. Wallon appelle l'Épaule du Marboré [1], il surgissait d'un vaste glacier aplati, avec une fierté souveraine. Sans y avoir songé, tellement les pentes de ce versant sont adoucies, nous nous trouvâmes au sommet de ce glacier, et le cirque de Gavarnie s'ouvrit brusquement à deux pas devant nous : rien de plus effroyable qu'un pareil vide; on a beau savoir à l'avance qu'on a 1,500 mètres de murailles sous les pieds, la surprise n'en est pas moins vive; toutes les pensées s'arrêtent, on est littéralement anéanti.

Il nous fallait maintenant nous diriger un peu au hasard, par

---

[1] *Panorama du Piméné*. Toulouse, chez Privat, 1874.

des corniches et des murailles inconnues, vers la Brèche de Roland. Nous hâtions le pas, car l'orage devenait de plus en plus menaçant, et nous ne pouvions plus douter qu'il ne fût terrible. Mais la conformation des montagnes nous donnait l'espoir d'arriver promptement. Nous parcourions des terrasses peu inclinées, dont les murs de soutènement, plus nombreux et moins élevés que ceux du versant Nord qui constituent le cirque, se relevaient lentement de l'Est à l'Ouest. Aussi nous fallait-il descendre continuellement de gradins en gradins pour garder à peu près le niveau de la Brèche. La neige était partout, et nous cachait souvent le rocher, mais les murailles du sommet nous présentaient des amas de nummulites dont la teinte jaunâtre et caractéristique se prolongeait dans les strates du Cylindre et du Mont-Perdu. Plus bas, c'étaient de longues rangées de couches calcaires d'un beau gris foncé, découpées par les neiges et les pluies en milliers de sillons irréguliers dont les dos reluisants faisaient saillie au-dessus des névés. Parfois une belle veine de marbre traversait obliquement la roche principale; souvent aussi de profondes crevasses verticales et à peu près perpendiculaires à la direction des couches, fendaient la masse de la montagne et nous obligeaient à une certaine circonspection. Celui qui y serait tombé n'aurait certainement pu être retrouvé; mais en cheminant un peu loin des murs, nous étions sûrs que la neige recouvrait des éboulis et que ces nappes de débris auraient comblé les crevasses ouvertes sur leur route.

Un incident désagréable retarda notre marche. Au-dessous de la Tour du Marboré, nous nous trouvâmes acculés de tous côtés, dessus et dessous, à des murailles de plusieurs centaines de mètres de haut, et pendant plus d'une demi-heure nous cherchâmes vainement une issue. Enfin un des guides trouva dans l'échancrure qui sépare les massifs de la Tour et du Casque une corniche étroite, descendant sur un vallon de neige, où nous nous engageâmes faute de mieux. Nous fîmes le tour des bases du Casque sur des éboulis mamelonnés, informes, coupés de murailles et de ravins neigeux; plus bas, deux champs de

pierraille grise et de neiges, disposés en entonnoir, laissaient fuir leurs eaux par le centre, et les serpentements des ruisseaux glacés accouraient à un point commun en convergeant comme des branches d'arbre. Au delà, deux ou trois montagnes grises, pelées, hideuses, formées de couches superposées et d'éboulis jaunâtres qui semblaient des suintements, circonscrivaient un vallon d'une horrible nudité, qui devait aboutir à la Brèche. Encore un détour, et la Brèche elle-même nous apparut, mais à quelle hauteur et par delà quels escarpements de neige! Nous étions nous-mêmes au sommet d'un mur de glace dont toute la partie inférieure avait croulé dans le vallon. Je ne puis me rappeler comment nous vînmes à bout de le franchir. L'orage creva pendant que nous traversions les dernières neiges. Nous entendîmes le bruit strident de la grêle dans les rochers au dessus de nous, et elle nous atteignit deux secondes après : les grelons étaient heureusement sans consistance et s'écrasaient sur nous; évidemment la cristallisation était incomplète, les petites aiguilles de glace entremêlées dans les gouttes d'eau formaient des sphères à moitié coagulées, qui en s'écrasant sur nos mains y produisaient un froid insupportable. Elles se transformaient en verglas sur la neige, et tombaient certainement en grêle dure dans les vallées. Placés au milieu du laboratoire, nous avions la chance étrange d'assister à la formation des cristaux et de les surprendre au moment où ils cessaient d'être pluie pour commencer à devenir glace. La simplicité de cette transformation nous étonna. Évidemment nous n'avions affaire qu'à une pluie d'orage refroidie brusquement au-dessous de 0°, et la basse température des gouttes nous expliquait le changement de structure qui s'opérait pendant leur chute. Il ne suffit pas d'un fait pour établir une théorie, mais celui-ci pourtant nous donna à penser.

Les hypothèses proposées pour expliquer la formation de la grêle sont peut-être plus compliquées que la réalité, et tandis qu'on cherche comment les grelons peuvent demeurer en suspension dans le nuage, ne serait-il pas plus vrai d'admettre qu'ils ne se forment qu'après en être sortis?

Pour cette question et pour bien d'autres, les éclaircissements viendront des observatoires de montagnes, où les météorologistes saisiront dans leurs commencements les phénomènes atmosphériques dont la dernière phase peut seule être observée dans les régions inférieures.

Nous atteignîmes la Brèche à six heures et demie, après quinze heures de marche dans la neige; et pelotonnés sous un surplomb de rocher où nous devions passer la nuit, nous fûmes témoins pendant deux heures d'un déchaînement dont rien auparavant n'eût pu nous faire concevoir la possibilité. On eût dit que la montagne elle-même allait être enflammée par les éclairs ou s'écrouler sous les éclats de la foudre; nous étions aveuglés et assourdis, les décharges électriques se suivaient comme des feux de file, et du fond de toutes les vallées montaient des spirales de nuages noirs, que le vent du Sud portait sur nous, et qui, en franchissant la crête dans laquelle nous nous étions blottis, s'enflammaient tout entiers avec un épouvantable fracas. On ne peut imaginer une scène plus majestueuse; mais il faut avoir vécu deux heures semblables, pour avoir le sentiment bien net des forces naturelles et de l'impuissance humaine.

Vers neuf heures, l'orage se calma et nous permit de prendre un peu de repos. Le lendemain matin nous nous réveillâmes à quatre heures. Le ciel était bleu, mais traversé de longues nuées roides, frangées, dirigées en tous sens. C'était une nouvelle menace pour l'après-midi, nous n'avions plus qu'à descendre vers Gavarnie. Notre premier soin fut de prendre une visée des montagnes méridionales, puis nous nous laissâmes dévaler avec quelque difficulté sur le glacier durci par la grêle et par la nuit, et nous descendîmes vers le fond du cirque de Gavarnie, que nous atteignîmes après une heure et demie de marche.

Nous nous sentions plus forts et plus dispos qu'au départ; toutes les difficultés étaient oubliées, ou plutôt nous n'en gardions plus qu'un souvenir joyeux et triomphant. Si nous n'avions pas mis la cime du Mont-Perdu sous nos pieds, l'orage seul était coupable. Du reste, peu nous importait : nous rapportions assez

de documents et d'observations pour terminer une partie au moins de notre œuvre, et la conscience du travail accompli nous faisait regarder ces montagnes avec un air de possession, comme si elles nous eussent appartenu désormais. D'autres jouissances arrivaient à leur tour; nous retrouvions le bruit si doux de l'eau courante, l'herbe et les fleurs de la montagne, bientôt un troupeau de moutons, puis le berger, puis enfin un petit sentier vagabond qui descendait le long des pentes. L'air plus dense et plus parfumé gonflait nos poitrines, et nous ressentions, à la vue de la vallée et des maisons lointaines, quelque chose de l'impression calme et bienfaisante qu'on éprouve au sortir d'un accès de fièvre.

III

Quelque belle et attrayante que fût la vallée de Gavarnie, avec ses torrents, ses gazons et ses forêts de sapins, l'âpre passion des cimes et le désir de vérifier l'ensemble de notre travail nous ramenèrent dès le lendemain matin sur le Piméné, où nous demeurâmes jusques au coucher du soleil, occupés de relèvements et de vérifications. La journée fut superbe et le travail fructueux.

Ceux qui aiment vraiment les montagnes devraient s'accorder un séjour de dix à douze heures sur le Piméné, pour voir l'horizon passer de la pâleur du matin à l'éclat sombre du milieu du jour et à la lumière enflammée du soir. Chaque instant amène sa beauté nouvelle; le soleil, les nuages, les vapeurs invisibles transfigurent incessamment les cimes et les vallées, si bien qu'après une journée de contemplation et surtout de contemplation active, on se demande presque si tout cela n'est pas vivant, et si des combinaisons d'oxygène, d'hydrogène et d'azote peuvent suffire à transformer ainsi les murailles, les neiges ou les cascades de Gavarnie.

Du haut du Piméné, montagne de transition formée de roches siluriennes (Frossard), la région calcaire s'étale avec une ampleur magnifique. Estaubé et Gavarnie sont sous les pieds. Le

Mont-Perdu, le Cylindre et le Marboré s'élèvent par dessus le massif qui sépare les deux cirques. Toutes les cimes orientales de Troumouse apparaissent sur la gauche, et par delà le port de Pinède on retrouve la dentelure des montagnes de Niscle, tandis que vers l'Ouest, au-dessus de la longue vallée d'Ossoue, l'entassement du Vignemale se présente avec une singulière fierté, déroulant son vaste glacier au milieu des cimes secondaires. C'est ici qu'il faut remonter après Ramond, pour jeter un regard d'ensemble sur l'édifice du Marboré, et chercher à en débrouiller les lignes principales. Ce qui frappe d'abord, c'est qu'il est double. Deux systèmes parfaitement distincts constituent les deux cirques du centre et le massif du Mont-Perdu. Troumouse est à part et forme un chaînon séparé. Ne parlons d'abord que d'Estaubé, du Mont-Perdu et de Gavarnie. Ces deux systèmes partent d'un point commun à l'Ouest, et vont s'écartant vers l'Est avec des inflexions diverses. L'un, celui de devant, rapporté par M. Frossard à l'étage Turonien et caractérisé par d'innombrables empreintes de radiolites, est formé de roches brunâtres, dont les couches, à peu près parallèles à la direction des Pyrénées et inclinées de 45° environ, s'enfoncent au Sud, dans toute leur longueur, sous un second système appartenant (toujours d'après M. Frossard) à l'étage Sénonien, qui les domine et les recouvre. Celui-ci apparaît un peu à l'Est du Taillon, se dresse en couches verticales et se superpose jusqu'au fond du cirque de Gavarnie au premier système qui forme le soubassement des murailles; il constitue en grande partie le Marboré, le Cylindre, le Mont-Perdu, le Soum de Ramond; puis, s'écartant toujours vers le Sud, se dirige par les cimes de Niscle vers le bas de la vallée de Bielsa.

Les deux systèmes se relient donc comme le feraient les deux branches d'un compas dont la charnière serait fixée aux environs du Taillon. Là, en effet, ils se recouvrent l'un l'autre, mais le système incliné prédomine d'une façon marquée, et c'est à peine si quelques murs latéraux du Taillon prennent la position et l'aspect du système vertical. A l'Est, au contraire, une sorte de compensation s'établit, et les deux bandes, beaucoup plus

écartées, présentent des proportions inverses, puisque les couches verticales forment la plus grande partie du Mont-Perdu, tandis que les autres se réduisent vers le port de Pinède à une étroite barrière qui se perd bientôt dans la vallée de Bielsa.

Je dois dire, avant d'aller plus loin, que si j'emploie les mots de couches obliques et de couches verticales, c'est surtout pour simplifier les explications que j'ai à donner, car en bien des points les roches que j'appelle verticales ont fléchi, se sont tordues ou contournées, et c'est seulement dans les sommets de Gavarnie que leur verticalité est bien frappante. Mais en aucun point elles ne s'inclinent autant que les autres, et, même inclinées, elles gardent une disposition plus abrupte. En somme, pour un observateur placé au Nord, le premier système se présente par les tranches, et le second par les couches.

Si nous suivons ces deux formations, nous voyons les roches inclinées partir des sommets du Gabiétou et du Taillon, dont elles forment toute la masse, puis, quittant leur direction première, et abandonnant la crête frontière qui se couronne désormais de couches verticales, s'infléchir doucement vers le Nord, former les cimes plus modestes des Sarradets, et s'affaisser un peu plus loin pour laisser passer le torrent de Gavarnie, ouvrant ainsi le gouffre qui forme le fond du cirque, puis se relever dans les superbes cimes d'Estazou qui reproduisent les formes du Taillon et relient l'enceinte de Gavarnie à celle d'Estaubé. Celle-ci, suffisamment écartée du Mont-Perdu pour que les glaciers et les torrents aient pu chercher une voie vers l'Est, sans la percer comme celle de Gavarnie, présente une régularité de formes presque idéale. Des failles transversales la partagent en cinq ou six blocs monstrueux dont chacun projette en avant un éperon qui fait saillie sur la terrasse des roches inférieures, et telle est l'unité de ce plan dont la cause nous échappe encore, que les môles d'Estazou, bien que situés sur le versant de Gavarnie, n'en projettent pas moins fièrement leurs éperons à couches inclinées. Cette disposition semble s'atténuer vers l'Ouest, car les Sarradets en présentent à peine un reste, et le Taillon s'affaisse brusquement sur les éboulis

de sa base, mais elle reparaît un peu plus loin, et le Gabiétou, sur le point de redescendre en Espagne, soulève au-dessus du Port de Boucharo les deux immenses bornes des Tourettes, qui reproduisent avec plus de grandeur peut-être les formes des roches d'Estaubé. Là encore les failles se retrouvent et la ressemblance du plan est visible, mais par suite de la plus grande puissance des couches, chaque faille a servi de lit à un glacier qui descend du Sud au Nord. Presque tous ces glaciers, entre autres ceux du Gabiétou, du Taillon, d'Estazou, de Tuquerouye, affectent la forme de langues, tandis que ceux du système de couches verticales s'étendent le long des murs comme d'interminables ceintures horizontales.

Enfin, en avant de cette longue enfilade de murs obliques, s'étend une terrasse très inclinée, formée d'un mélange de terrains sablonneux, de grès et de calcaires fissurés, grisâtres, absolument stériles, coupés à une certaine hauteur par une suite de petits escarpements parallèles dont on retrouve la ligne presque ininterrompue depuis les abords du port de Pinède jusqu'à ceux du port de Gavarnie. Au-dessous de cette ligne d'escarpements, aux approches du granit qui les supporte, la végétation reparaît et forme de beaux pâturages, arrosés par les eaux qui filtrent des calcaires.

Si nous repartons maintenant du Taillon pour suivre le second système au sud du premier, nous rencontrerons d'abord trois murailles appuyées contre le Taillon même, et sur lesquelles le glacier descend en escaliers, puis une crête de forme indécise, sorte de compromis entre les deux systèmes, et à moitié recouverte de glaces. Mais bientôt surgit au milieu des neiges un rocher aux formes carrées et massives; c'est le bloc de la Fausse-Brèche, avant-coureur des murailles de Gavarnie. Celles-ci apparaissent bientôt sous la forme encore un peu timide de trois gradins recouverts de neige et s'appuyant sur le col qui sépare le glacier du Taillon du vallon des Sarradets. A peine ces gradins ont-ils percé la neige qu'ils disparaissent de nouveau, le glacier de la Brèche les recouvre, et la muraille supérieure s'élève seule

au-dessus des glaces, régulière comme une construction humaine et interrompue seulement par la coupure, si nette et si profonde, que la légende attribue à Roland.

Au-dessous de la Brèche, les gradins reparaissent avec plus de fierté, et prennent leur véritable caractère. Des murailles unies, à pic, inaccessibles, d'un seul bloc, supportent chacune une longue terrasse couverte de neige. Toutes ces terrasses sont parallèles comme les marches d'un amphithéâtre, mais tout l'édifice penche lourdement vers la gauche, et s'affaisse à mesure qu'il se prolonge vers l'Est. Du sommet du Piméné, ou de celui du Bergons, on distingue parfaitement cette inclinaison, et le monument tout entier en reçoit une apparence de maladresse qui le rend encore plus formidable. A la réflexion, cette inclinaison paraît naturelle, et démontre simplement que les couches inclinées se prolongent sous les couches verticales. A mesure que ces dernières s'en écartent, abandonnent les sommets, et glissent pour ainsi dire sur la pente de leur support, elles doivent fléchir et s'incliner toutes ensemble; mais ce qu'elles perdent ainsi par la base est largement compensé par la superposition de nouveaux gradins qui surgissent l'un après l'autre. A peine le mur de la Brèche a-t-il descendu de 50 mètres, que le Casque se dresse et le domine de 200. Celui-ci s'affaissant un peu plus loin, les Tours s'élèvent plus haut que lui; puis elles perdent aussi graduellement de leur élévation, mais alors se dressent cinq dentelures, parfaitement régulières, qui s'élèvent l'une au-dessus de l'autre jusqu'au sommet du Marboré, où l'inclinaison recommence, pour être successivement vaincue par le Cylindre, le Mont-Perdu et le Soum de Ramond.

Quelles que soient les forces qui ont superposé ces roches, le point où s'est produit l'effort principal est facile à discerner. Ce point n'est pas situé, comme on pourrait le croire, et comme Ramond l'avait supposé, aux environs de la cime principale du Mont-Perdu; c'est au-dessous du Marboré que l'énergique flexion des couches dénote l'action de forces effroyables. Là, tout est broyé, tordu, disloqué, les diverses formations se pénètrent et se

mêlent, et par dessus ce chaos les pentes méridionales du Marboré, douces, immenses, uniformes, sans caractère, à peine interrompues par des murailles médiocres, s'élèvent comme un talus régulier depuis les plateaux espagnols de Gaulis et de Millaris, pour s'arrêter brusquement, comme un cap de 3,253 mètres de hauteur, au-dessus d'un précipice de 1,700 mètres.

Un jour, peut-être, on saura quelle impulsion a soulevé ou conservé cette proue neigeuse au-dessus des couches environnantes; mais ce qu'on ne peut pas ne pas voir, c'est qu'il y a eu là, peut-être en un jour, peut-être pendant des milliers de siècles, soit dans l'Océan, soit dans les hauteurs de l'atmosphère, un mouvement du Sud au Nord, et que ce mouvement, plissant et tordant les couches inférieures, les a entraînées dans le sillage du Marboré. Tout l'édifice fait là un grand pas en avant, et des vallons géologiquement situés sur la même ligne se transportent et ne sont plus que parallèles, comme nous allons le voir tout à l'heure.

Le mouvement commence un peu à l'est de la Tour; là, toutes les murailles s'infléchissent brusquement; il y a comme une cassure, autour de laquelle les terrasses s'enroulent à la façon des marches d'un escalier tournant. Le versant méridional n'a pas suivi cette courbe; il la domine; on dirait qu'il a monté obliquement par dessus. Rien de plus brutal que ce tournoiement, rien de plus imprévu. Mais il ne va pas loin, et toutes les couches, saisies par un grand pli qui descend du Marboré vers le fond du cirque, se tordent et se redressent à la fois, formant une crête immense, présentant au ciel leurs cassures aiguës et séparant par cette vague solide la région où dominent les couches obliques, de celles où l'on ne voit que murs et que terrasses.

Ce promontoire du Marboré, les replis qui l'environnent et les roches qu'il a transportées en avant, semblent avoir repoussé la première bande des couches obliques, qui, au lieu de suivre une ligne droite, décrit une courbe dont la concavité est précisément tournée vers le Marboré; cette courbure ne peut échapper à l'observateur le plus superficiel, et du haut du Piméné on peut

non seulement la discerner, mais en reconnaître la disposition générale.

Toute la série de points culminants qui s'étend du Gabiétou au Port-Neuf a été ployée comme un arc, dont la flèche pourrait être figurée par la crête qui descend du Marboré et forme le col d'Estazou-Barrade. — Au milieu de la courbure, juste en avant du Marboré, les cimes jumelles de l'Estazou dominent toute la rangée, moins par leur hauteur que par leur masse et l'ampleur de leurs formes. A l'Est et à l'Ouest de ce centre, les couches ont fléchi dans plusieurs directions, mais leurs ondulations ne peuvent altérer la forme de la vaste courbe où elles viennent toutes s'inscrire. Les failles verticales dont j'ai déjà parlé semblent y avoir été ouvertes par un plissement violent suivi de ruptures; là toutefois une nouvelle direction se montre et la plupart de ces failles, au lieu d'obéir à l'impulsion du Marboré, convergent comme les rayons d'une étoile vers un point de torsion situé à la base des parois du Cylindre, et où les murailles ont subi un effort qui les a ployées les unes au-dessus des autres, brisant la suite des stratifications, et formant un amoncellement de plis dont la base s'enfonce sous les glaciers. — La direction des failles d'Estaubé a-t-elle un rapport quelconque avec cette région bouleversée, je l'ignore; les glaciers qui s'étendent entre les deux formations ne permettent pas de suivre la flexion des strates, mais cette coïncidence est frappante, et je la cite comme toutes les autres particularités de ce massif remarquable, sans en tirer une conclusion prématurée.

Une autre coïncidence plus frappante encore consiste dans la ressemblance presque absolue des vallons qui séparent les deux bandes calcaires.

Ramond avait déjà remarqué que le vallon de la Brèche de Roland et des Sarradets reproduisait en petit celui au fond duquel dort le lac du Mont-Perdu. A vrai dire, Ramond croyait que cette dernière dépression formait exactement le prolongement de l'autre. Géologiquement, il était dans le vrai, mais il se trompait au point de vue géographique : deux lignes tracées dans la lon-

gueur des deux vallons passeraient parallèlement à plus d'un kilomètre l'une de l'autre. Néanmoins, la dépendance mutuelle de ces deux nids de glaciers est évidente. Tous les deux sont bornés au Nord par le revers des formations obliques, les Sarradets pour l'un, Estaubé pour l'autre. Tous les deux s'appuient au Sud, par un escalier couvert de glaces, sur le couronnement des roches verticales. A l'ouest de l'un et de l'autre s'ouvrent deux cols neigeux, dont l'aspect et la nature sont identiques. Tous les deux se terminent brusquement par un mur à pic : l'un au-dessus du cirque de Gavarnie, l'autre au-dessus de celui de Bielsa. Enfin, le trait le plus caractéristique de cette ressemblance consiste dans une bande longitudinale de rochers plats, à couches verticales, qui s'allonge de l'origine à la base de chacun de ces vallons, les séparant ainsi en deux replis parfaitement distincts. (Voir *fig. 1* et *2*.)

Mais le vallon de la Brèche, plus court, plus incliné vers les bases de Gavarnie, ne renferme que des neiges, des glaces et des pentes éboulées, tandis que la vasque du Mont-Perdu, largement développée, s'abaisse majestueusement de 450 mètres à peine depuis le col d'Estazou-Barrade, sur une longueur de 3 kilomètres. Le glacier qui se forme à l'abri des hautes murailles méridionales la remplirait tout entière, si le repli de roches qui descend au milieu des neiges ne les rejetait à droite et à gauche de sa longue croupe, formant ainsi deux glaciers parfaitement séparés qui s'affaissent lentement avec leur plateau de roches et avec le rempart septentrional d'Estaubé jusqu'au pied de Tuquerouye. Là, un de ces glaciers plonge ses falaises transparentes et ouvre ses gouffres de glace dans le lac qui repose entre le plissement des couches et le mur d'Estaubé. Au delà de cette dépression, le plateau se relève graduellement avec un gonflement doux et superbe qui fait songer aux ondulations de l'Océan, et dont aucune autre région montagneuse ne peut donner l'idée; puis tout manque à la fois : une cassure aiguë forme le sommet d'un mur, plus immense et plus abrupt que ceux de Gavarnie, mouillé par la vapeur tonnante des cataractes qui s'échappent du grand

glacier, et posant sa base, invisible d'en haut, sur les pâturages de la vallée de Bielsa.

L'eau du lac, débordant sans cesse par dessus la partie la moins élevée de l'enceinte, a fini par s'y creuser un canal dans la direction où l'on s'attendrait le moins à le rencontrer. C'est sur le côté, transversalement à la direction des couches, que l'eau s'échappe, descend de chute en chute sous des amas de neiges, se joint aux ruisseaux qui découlent sur le bord du grand glacier, et se précipite avec eux dans la vallée. Il est cependant probable que, dans certains moments, le lac peut se déverser également au pied du pic de Pinède. Les grandes chutes de neige doivent assez souvent, en hiver ou au commencement du printemps, lui fermer son déversoir habituel. Si l'obstacle s'élève assez haut, la nappe liquide, s'élevant de son côté, ne doit pas tarder à remplir toute la dépression, et la baie orientale, s'allongeant vers la vallée de Bielsa et recouvrant les assises rocheuses, doit finir par déborder au-dessus de la vallée, en y formant une cataracte temporaire, jusqu'à ce que les neiges fondues par le soleil ou balayées par le poids de l'eau lui rouvrent le canal où sa pente naturelle la pousse. Ni la forme, ni les dimensions du lac n'ont donc rien d'absolument fixe. Les glaces qui le recouvrent, celles qu'il rejette sur ses bords, les avalanches qui descendent dans ses eaux comme des promontoires, la hauteur variable de la surface liquide, l'irrégularité de l'écoulement, les pentes presque nulles de certaines parties du lit de roches, tout concourt à modifier sans cesse l'aspect et les formes de cet étrange gouffre. Je crois cependant lui avoir donné les limites qui lui sont le plus habituelles. Quand nous l'avons vu, la glace qui le recouvrait ne s'éloignait guère des rives et en suivait les contours : le niveau du lac n'était donc pas exceptionnellement élevé; d'un autre côté, le déversoir donnait librement passage, à travers des arcades de neige, à un torrent d'un volume assez médiocre pour qu'il fût difficile de croire que l'eau pourrait s'abaisser de beaucoup sans atteindre le niveau du trop plein.

La présence de ce lac au milieu de roches calcaires est d'autant

plus étrange que, dans tout le massif du Mont-Perdu, la pierre, crevassée d'innombrables fissures, est absolument perméable à l'eau. Sur le flanc méridional du Marboré, on ne peut trouver ni un torrent, ni même un filet liquide de quelque importance : tout est bu par la roche, et va ressortir plus bas dans les vallées.

On ne peut s'expliquer cette singularité que par la disposition des rochers qui enferment le lac; tandis que la rive septentrionale est formée par les larges tables que présente le revers des couches obliques, les autres couches qui entourent la nappe d'eau de l'Ouest à l'Est par le Sud ont été ployées de tous côtés, relevées comme autant de bourrelets au travers desquels l'eau ne peut filtrer vers les régions inférieures.

Quant aux glaciers qui recouvrent toutes les pentes élevées, et surtout celles du Mont-Perdu, ils comptent parmi les plus considérables des Pyrénées.

Autour d'eux, et conservés par le froid qui descend des grandes cimes, on trouve d'innombrables amas de neige et même de glace dure à des hauteurs bien plus modestes que dans les autres parties des Pyrénées. C'est ainsi que la partie inférieure du cirque de Gavarnie, où les cônes d'éboulement s'étagent entre 1,640 et 1,800 mètres, est partiellement recouverte de neiges durcies, au travers desquelles les gaves se fraient un passage par de longues galeries devenues, sous le nom de *ponts de neige,* un peu plus célèbres qu'elles ne le méritent.

L'effet ordinaire d'un vaste centre de glace est d'abaisser notablement la température de la région environnante. Par suite, la limite des neiges descend plus ou moins, jusqu'à ce que l'équilibre se soit établi entre l'influence du climat général et celle des glaces avoisinantes. Quand à cette cause d'augmentation de la surface de froid se joint une disposition particulière des cimes qui protége contre les rayons du soleil un espace plus étendu, on peut s'attendre à voir les glaciers prendre une extension plus grande encore. C'est ce qui se produit dans le massif calcaire, où l'escarpement des pentes et la raideur des murailles empêchent les rayons du soleil d'éclairer le pied des montagnes.

Je viens de citer les amas considérables de neige glacée qui encombrent le cirque de Gavarnie, à 1,640 mètres, c'est à-dire à 1,150 mètres au-dessous de la ligne moyenne des neiges persistantes dans les Pyrénées (2,750-2,800^{m}). Le glacier de la Brèche prend naissance à 2,804 mètres, à peine au niveau de cette ligne idéale, et descend jusqu'à 2,500 mètres environ. Celui du Taillon part de plus loin, entre 2,900 et 3,100 mètres, pour s'arrêter actuellement à 2,500 mètres, peut-être un peu plus haut, car il paraît être en voie de diminution après avoir augmenté pendant quelques années. Les deux glaciers d'Estazou comblent les dépressions de la montagne, entre 2,600 et 2,400 mètres, où l'on devrait à peine voir quelques plaques de neige. Quant aux glaciers d'Estaubé, ils pénètrent plus profondément encore dans les zones inférieures; celui de Tuquerouye a son point le plus élevé à 2,675 mètres, et descend jusqu'à 2,350 ou 2,380 mètres, où il se perd dans les masses de neige qui revêtent la base des murs d'Estaubé et se changent même en glace sur deux ou trois points très abrités. (Voir *fig. 3*.)

Du reste, la forme et l'altitude de ces glaciers se modifient sans cesse. En 1868, celui du Mont-Perdu se terminait par un vaste gonflement crevassé, pareil à l'extrémité du glacier du Rhône, et les escarpements supérieurs, en revanche, apparaissaient en beaucoup de points sous la neige; en 1872, les pentes supérieures s'étaient chargées de neiges immenses, pendant que la calotte des glaces inférieures avait presque disparu. Le 21 août, pendant que nous nous dirigions vers le pic Long, le poids des couches nouvelles fit glisser tout un étage de glaciers sur l'étage situé au-dessous, avce un fracas terrible. En 1873, nous trouvâmes les pentes les plus basses chargées de longues traînées d'avalanches, et les gradins les plus élevés de la montagne encombrés à nouveau d'un immense poids de névés, sous lequel une crevasse transversale, effrayante de largeur, s'était ouverte tout autour de la crête. Le 1er novembre, cette crevasse avait tellement grandi, que du Soum du Néré, à 23 kilomètres de distance, on l'apercevait à l'œil nu comme un large trait noir au milieu des neiges.

Ce glacier mérite d'être étudié avec quelques détails. Comme étendue, il n'est surpassé dans les Pyrénées que par les champs glacés qui entourent le pic de Néthou. Mais ceux-ci ne peuvent lui être comparés pour la beauté des teintes, des crevasses, des cascades glacées, ou pour la majesté de l'encadrement. Le vallon du Mont-Perdu est plus étroit que la vallée où s'engouffre la Garonne; mais les glaces le remplissent en entier, le dépassent même au-dessous des pentes orientales et du Soum de Ramond, et comme au delà d'une certaine mesure, les dimensions ne sont plus appréciables à la simple vue, on estimerait volontiers les glaciers du Mont-Perdu au triple de ceux de Néthou et de la Maladetta, pendant qu'ils leur sont inférieurs d'un quart à peu près (1).

La nappe principale, véritable mer de glace, descend du Sud au Nord, depuis les murailles supérieures, en deux ou trois ressauts, jusqu'à la surface du plateau, où elle étend paresseusement sa plaine blanche hérissée d'aiguilles et coupée de crevasses. En même temps, les neiges abandonnées par le vent d'Ouest dans les dépressions situées à l'est du Marboré s'écoulent dans une direction qui fait un angle droit avec la première, et donnent au glacier tout entier une allure oblique extrêmement remarquable. Sur la carte, et sans tenir compte de l'augmentation de surface produite par l'inclinaison du lit, le glacier principal occupe une surface horizontale d'environ 344 hectares. Plus modeste, mais non moins beau, celui du lac recouvre à peine un espace de 52 hectares, tandis que le glacier de Ramond présente à peu près 117 hectares de superficie. Ce sont donc au moins 513 hectares de glace qui revêtent les flancs septentrionaux du Mont-Perdu.

---

(1) Ces calculs, purement approximatifs, sont basés sur les dimensions que M. Packe a données aux glaciers de la Maladetta dans sa belle carte des Monts-Maudits. Mais je ne puis me défendre de penser que M. Packe, dont le but était principalement de faire une carte-guide à l'usage des touristes, a donné à ces glaciers une superficie un peu trop considérable. Il en est ainsi, du moins, pour ceux de Litayrolles, situés au midi des montagnes d'Oo et du Lys.

La puissance des couches glacées est au moins aussi importante à connaître, mais cette évaluation offre de grandes difficultés. Cependant, je ne crois pas exagérer en estimant à 150 mètres l'épaisseur moyenne du glacier. Partout où la glace présente un front d'écroulement au-dessus des gradins supérieurs, l'escarpement d'un gris bleuâtre s'élève à près de 100 mètres au-dessus de la roche, et cette épaisseur est, sans nul doute, bien moins considérable que celle des nappes qui remplissent de leur surface oblique la partie creuse des gradins calcaires.

Plus bas, l'encombrement des neiges, les pentes plus douces, la chute des avalanches, augmentent l'épaisseur du glacier, et l'écroulement par lequel il franchit la dernière rangée de murailles n'est qu'une large cataracte de glace, dont la chute commence à 2,850 mètres pour s'arrêter à 2,640 mètres environ. Sur ces 210 mètres de hauteur, au milieu des gouffres et des fractures qui déchirent le glacier, la roche n'apparaît nulle part. Certains blocs de glace, portés en avant de leur appui par la marche du glacier, se détachent et glissent en fragments énormes, à moitié broyés, dont certains ont une épaisseur de 150 à 200 mètres.

Derrière eux, la cassure vive et nette se dresse au-dessus d'une crevasse béante, et la merveilleuse teinte de vert marin qui brille sur les parois dénote que la masse glacée possède encore une épaisseur considérable.

En admettant une puissance moyenne de 150 mètres, on arriverait, pour le total des trois glaciers, à un cube de plus de 750 millions de mètres, suffisant pour alimenter à l'étiage, pendant près d'une année, un fleuve comme la Garonne à Toulouse.

Les cascades de glace sont un trait caractéristique et une des grandes beautés des glaciers calcaires. Ceux qui revêtent des montagnes granitiques ont rarement une allure aussi violente et aussi bouleversée. Ils glissent lentement, tout d'une pièce, sur les pentes du granit, et, pour ne parler que des Pyrénées, les plus vastes d'entre eux, ceux du Néthou et de la Maladetta, semblent posés comme un manteau sur les flancs de la montagne; à

peine la base du champ glacé est-elle découpée d'aiguilles et de gouffres, et, dans la vaste étendue des névés supérieurs, on n'aperçoit guère que des crevasses transversales, ouvertes par l'inégalité de pression que subissent les différentes portions du glacier. Dans notre région calcaire, l'aspect est tout différent : à peine échappé du pli de montagne où il prend naissance, le glacier est obligé de se précipiter brusquement de gradins en gradins, ce qu'il ne peut faire qu'en se brisant tout entier à chaque descente, pour se ressouder plus bas et se disjoindre encore à la prochaine muraille. De là, une apparence chaotique, une hardiesse de mouvements, une variété de formes, d'escarpements, de teintes profondes, encore embellies par la pureté de la glace calcaire et l'absence complète des masses de débris qui souillent la plupart des champs glacés dans les régions granitiques.

Les petits glaciers de l'Estazou, du Taillon et des Tourettes présentent ces caractères d'une façon frappante. Ce dernier est si charmant, si limpide, si magnifiquement hérissé d'aiguilles et de crevasses bleues, que M. Frossard l'a comparé au glacier de Rosenlaui. Quant à ceux qui recouvrent les terrasses parallèles de Gavarnie, les escarpements qu'ils auraient à franchir sont tellement élevés et l'étroitesse des terrasses offre à la glace un emplacement si restreint, que les différents plans demeurent séparés sur leurs corniches, sans pouvoir se rejoindre ailleurs qu'aux environs de la Brèche et au-dessous du Casque. Mais c'est à cette disposition même que le cirque doit son caractère de suprême élégance. On ne pourrait imaginer un agencement de montagnes à la fois plus imposant et plus exquis de formes que cette superposition de falaises verticales et de glaciers en gradins. Les plus vastes sont posés jusque sur les cimes, et découpent leurs blanches ondulations contre le ciel. Un seul, celui qui domine la grande cascade, descend de toute la hauteur des trois étages jusqu'au sommet de la falaise orientale, mais les autres déploient leurs ceintures éblouissantes sur tous les ressauts des murailles ; les eaux qui s'en échappent glissent en flocons d'écume

vers le fond du cirque, et, arrivées au bord de la dernière terrasse, s'élancent dans le vide immense, où elles descendent lentement le long des pentes en ruisselant contre les rochers, ou en ondulant au moindre souffle de vent. La plus haute, qui tombe dans un précipice de 405 mètres, s'abaisse avec une lenteur magique; ses flots indécis roulent doucement dans l'espace, au milieu d'une vapeur lumineuse que l'air promène autour des murailles sombres, et le cirque, illuminé par une pluie invisible, résonne d'un bruissement doux et profond, écho lointain du frôlement de l'eau sur les roches.

IV

Troumouse occupe le fond de la vallée de Héas, à l'est des deux autres cirques français, et au nord-est de celui de Bielsa.

C'est la plus immense de toutes les « oules » ou « chaudières » pyrénéennes; et lorsqu'on erre au milieu des pâturages qui en occupent le fond, il semble que ce n'est pas simplement un plateau de prairies, mais bien un pays tout entier que renferment ces murailles et ces glaciers échelonnés autour de l'horizon. Du pic de Gerbats ([1]) au pic d'Estaubé, il y a, en droite ligne, 5,750 mètres; il y en a 5,500 entre le pic de Troumouse et les bastions du Mont-Herran, qui ferment le cirque au Nord-Ouest; enfin, les pâturages qui recouvrent tout le fond de cette corbeille immense, n'ont pas moins de 10 à 12 kilomètres carrés de développement. Dans ce petit pays, isolé du reste du monde, et qu'on ne peut atteindre qu'au prix d'une longue ascension, d'innombrables troupeaux trouvent leur pâture. Parmi de nombreuses

([1]) Le pic de Gerbats est une sorte de tour tronquée, bifurquée au sommet, qui se dresse au-dessus de la montagne d'Aguila, et dont la teinte foncée tranche vivement avec la couleur blanchâtre de son piédestal. Ramond a confondu ce pic avec celui des Aiguillons, situé plus au Nord, et l'état-major lui donne une hauteur de 2,920 mètres, probablement un peu trop forte, mais que j'ai conservée, n'ayant encore que des soupçons à cet égard.

buttes de granit voilées de verdure, des ruisseaux roulent à pleins bords sur de larges lits de cailloux, traversés par des ponts de bois ou d'ardoise. Deux lacs, malheureusement peu intéressants, remplissent les deux principales dépressions du plateau; l'un d'entre eux, le lac Hères, se déverse par le profond ravin de Touyères, dont les parois verticales coupent le cirque en deux parties; l'autre, indigne même de porter un nom, est situé dans les éboulis qui descendent des murailles de Peña-Blanque.

Rien n'est plus étrange que l'abord du cirque. Soit qu'on y pénètre par Touyères (V. *fig. 4*), soit qu'on remonte le vallon de Maillet, on arrive au centre de l'oule sans en avoir rien vu, tellement sont abruptes les premières murailles granitiques qui lui servent de soubassement. Ces murailles, noires, rayées de cascades et d'avalanches, occupent le fond de la vallée de Héas, et la termineraient même en apparence, si le regard n'apercevait au delà, par dessus le vallon de Touyères, les cimes resplendissantes de la Munia, de Serre-Mourène et de Troumouse. Mais qu'on s'avance vers elles, et tout se dérobe derrière la masse informe du pâté de granit.

Dans la partie supérieure du vallon de Maillet seulement se recourbe un demi-cercle de sommités très élevées.

D'abord, vers la gauche, les deux bastions qui enserrent le port de la Canaou, puis les crêtes déchirées qui forment la ligne du Soum de Port-Vieil et du pic d'Estaubé, et enfin une longue et étrange muraille de belles roches dont le sommet brunâtre, la ceinture blanche et la base teintée de rouge, probablement par des dépôts d'oxyde de fer, s'alignent en rangées de vagues obliques, penchées, dont les arêtes aiguës descendent en ondulant depuis les pics suprêmes jusqu'aux éboulis et aux pâturages : c'est le massif du Mont-Herran. En arrière et vers le bas du vallon, les pentes se relèvent contre la longue et insignifiante montagne d'Aguila; mais dans tout cela, on ne sait plus où peut bien être le cirque; on gravit lentement les pentes du vallon, sous l'ombre interminable du granit qui surplombe, et l'on soupçonne vaguement une sorte de déception; mais soudain on atteint le sommet

du mur granitique : la plaine s'ouvre, et Mont-Herran et Aguila ne sont plus que les derniers contreforts d'un cercle de murailles neigeuses, dont les glaciers de la Munia occupent le fond. Dans toutes les Pyrénées, il n'y a guère d'apparition plus imprévue. « Ce cirque serait un gouffre, s'il n'était immense, dit Ramond. Il n'a nulle part moins de 8 à 900 mètres de haut, mais il a plus de 2 lieues de circuit. » Ramond avait bien vu : le développement total des murailles est de 11 kilomètres et demi, sans interruption, sans faiblesse, sans autres dépressions que des brèches à peine praticables, toujours neigeuses, et toutes supérieures à 2,800 mètres.

Comme immensité, Troumouse laisse bien loin en arrière Estaubé et Gavarnie; mais en revanche, comme beauté de lignes, il leur est assurément inférieur. La forte organisation du plan général est frappante, mais les détails obéissent à plusieurs types différents dont chacun impose un moment son rhythme, puis cède un peu plus loin à une seconde forme qui, à son tour, est bientôt modifiée par une autre. Dès le premier regard, on s'aperçoit qu'on n'est plus dans la région centrale et qu'on s'éloigne du nœud. Plus de ces enfilades de murs prolongeant leurs corniches parallèles sur plusieurs kilomètres; ils sont relégués en arrière, dans les pentes méridionales de la vallée de Bielsa.

On ne retrouve pas dans Troumouse la majestueuse uniformité de Gavarnie ou la simplicité sublime du mur d'Estaubé; mais c'est justement à ce manque d'homogénéité que l'oule doit la disposition de sa crête circulaire. Les agents atmosphériques y trouvant plusieurs plans distincts et plusieurs points faibles, les ont travaillés et usés dans plusieurs directions, et de ce recul multiple, de cette démolition s'opérant par tous les côtés, est résultée la disposition particulière de Troumouse, dans laquelle on retrouve juxtaposées toutes les formes des régions voisines.

Les deux bastions du port de la Canaou rappellent la position des pics d'Estazou, tandis que le vallon de Maillet fait équilibre à celui de Pailla; puis, à la suite du second bastion, surgissent d'immenses blocs en falaises, taillés sur le patron de ceux d'Estaubé, séparés comme eux par des failles, présentant de même

leurs cassures au Nord et leurs couches au Sud, et dominant pareillement une terrasse inclinée. Mais peu à peu cette disposition s'affaiblit : le Montarrouye en montre à peine un faible reste, et la Munia, dirigeant sa crête vers le Nord-Est, entremêle dans les murailles de sa cime des couches horizontales, verticales, obliques, tordues, au-dessous desquelles se dressent de belles parois à pic, très fières et très sauvages. Ces parois supportent les glaciers sur une terrasse supérieure dont la disposition rappelle celles du Marboré. A gauche de la Munia, la crête de Troumouse se recourbe au Nord, puis au Nord-Ouest, formant d'abord les pics très élevés, mais très peu apparents de Serre-Mourène (3,058^m), de Troumouse (3,086^m), dont les flancs se déchargent de leurs eaux dans les trois bassins de l'Èbre, de la Garonne et du Gave, puis la longue crête dentelée de Gerbats. Toute cette région est caractérisée par de petis murs irréguliers, dont la base s'appuie sur les pâturages ou sur les éboulis, et dont les formes émoussées semblent préparer celles de la longue croupe d'Aguila, sur toute la longueur de laquelle aucun accident de terrain ne vient interrompre la monotonie des pentes.

A l'extrémité Nord-Ouest de la montagne d'Aguila, la carte de l'état-major mentionne une cime de 2,852 mètres dont j'ai déjà dit quelques mots. Cette cime n'existe pas : la partie culminante de la crête se trouve au point où l'état-major a inscrit l'altitude de 2,644 mètres; au delà de ce point, la crête se soutient encore pendant six ou sept cents pas à peu près à la même hauteur, puis s'affaiblit, s'écrase en quelque sorte, et descend lentement vers la vallée. La place où l'état-major a mentionné la cime de 2,852 mètres se trouve sensiblement à 2,350 mètres, et cette différence suffirait à expliquer l'erreur par la substitution d'un 8 à un 3, si toute la masse de la montagne et le vallon même d'Aguila n'avaient été reproduits inexactement, peut-être pour les faire concorder d'une façon possible avec cette fière cime de 2,852 mètres. Nous avons essayé de corriger les erreurs de cette région, et nos relèvements nous ont forcés à déplacer d'environ 900 mètres au Nord-Ouest une partie du ruisseau d'Aguila.

C'est aux crêtes de Troumouse que s'arrête actuellement vers

l'Est la région des grandes sommités secondaires et tertiaires. De même que le pic du Gabiétou s'élève brusquement du port de Gavarnie, de même le revers de Troumouse et de Serre-Mourène s'abaisse de 600 mètres à pic sur les montagnes écrasées des Passades de Barroude, et la région qui nous occupe finit aussi subitement qu'elle a commencé. Prise dans son ensemble, et ramenée théoriquement à des lignes droites, cette région présente deux directions générales. L'une, qui semble avoir guidé les superpositions géologiques et les crêtes principales, est sensiblement orientée dans la direction des Pyrénées, E. 18° S., peut-être un peu plus écartée de l'Est dans certaines cimes, et se retrouve dans les trois cirques, dans les vallées d'Ossoue et de Bielsa, dans la crête du Piméné, dans les murailles du Mont-Perdu. L'autre, inclinée de 20° environ au Nord de l'Est rencontrerait la crête méridionale des trois grands cirques français, serait parallèle au flanc sud-est du Cylindre, aux crêtes du Taillon et des Sarradets, au vallon de Poucy-Espée, etc., et cadrerait à peu près avec la direction que M. Élie de Beaumont donne au soulèvement des Alpes principales. L'influence de la première orientation paraît avoir dominé à l'époque des formations calcaires, et en jetant un coup d'œil d'ensemble sur les cirques du versant français, on voit que l'extrémité orientale de chacun d'eux, après avoir abandonné cette direction et s'être repliée vers le Nord, s'arrête brusquement devant une crête avancée qui arrive du cirque voisin et empiète du côté de l'Ouest.

Ainsi, Troumouse envoie jusqu'au milieu du cirque d'Estaubé un chaînon qui arrête subitement les montagnes à couches recourbées et se prolonge par le Gabiédou, le Soum de Port-Vieil et le pic d'Estaubé jusque dans les contreforts qui en descendent. Estaubé à son tour se continue vers l'Ouest bien au delà des pentes qui lui appartiennent, poussant les crêtes et les contreforts de l'Estazou en travers des montagnes orientales de Gavarnie. Enfin, Gavarnie même, si resserré vers l'Est, prolonge ses contreforts à l'Occident jusqu'au-dessus de Boucharo. La nature semble avoir suivi ici le même plan qu'en formant la merveilleuse

guirlande d'archipels qui entoure l'Asie orientale. Là aussi, chaque traînée de sommets se recourbe au-dessus des mers, et vient s'arrêter contre une traînée nouvelle qui a déjà commencé sa course plus au Nord.

Obligés de reconstruire avec des lambeaux et des ruines l'édifice primitif du dépôt calcaire, nous devons en chercher dans ces ruines les grands traits d'architecture, et c'est pourquoi j'ai tenu à faire entrer dans le cadre de ma carte le remarquable pic des Aiguillons, situé au nord de Troumouse, et posé comme une épave au sommet d'une crête de schistes qui surmonte elle-même le massif granitique inférieur.

Les deux directions dont je viens de parler se retrouvent dans le pic des Aiguillons avec une netteté frappante. Est-ce un simple effet de clivage qui l'a découpé de la sorte en bandes horizontales, dont celles du Sud ont l'aspect de couches nettement stratifiées, tandis que celles du Nord-Ouest sont visiblement des brisures, presque horizontales aussi, mais pas assez cependant pour qu'on ne puisse distinguer, à travers le tissu de ces fractures, celui des couches superposées qui le traversent et s'entre-croisent avec lui? — Je ne suis pas compétent pour décider une question semblable; je voudrais seulement attirer sur ce point l'attention des géologues. A eux maintenant de trouver les rapports que peut avoir, avec le chaînon calcaire et avec les forces inconnues qui l'ont façonné, cette île des Aiguillons, abandonnée seule, au milieu de formations différentes, comme un dernier vestige de l'ancienne masse de sédiments dans laquelle se sont lentement creusés nos cirques actuels.

V

VALLÉES INFÉRIEURES.

Six vallées principales rayonnent autour du massif calcaire. Trois s'échappent vers le Nord, ce sont celles de Héas, d'Estaubé et de Gavarnie, dont les eaux se rencontrent à Gèdres. Une autre, celle de Bielsa, la plus vaste et la plus alpestre, s'enfuit vers

l'Est-Sud-Est, dans la direction même de la chaîne. Les deux dernières vallées enfin, celles de Fanlo et d'Arras, descendent des pentes méridionales du massif et traversent une région de montagnes médiocres qui s'abaissent graduellement jusqu'au niveau du plateau espagnol.

Toute la région du Nord, celle que traversent les trois vallées françaises, est assez connue pour qu'il suffise d'en dire quelques mots. Le trait principal qui la caractérise est un soulèvement de granit, qui s'élève depuis Gèdres jusqu'au milieu des cirques, et dont la hauteur absolue varie généralement entre 1,650 mètres au Nord et 2,000 ou 2,100 mètres au Midi. Cette bosse granitique, recouverte d'une zone de pâturages, constitue la plaine du cirque de Troumouse, domine les deux côtés de la vallée de Héas, s'étend jusqu'au fond de celle d'Estaubé, forme une large terrasse autour du Coumélie et du Piméné, reparaît dans les vastes pâturages d'Aspé, aux alentours de Gavarnie, et se retrouve dans toute la région comme une assise moyenne entre les vallées et les montagnes. Sur le plateau se dressent les rangées de sommités calcaires ou schisteuses, tandis que les vallées, creusées comme des sillons au milieu des pâturages, serpentent à 5 ou 600 mètres plus bas.

De quelque sommet que l'on descende pour se diriger vers les bas-fonds, la coupe du chemin à parcourir peut se résumer ainsi : une descente rapide depuis la cime jusqu'à mi-hauteur, puis une longue promenade sur des prairies à peine ondulées, et enfin une nouvelle descente à travers les rochers au pied desquels le torrent roule au milieu des pierres ou d'une étroite zone de culture. Le creusement des vallées présente un rapport frappant avec la dimension et l'altitude des cirques où elles prennent leur origine, et les torrents se déversent de l'une dans l'autre par des chutes subites au lieu d'y arriver, comme dans les vallées de la région centrale, par des pentes plus ou moins rapides. Ainsi, les vallées de Gavarnie et de Héas, ouvertes à une grande profondeur au-dessous des pâturages, interrompent à peine les parois qui les enferment pour recevoir l'afflux des vallées d'Estaubé, d'Aguila,

d'Aspé, dont les torrents, arrivant sur le plateau granitique par des lits moins profondément creusés, bondissent du haut des murs et se déversent en hautes et bruyantes cataractes de la vallée supérieure dans la vallée inférieure.

Tous les torrents de Coumélie suivent la même route, et dans ces gorges noires et sauvages, où le regard s'arrête sur deux murs de roches ravinées, rien n'est plus charmant que ces larges torrents qui semblent jaillir des sommets et qui roulent en écume jusqu'au pied des escarpements.

Le Coumélie forme en quelque sorte le centre du plateau granitique. C'est de ses flancs que sont tombées les plus considérables de ces avalanches de pierres connues presque partout sous le nom de Chaos, mais appelées Peyrades par les montagnards. Notre région en est pleine : presque toute la vallée de Héas, le fond du cirque de Troumouse, une partie des vallées d'Ossoue, de Gavarnie, d'Aspé, en reçoivent une physionomie étrange et terrible. De tous ces chaos, celui de Gavarnie est le plus célèbre, mais non le plus beau ni le plus étendu. La grande Peyrade de la vallée de Héas, presque inconnue (et traversée depuis quelques années seulement par le chemin, qui passait auparavant fort loin, sur la rive opposée), surpasse infiniment le chaos de Gavarnie par la dimension des blocs, la hauteur effrayante de l'entassement, la superficie que recouvrent les rochers éboulés, et la profondeur du gouffre au fond duquel roule le Gave. Il serait, je crois, difficile de trouver un site d'une sauvagerie plus complète.

Un autre chaos, situé plus haut dans la vallée, au delà des charmantes cascades que forme le déversement du gave d'Estaubé, jouit d'une célébrité bien plus grande et bien plus antique, quoiqu'il soit inférieur même au chaos de Gavarnie.

Mais la légende veut que le caillou de l'Arrayé, énorme bloc de granit qui se dresse au milieu de l'entassement de pierres, ait été le théâtre des apparitions qui ont fait de la vallée et de la chapelle de Héas un lieu de pèlerinage particulièrement vénéré des montagnards.

« Il serait naturel de croire que tous ces rochers amoncelés sont descendus du sommet des montagnes dont ils couvrent les flancs, mais la tradition montre encore dans la partie moyenne du Soum d'Agudes l'escarre d'où ils se sont détachés. C'est de là (d'après les souvenirs des gens du pays, recueillis par M. Joanne) que serait tombée en 1650 l'avalanche de pierres qui remplit le fond du vallon et rebondit sur la pente opposée. L'accumulation des eaux du torrent en amont de cette barrière infranchissable forma un vaste lac qui dura un siècle et demi.

» En 1788, une autre convulsion de la nature ou simplement l'action du courant détruisit ce lac avec l'obstacle qui l'avait créé. L'inondation fut tellement terrible que la plaine de Luz disparut entièrement sous les eaux, et que le Bastan fut refoulé jusqu'à Barèges. » J'ai tenu à citer jusqu'au bout, mais j'ai à peine besoin de faire remarquer combien toutes ces traditions doivent être accueillies avec réserve [1]. Si le chaos de Héas ne datait que du dix-septième siècle, il serait difficile d'expliquer comment les apparitions du bloc de l'Arrayé auraient pu donner lieu à la construction d'une chapelle dont les souvenirs remontent au moyen âge. D'un autre côté, la position des débris ne permet pas de croire qu'ils aient pu descendre du flanc opposé des montagnes. Quant à l'écroulement de la digue et à la chute du lac de Héas, ces accidents durent causer une grande émotion dans les vallées inférieures, mais sans refouler pour cela le Bastan jusqu'à Barèges. L'effet le plus déplorable de cette catastrophe fut la destruction de la forêt qui recouvrait quelques pentes de la vallée de Héas. Les couches de terre végétale, rongées par le déluge qui passait à leurs pieds, durent glisser lentement dans le lit du torrent avec les sapins qu'elles portaient, et dont les troncs blanchis restèrent pendant un demi-siècle engagés entre les pierres qui encombrent le lit du Gave. Depuis, la vallée n'a pas repris sa parure de forêts

[1] Dans la dernière édition de son itinéraire, M. Joanne fait suivre ce récit d'un point d'interrogation.

et les rochers qui l'enserrent impressionnent par leurs formes puissantes, leur noirceur et leur nudité. Mais c'est à peine si le bassin de Gèdres put être inondé jusqu'au niveau du village. Le lac de Héas n'avait aucune profondeur, et les gorges que le torrent traversait pour atteindre les plaines durent modérer la fureur de son mouvement. Les épanchements de Gèdres et de Pragnères eurent certainement pour effet de retenir les eaux qui s'écoulaient avec impétuosité sans doute, mais avec une lenteur forcée, à travers les étroites gorges qui avoisinent Luz, et je doute fort que le Bastan ait été refoulé même de 100 mètres par le cataclysme de Héas. Mais dans les montagnes, où la nature semble inébranlable, de telles convulsions laissent dans l'imagination des habitants une impression de terreur si grande et un tel manque de sécurité, qu'ils augmentent les désastres réels de toutes les horreurs que leur imagination peut leur fournir. Parmi tous ceux qui depuis quatre-vingts ans répètent cette terrible histoire, aucun n'a donc songé à la masse d'eau qu'il eût fallu pour refouler le Bastan jusqu'à Barèges? — En supposant que nul obstacle ne se fût opposé à la marche du torrent, le lac de Héas aurait dû avoir (si nous tenons compte de la forme de la vallée), 1 kilomètre au moins de profondeur, sur 7 ou 8 kilomètres de largeur moyenne. Il ne présentait pas la millième partie de ce volume.

Quant à la Peyrade de Héas, il est vraisemblable qu'elle date d'une époque fort reculée. Toutefois, l'escarre du Soum d'Agudes pourrait bien l'avoir exhaussée en 1650, de façon à provoquer la formation du lac temporaire. Ce lac est aujourd'hui transformé en pâturages. Les flots transparents du Gave y prennent un aspect particulier; ils le découpent en nombreux îlots où paissent des troupeaux et quelques vaches. Le torrent s'apaise en glissant sur de larges fonds de cailloux bleuâtres, et l'eau profonde et glacée déroule en silence ses petites vagues régulières au souffle du vent de la montagne.

Plus haut, la vallée se dénude encore et s'attriste de plus en plus : à 1,480 mètres, on rencontre les quelques chaumières du

hameau de Héas ; puis, à 1,540 mètres, la chapelle, entourée de quatre ou cinq maisons plus civilisées, qui contrastent étrangement avec le site, l'un des plus terribles qu'on puisse voir.

En se dirigeant vers le cirque, on traverse une de ces plaines dont la Prade de Gavarnie offre un type plus complet, et dont notre collègue, M. Bayssellance, attribue la formation aux glaciers. Après avoir examiné ces nappes de pierres, inclinées de quelques degrés à peine, mais si différentes de l'ancien lit du lac de Héas, et à travers lesquelles les torrents courent au lieu de s'endormir comme dans le lac, il me semble que l'explication proposée par M. Bayssellance est la seule admissible.

Ce que j'ai dit sur la vallée de Héas pourrait s'appliquer à la partie granitique de la vallée de Gavarnie : mêmes formes, même austérité, mêmes roches, seulement sous des proportions un peu moins grandioses. En outre, la vallée de Gavarnie est si connue et les descriptions en sont si nombreuses, qu'il serait inutile d'en faire une de plus.

Quelques mots, en terminant, sur les vallées espagnoles situées au Sud du massif. Ces vallées sont peu ou mal connues. Si peu et si mal que les gens du pays confondent les noms des montagnes avec ceux des torrents [1], et donnent aux mêmes pics plusieurs appellations différentes.

Cette région, du reste, ne figure sur ma carte qu'en manière d'accessoire, et sans grands détails ; mais j'ai cru intéressant de faire pour ce pays perdu le même travail de révision que pour le cirque d'Estaubé et pour la vallée de Bielsa, et de fixer autant que possible la nomenclature des montagnes et des vallées au

[1] Le nom de Cotatoire, par exemple, était considéré jusqu'ici comme désignant un ruisseau, un pic et un vallon. Quelques informations que j'aie pu prendre, il m'a été impossible de découvrir un pic de Cotatoire. Tous les pics de cette région ont leurs noms, fort difficiles parfois à bien appliquer, mais il n'en reste pas un seul auquel le nom de Cotatoire puisse être donné. Pour toute cette région, Henri Passet, de Gavarnie, m'a rendu les plus grands services et m'a donné des renseignements inappréciables.

Midi de Gavarnie. De plus, les dernières cartes éditées ayant interverti les directions et les emplacements des vallées, j'ai tenu à montrer, par une esquisse plutôt que par une carte achevée, quelle en était la forme et la disposition générale.

Cette forme est absolument différente de tout ce que nous connaissons, et je n'ai peut-être jamais ressenti d'étonnement comparable à celui que j'éprouvai en arrivant sur le col du Mont-Perdu et en découvrant cette nature bizarre. D'abord, la teinte lumineuse et rougeâtre, les formes trapues, la prédominance des plateaux, l'aridité complète des sommets, la netteté des ombres lointaines, et surtout l'aspect féroce et enflammé des montagnes du Midi, contrastent vivement avec les couleurs adoucies, bleuâtres, les formes alpestres et les grandes neiges du versant septentrional. Dans les montagnes de France, on retrouve des formes de montagnes. Pour celles d'Espagne, il faudrait inventer un mot, qui existe peut-être, mais que j'ignore. Faute de mieux, je vais essayer de les décrire. Qu'on s'imagine une plaine de sable rougeâtre, élevée de 2,200 ou 2,300 mètres au-dessus de la mer, et s'abaissant lentement vers le Sud; que ce sable, agglutiné par un ciment quelconque, puis rongé dans la suite des temps, se soit affaissé en certains points, produisant ainsi un dédale de bosselures sans eau et sans végétation, et on aura quelque idée de l'apparence générale du paysage. Les sommets qui s'élèvent sur cette sorte de désert affectent la forme de pâtés arrondis, autour desquels un océan s'arrêtant plusieurs fois à des hauteurs différentes aurait rongé avec ses vagues des anneaux superposés.

Aucun ravin ne découpe les flancs de ces pâtés, qui doivent boire l'eau comme des éponges. Le plus élevé d'entre eux, le mont Arrouébo, atteint 2,815 mètres de hauteur absolue, mais avec des formes si maladroites et si épaisses que Ramond, malgré son coup d'œil admirable d'exactitude, déclara que les montagnes de cette région n'atteignaient pas 2,500 mètres. Un voisin du mont Arrouébo, le pic Descargadé, masse informe d'un gris jaunâtre et d'une nudité sauvage et repoussante, s'élève au pied même des dernières pentes de Gavarnie, et doit avoir une hau-

teur de 2,560 mètres environ, que je ne mentionne pas sur ma carte jusqu'à plus ample information.

Quant aux vallées, il semble que toute la puissance d'érosion emmagasinée dans la masse des montagnes se soit employée à les creuser; elles effraient par leur profondeur et par la façon abrupte dont elles s'ouvrent au milieu du plateau, comme des crevasses ou des failles.

Les flancs descendent à pic, depuis la surface du désert jusqu'au fond du gouffre, où l'on voit jaillir brusquement des torrents abondants qui arrosent de noires forêts et des prairies où le soleil peut à peine luire.

Au pied du Mont-Perdu, c'est la vallée d'Arras qui attire surtout l'attention. Au milieu du plateau de Gaulis, elle s'enfonce tout d'un coup, formant une fosse profonde entourée de murailles, puis elle se recourbe lentement, en s'approfondissant toujours, autour du mont Arrouébo, dont les ceintures et les escarpements inférieurs l'accompagnent dans son mouvement de tournoiement. Elle se perd enfin, toujours profonde et terrible, dans la direction de la vallée de Broto, où son torrent se déverse en amont de Torla.

Dès qu'il me sera possible de continuer mes travaux dans les Pyrénées, c'est par la vallée d'Arras que je me propose de débuter; je voudrais relever avec soin cette contrée si à part, qui me paraît avoir plus de rapports avec les causses du massif central de la France qu'avec les Pyrénées qui l'enclavent. Je voudrais, partant du Mont-Perdu pour me diriger vers l'Ouest et vers le Sud, parcourir l'espace qui s'étend du Vignemale à Torla, à Fanlo et à Bielsa. Il y a là des splendeurs ignorées et des formes nouvelles. Du col du Mont-Perdu, par delà les premières montagnes, s'ouvre à quelques kilomètres à peine une région aussi merveilleuse que le premier plan est repoussant.

Larges plateaux abreuvés de soleil, vastes ondulations de croupes lointaines, vallées brillantes, rochers plongeant à pic dans les rivières indécises, forêts, champs, prairies, villages à moitié cachés dans les profonds replis du terrain, voilà ce qu'on aperçoit

ou ce qu'on croit apercevoir du haut de cet observatoire, d'où le regard plane comme celui des aigles. Ce ne sont plus les douces plaines de France, où la vue glisse sur une surface grise, verte ou bleuâtre, dont la partie lointaine se perd dans la brume. C'est un pays de grande allure, de vive lumière et d'air pur. Jusqu'à l'extrême horizon, tout est plein de formes nettes, onduleuses et fières, que l'Èbre adoucit sans les interrompre, et qui, plus loin, se redressent jusqu'aux limites de la Castille. La lueur dorée qui baigne les monts d'Espagne, et que la France ne connaît pas, exerce une fascination véritable dès qu'on a pu seulement l'entrevoir, et les belles Pyrénées françaises paraissent grises et ternes quand on redescend des Pyrénées espagnoles.

Encore une observation avant de terminer. M. Frossard a publié, dans le numéro de juillet 1874 du *Bulletin de la Société Ramond*, une remarquable étude sur la région de Gavarnie. On peut suivre avec lui, dans ce coup d'œil sommaire, l'ordre des formations géologiques depuis Gèdres jusqu'au revers méridional du Marboré. Autour de Gèdres, les cimes granitiques; puis, au-dessus des formations primitives de Coumélie, les couches siluriennes du pic de Larrue et du Piméné; plus loin, les formations devoniennes dans les régions d'Allans ou de Pouey-Espée. Ici, une immense lacune; puis deux étages de terrains crétacés, le turonien et le sénonien, que j'ai déjà mentionnés en parlant d'Estaubé et de Gavarnie. Enfin, au-dessus de cette dernière formation, les assises nummulitiques qui recouvrent tout le versant méridional. M. Frossard s'arrête ici; mais, d'après M. Leymerie, les plateaux qui s'étendent immédiatement à la base du Mont-Perdu sont également composés, en partie du moins, de terrain à nummulites.

A partir de là, nous ne possédons que bien peu de détails sur les montagnes écrasées qui s'allongent vers le Sud. La carte géologique de France les considère en entier comme une dépendance du terrain crétacé supérieur; mais nous voyons déjà que certaines cimes appartiennent aux formations tertiaires, et il est certain que les vallées correspondent en partie à des étages

antérieurs. Ces chaînons, si intimement reliés à la chaîne centrale, lui appartiennent-ils en réalité? Leurs formes étranges, sans analogues dans les grandes montagnes européennes, semblent dénoter une composition particulière. Quel est le détail de ces formes? A quelles lois obéissent-elles? Et quelle place doivent occuper dans l'histoire des Pyrénées ces montagnes si peu connues? C'est ce que nous ignorons encore en partie, et ce que de nouvelles recherches nous apprendront sans doute un jour.

Bordeaux, le 15 octobre 1874.

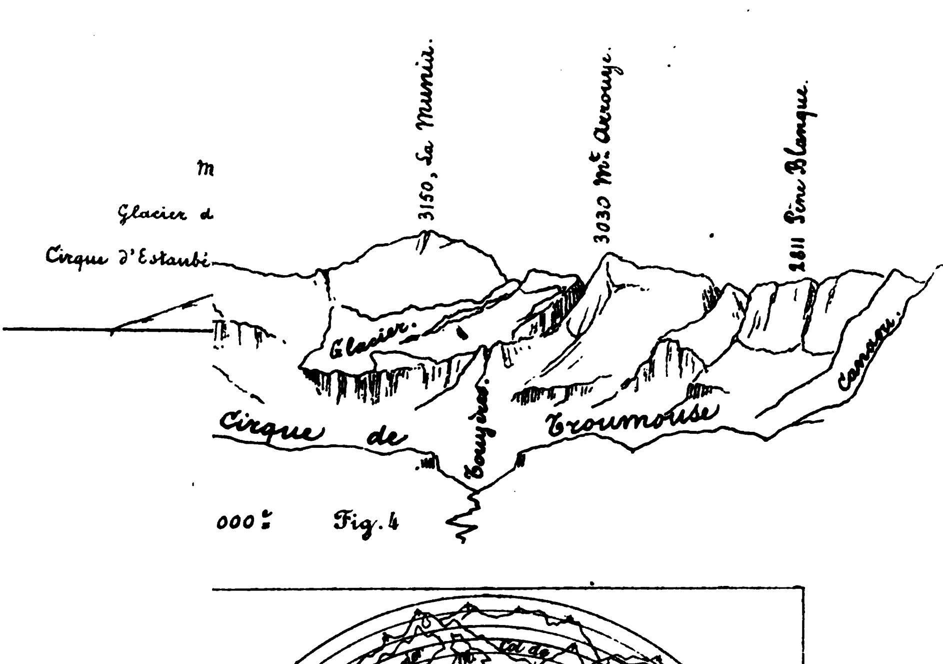


Fig. 4

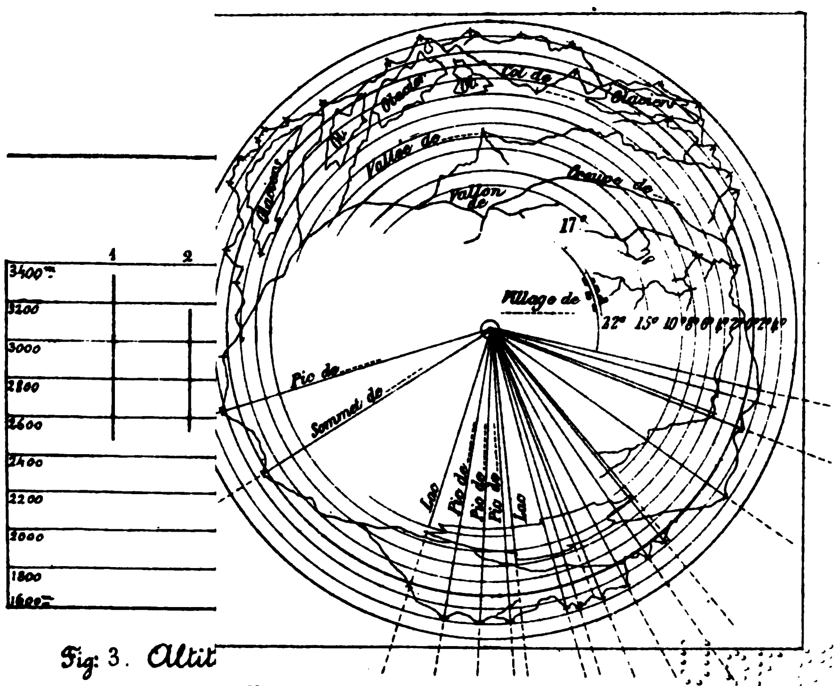


Fig: 3. Altit

Tour d'horizon relevé à l'Orographe. Fig. 5.

Bè

Pic de Montagne

Pic de Salarous
2750

Cabanes

ERDU

CALCAIRE

CENTRALES

Lourde-Rocheblave,

RAVÉE PAR

DER

s de Bordeaux, de l'Association française

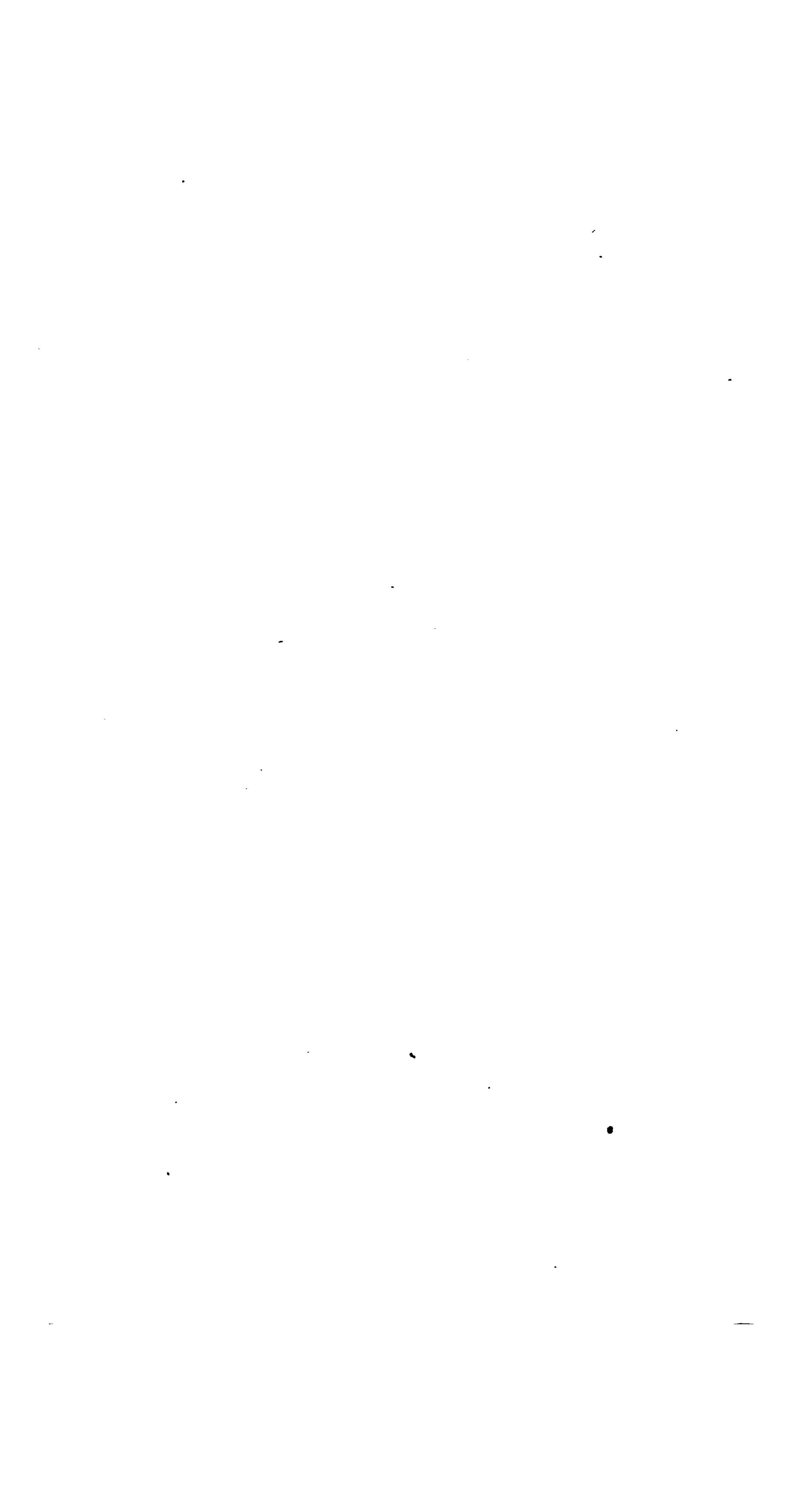
iences, etc.

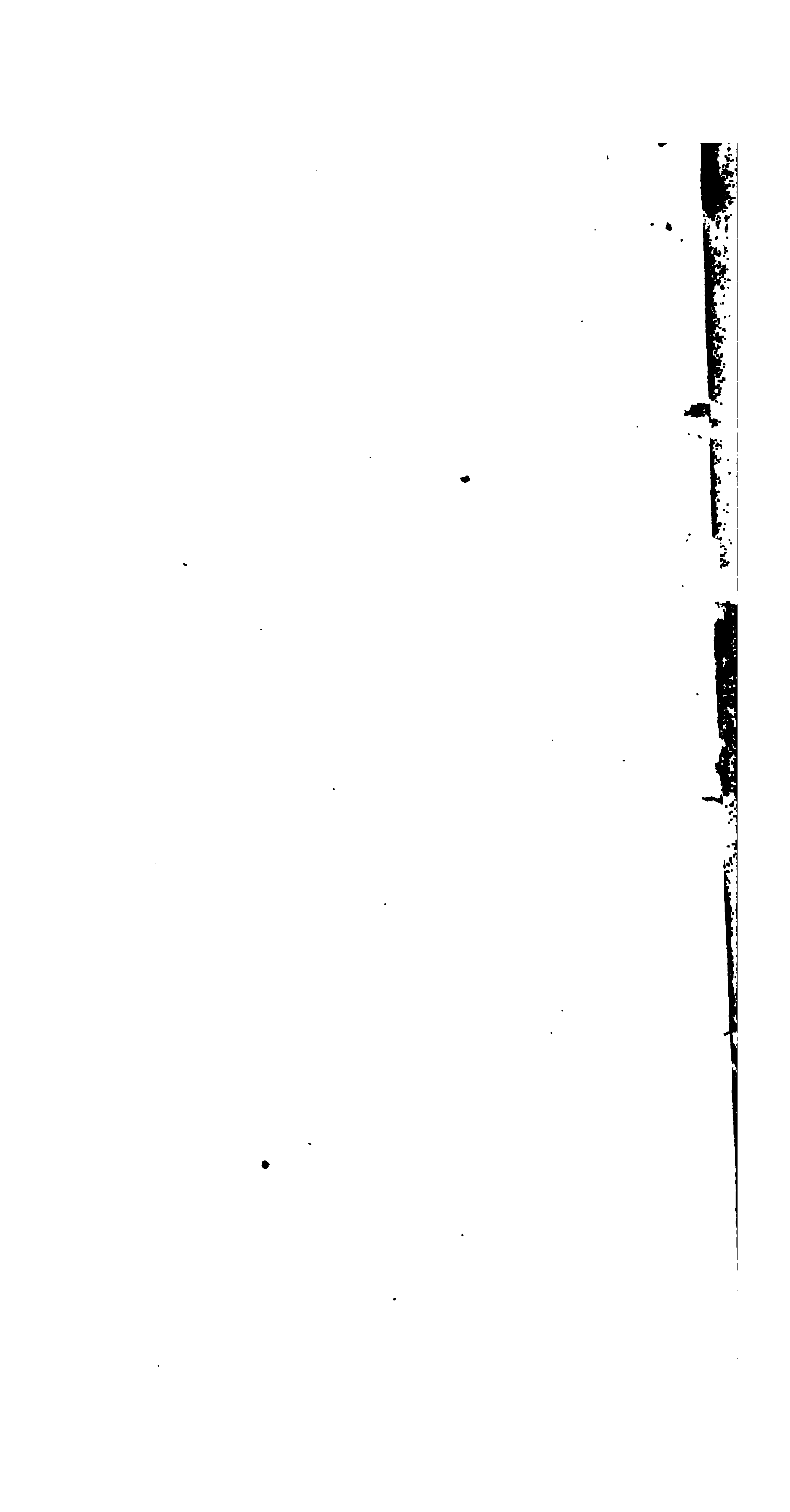
Saus

GÈDRES

995

IMP. G. CHARIOL, BORDEAUX — DÉPOSÉE





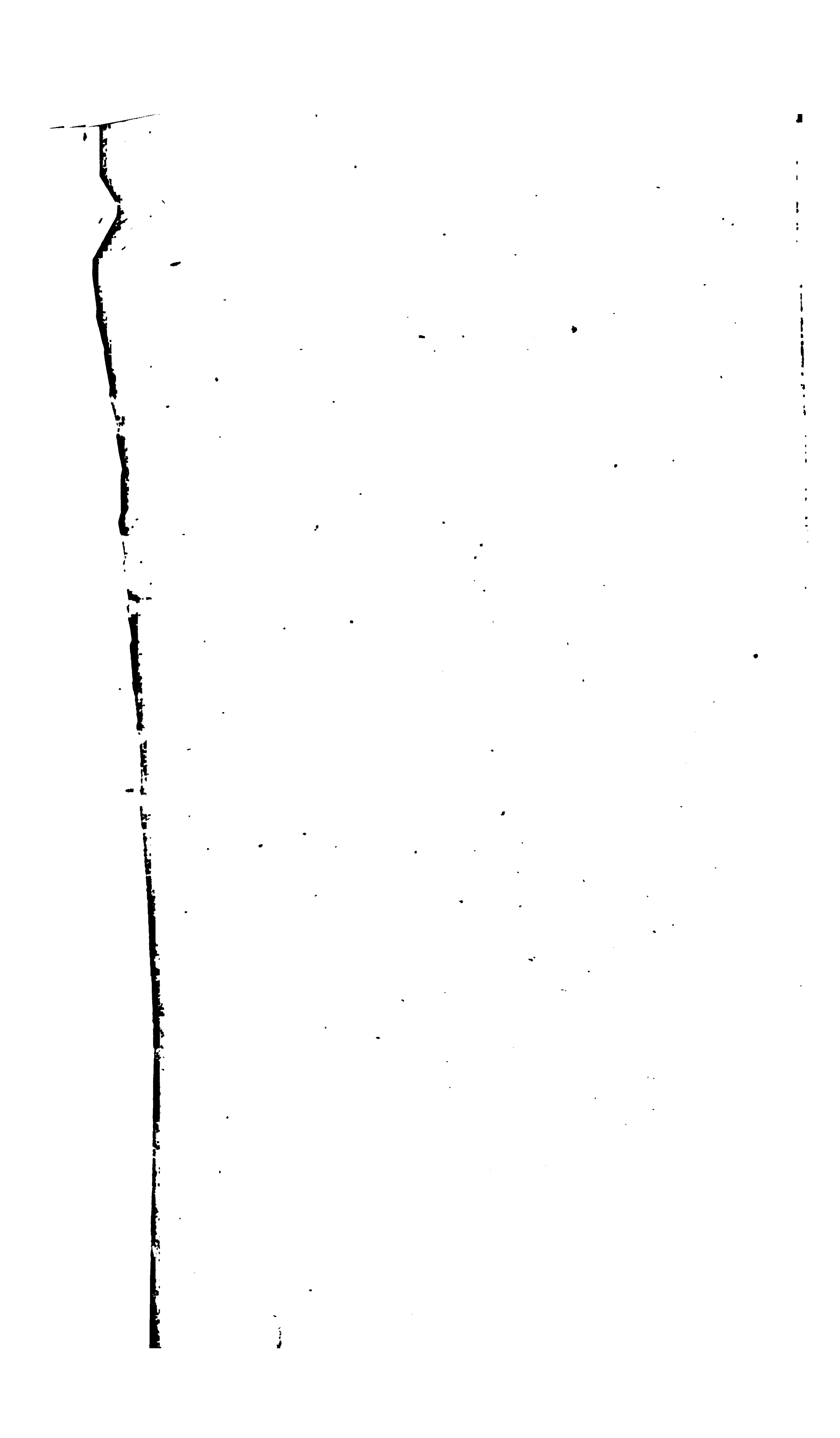


TABLE DES MATIÈRES.

[illegible]. — Imp. [illegible]



TABLE DES MATIÈRES.

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES DE BORDEAUX

Ire SÉRIE

(TOMES I à X)

1855 - 1875

TABLES GÉNÉRALES

TABLES GÉNÉRALES

DES 10 VOLUMES DE LA Ire SÉRIE

TABLE I

Liste des Mémoires par noms d'auteurs.

TABLE II

Par ordre de Matières.

TABLE III

Liste des noms cités.

